García Suárez, J. (2018). Determinación de fuentes de errores algebraicos a partir del empleo de técnicas de extrapolación algebraica. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1*(3), pp. 1-14.

ISSN: 2603-9982

DETERMINACIÓN DE FUENTES DE ERRORES ALGEBRAICOS A PARTIR DEL EMPLEO DE TÉCNICAS DE EXTRAPOLACIÓN ALGEBRAICA

José García Suárez, Universidad de Guadalajara, México

Resumen

Los conocimientos previos que poseen los estudiantes cuando ingresan a la universidad, pueden ser considerados como un arma de dos filos. Por una parte, si estos conocimientos fueron aprendidos de manera significativa pueden ser utilizados como una herramienta de apoyo, al momento de que dichos estudiantes intentan resolver las distintas tareas algebraicas que enfrentarán durante su formación académica. Sin embargo, si no fueron comprendidos de manera correcta, pueden convertirse en obstáculos cognitivos difíciles de superar, al tratar de aplicar dichos conocimientos en los nuevos contextos que se les presentarán. Esta investigación presenta un estudio cualitativo mediante la aplicación de 20 entrevistas semiestructuradas en estudiantes universitarios, donde se analizaron sus respuestas a una prueba escrita basada en los ítems obtenidos del trabajo de Matz (1980). Los resultados nos indican que los conocimientos previos de los estudiantes entrevistados fungen más como obstáculos que como apoyo.

Palabras clave: *Pensamiento algebraico, Extrapolación algebraica, errores algebraicos, estudiantes universitarios.*

Determination of sources of algebraic errors from the use of algebraic extrapolation techniques.

Abstract

The previous knowledge that the students possess when they enter the university, can be considered like a weapon of two edges. On the one hand, if these knowledges were learned in a meaningful way they can be used as a support tool, at the moment when the students try to solve the different algebraic tasks that they will face during their academic formation. However, if they were not understood correctly, they can become difficult cognitive obstacles to overcome, when trying to apply that knowledge in the new contexts that will be presented to them. This research presents a qualitative study through the application of 20 semi-structured interviews in university students, where their answers to a written test based on the items obtained from the work of Matz (1980) were analyzed. The results indicate that the previous knowledge of the students interviewed serves more as obstacles than as support.

Keywords*: Algebraic thinking, algebraic extrapolation, algebraic errors, university students.*

Recibido: 02/11/2018; Aceptado: 22/12/2018

MARCO TEÓRICO

El error ha sido visto tradicionalmente como un resultado sancionable, como un comportamiento o acto indeseable, es por ello por lo que se trataba, por sus efectos perniciosos, de eliminarlo antes de que ocurriera (De la Torre, 2004); por tanto, consideramos contraproducente realizar acciones que promuevan su erradicación ya que la acción de errar promueve oportunidades para el aprendizaje.

De acuerdo con lo que plantea Rückert, citado por De la Torre (2004, p.27), la potencialidad de un error despejado, radica en que esto se constituye como una excelente base para apoyar el conocimiento que se construye posteriormente. Para este autor, el error debe ser asumido como un obstáculo provocador que debe ser superado. Es por esto que la identificación del error por parte del maestro no conduce a un cambio en el alumno, cuando no media una reflexión sobre el mismo para modificar la comprensión errónea exhibida por el alumno.

Por otra parte, según Brosseau (1997), los errores al ser imprevisibles se constituyen en obstáculos dinámicos llegando a convertirse en concepciones efectivas para resolver un determinado problema y pistas iniciales para ser aplicadas a otro. En otras palabras, obviamente no se puede evitar que aparezca el error porque éste sencillamente aparece como un imprevisto, pero precisamente en el enfoque de las causas que lo originan estaría la conformación de una situación cambiante que torna el defecto en virtud, es decir, la meta no sería no cometer errores, sino aprender a conocer las causas que los provocan; conocimiento que sería aplicable a situaciones similares.

En este mismo sentido Astolfi (1999) sugiere ver los errores de manera individual, pues según su naturaleza, se pueden proponer distintas modalidades de intervención didáctica. Visto así, el error no puede ser apreciado superficialmente como una desviación que, dentro del plan de mejorar, deba ser eliminada, sino más bien como un inconveniente provocador que mueve hacia la superación de las condiciones que provocaron su aparición.

Como puede observarse en los planteamientos anteriores, el error puede concebirse como una oportunidad de enseñanza, ya que si se logra evidenciar las causas que los originan, puede orientarse los procesos de enseñanza hacia la superación de las condiciones que los provocan, y además una vez identificadas dichas causas se puede generar conocimientos que sean susceptibles de ser aplicados en situaciones similares que se presenten posteriormente.

Es importante recalcar que algunos investigadores van más allá en la búsqueda de los errores en la Educación Matemática, y coinciden en afirmar que los errores no se presentan al azar, sino que pueden ser influidos por la experiencia (Rico ,1995; Brosseau, 1997 y Radatz, 1980). En este sentido Rico (1995), sostiene que los errores no aparecen por casualidad, sino que aparecen dentro de un marco conceptual definido por los conocimientos previos; en otras palabras, se sabe que existe un error porque hay un campo cognoscitivo de donde deriva el juicio. De allí que para Brosseau (1997), el error, además de ser el efecto de la ignorancia, del azar, es el efecto de un conocimiento anterior. Por lo tanto, un error no es sólo la ausencia de respuesta correcta o el resultado de un accidente, sino más bien producto de la experiencia (Radatz, 1980). Tales afirmaciones dan pauta a la introducción de nuestra investigación, ya que intentamos indagar las raíces por las cuales los estudiantes de primer curso universitario en matemáticas, llegan con deficientes conocimientos en la materia, lo que nos lleva a pensar que los estudiantes al ingresar poseen pobres conocimientos matemáticos, adquiridos en los distintos cursos de su educación secundaria y del bachillerato.

Por lo antes descrito, resumimos que los errores son motivados por factores que deben estudiarse de manera exhaustiva para establecer sus posibles causas y además, estos errores pueden ser condicionados por los conocimientos previos de los estudiantes, y al mismo tiempo éstos deben aprovecharse para alcanzar nuevos conocimientos, es decir, se constituyen en elementos que pueden ser utilizados para el aprendizaje. Y desde este punto de vista, destacamos la importancia que tendría el analizar cómo los conocimientos previos influyen en los errores que cometen los estudiantes de primer curso universitario cuando resuelven distintas tareas algebraicas.

Por otra parte y de acuerdo con Matz (1982) el comportamiento de un estudiante, cuando este resuelve un problema algebraico, está conformado principalmente por dos componentes: El primer componente, está relacionado con el conocimiento previo que se supone tiene el estudiante acerca de un nuevo problema y que, por lo general, toma en forma de reglas que ha extraído de un curso recibido o extraído directamente de un libro de texto, a estos conocimientos los denomina: reglas básicas. La mayoría de las veces, estas son las reglas elementales que forman el núcleo del contenido básico de los libros de texto convencionales de álgebra. El segundo componente, consiste en un conjunto de técnicas de extrapolación que especifican la forma de reducir la brecha entre las normas conocidas y los problemas poco familiares. Mediante la aplicación de estas técnicas de extrapolación el estudiante, intenta encontrar una forma de ver un problema o trata de evocar una regla conocida que sea aplicable en la nueva situación.

Así mismo, Matz remarca que muchos de los errores más comunes que se presentan en las producciones de los estudiantes, tienen como fuente el no hacer una elección correcta de una técnica de extrapolación.

En este mismo orden de ideas, Matz afirma que, en la resolución de un problema nuevo, los estudiantes pueden tener dos maneras posibles de afrontarlos. Primeramente, si el estudiante ya tiene una regla aplicable, la respuesta puede ser construida por la ejecución directa de esa regla. Pero si ninguna de las reglas que posee el estudiante son válidas para resolverlo, se verá obligado a construir un procedimiento más creativo para la resolución del problema, es decir, para encontrar alguna manera de adaptar sus conocimientos de reglas conocidas de los problemas que le son familiares al nuevo contexto que se le presenta. Esta es una ruta más indirecta a la obtención de una respuesta, ya que el alumno tiene que crear una regla o un plan antes de usarla. Por ejemplo, un problema desconocido puede ser parecido a uno que le es usual, excepto porque tiene un término adicional (un 7 en lugar de un 0, o una raíz cuadrada en lugar de un cuadrado, etc.) Es por eso que, con el uso de las técnicas de extrapolación tratan de librar estas diferencias mediante la alteración de una regla para adaptarse a la nueva situación, o mediante la modificación de la situación para ajustarse a la regla.

Matz describe dos técnicas de extrapolación muy utilizadas, la generalización y la linealidad. A continuación se describen brevemente cada una de estas.

La extrapolación por generalización se basa en que se puede construir la formación de una regla general de un problema específico basado en suposiciones sobre sus características particulares, las cuales pueden originarse en una secuencia fortuita de ejemplos de enseñanza o por restricciones legitimas impuestas por la semántica del álgebra.

Ejemplos de esto pueden ser los casos en que la generalización puede remplazar a un operador específico (por ejemplo, "más") con otro operador. Otro ejemplo, "menos" puede ser sustituido por el "mas" en la ley distributiva. De esta manera, la generalización puede dar cabida a los operadores particulares y números que aparecen en una situación nueva.

Además de cambiar la regla en sí, hay otra manera de extender la aplicabilidad de la generalización. Se puede modificar la forma en que se utiliza, es decir, su estructura de control, un ejemplo de esto es la linealidad que se describe como una forma de separar un objeto o estructura y operar con cada una de sus partes de forma independiente. Es decir, un operador se comporta de forma lineal cuando el resultado final puede ser obtenido mediante la aplicación del operador de cada subparte y luego simplemente la combinación de los resultados parciales. Ejemplos de lo anterior:

Por ejemplo, si un estudiante con poca experiencia aplica la regla de cancelación de:

$$\frac{AX}{X} = A$$

Puede continuar aplicándola a cada literal de expresiones como la siguiente:

$$\frac{AX + BY}{X + Y} = A + B$$

Según Matz (1982), para algunos estudiantes, las reglas pueden aplicarse selectivamente o de manera uniforme a las partes de un objeto.

Por otra parte, la técnica de extrapolación de linealidad describe una forma de trabajar con un objeto susceptible a ser descompuesto por el tratamiento de cada una de sus partes de forma independiente. El operador se emplea linealmente cuando el resultado final de su aplicación a un objeto se consigue aplicando el operador a cada subparte y luego simplemente combinando los resultados parciales. Y se "justifica" porque en la aritmética, los estudiantes utilizan la ley distributiva en muchas ocasiones y muy probablemente esta refuerza su aceptación de la linealidad. Esta tendencia continúa con los primeros problemas de álgebra ya que, en esencia, estos los conciben como solo procedimientos de aritmética aplicados a los valores simbólicos en lugar de números. Un ejemplo de esto sería:

$$(AX + B)(CX + D) = ACX^2 + BD$$

Donde se ignora la multiplicación de todos los factores y se simplifica multiplicando los términos semejantes.

Así pues, en esta investigación partimos del supuesto que los estudiantes universitarios poseen conocimientos que han adquirido durante su formación académica previa a su ingreso a la universidad.

Siguiendo las ideas de diversas investigaciones en las cuales se consideran a los conocimientos previos como causa de los principales errores algebraicos, coincidimos con Chi y Roscoe (2002) quienes se oponen a la idea que indica que los estudiantes entran a situaciones de aprendizaje como si llegaran a un pizarrón en blanco; estos investigadores suponen que los estudiantes tienen cierto dominio de algunas temas matemáticos estudiados previamente y sostienen que este conocimiento, al compararse con el conocimiento formal tiene una tendencia a ser incorrecto, ya que, probablemente, tiene bases empíricas poco fundamentadas, lo que dificulta el aprendizaje de conocimientos formales con un sentido más profundo y correcto; este conocimiento previo puede ser visto como una base de la que parte el nuevo conocimiento, en la que ellos fundamentan los nuevos conceptos para ser integrados y ahí pueden originarse los errores que suelen presentarse en sus producciones.

Por su parte, Brown, Findley y Montfort, (2007) mencionan que, sin un conocimiento específico de los conocimientos erróneos de los estudiantes, es poco probable modificar el pensamiento de ellos a través de la enseñanza tradicional; esto lo explican partiendo de que se pueden dar cambios sólo después de que ciertos hechos hayan sido corregidos de la mente y no se pueden corregir si se desconocen.

Así mismo, se argumenta también que los errores existen debido también a discordancias y conflictos entre los muchos conceptos de matemática avanzada y matemática básica (Stafylidou y Vosniadou, 2004), fundamentando lo anterior con trabajos como el de Fischbein (1987), quien señala que las creencias intuitivas pueden ser las causas de los errores sistemáticos de los estudiantes, lo anterior también fue percibido por Stavy y Tirosh (2000), quienes establecieron una teoría respecto a las reglas intuitivas. Todos estos autores relacionan los errores que se dan en el álgebra con respecto a diferencias de conocimiento, ya que si se fija en las matemáticas avanzadas, a veces su relación con las básicas es muy distante; tómese como ejemplo las integrales de orden superior si se comparan con la aritmética de secundaria. Así pues, consideramos que la incompatibilidad entre los conocimientos previos y los conocimientos nuevos matemáticos, puede ser considerada como un factor importante que pudiera ocasionar problemas de comprensión y constituye una de las razones por las que los estudiantes cometen errores en tareas algebraicas, fracciones, números racionales, etc. (Merenluoto y Lehtinen, 2002 y Kieran, 1992).

METODOLOGÍA

Una vez aplicada la prueba escrita a 150 estudiantes universitarios de ingeniería del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México; se realizó el estudio cualitativo en el cual se pudo indagar acerca de los procesos cognitivos que siguen los estudiantes en sus producciones, así como ahondar en las causas de los errores que manifestaron en dichas producciones. Para la selección los estudiantes a entrevistar, se tomó como los criterios siguientes: primeramente se consideró que fueran cuatro estudiantes de cada una de las carreras participantes, el segundo criterio fue que estos estudiantes serían los que presentaran mayor número de respuestas incorrectas. Debemos mencionar que de los 24 estudiantes seleccionados solo aceptaron ser entrevistados 20, sin embargo, al final se presentaron al menos 3 de cada una de las carreras participantes.

En el caso de las entrevistas, asumimos el significado de Cohen y Manion (1990) a la entrevista de investigación; "un diálogo iniciado por el entrevistador con el propósito específico de obtener información relevante para la investigación y enfocado por él sobre el contenido especificado por los objetivos de investigación de descripción, de predicción o de explicación sistemática" (p.378). Centramos nuestro trabajo en una entrevista semiestructurada y dirigida. Ya que este tipo de herramienta nos permitiría plantear una situación a los participantes y éstos tienen flexibilidad y libertad para dar respuesta. Así mismo, en esta modalidad el entrevistador puede, cuando considere adecuado, representar un papel más activo, introduciendo indicaciones orales más explícitas para estimular las respuestas de los entrevistados.

Estas características son las que justifican nuestro estudio cualitativo: perseguimos interpretar de manera más profunda las posibles fuentes de los errores cometidos por los estudiantes al intentar distintas tareas algebraicas, empleando las diferentes técnicas de extrapolación algebraica mencionadas en nuestro marco teórico, así como explicar esas actuaciones. En la investigación que realizó Palarea (1998), centrada también en álgebra, señaló que al aplicar una entrevista, se pretende analizar con algunos estudiantes en particular, los elementos conceptuales, cognitivos y metacognitivos, con el fin de registrar la observación del mayor número posible de hechos en algunos individuos específicos. Además, sostiene que estas indagaciones son importantes, ya que no siempre lo escrito responde a todo lo que es capaz de hacer el alumno y sobre todo porque interesa que él mismo sea consciente de por qué actúa de una u otra manera y del efecto que produce su actuación.

Las preguntas de la entrevista se centraron en las posibles dificultades que los estudiantes manifestaron al detectarse en sus respuestas, la utilización de las técnicas de extrapolación de generalización y linealidad. Llegados a este punto, la atención se centró en cómo y por qué los estudiantes utilizan las técnicas de extrapolación previamente mencionadas.

Para estructurar las preguntas de las entrevistas se utilizó una breve introducción, una serie de preguntas de seguimiento y otras de sondeo. La introducción a la entrevista se utilizó para familiarizar a los estudiantes en los temas y distintos aspectos para la discusión. Las preguntas de seguimiento se utilizaron para investigar las respuestas fundamentales de los alumnos en relación con las preguntas de investigación. También se hizo uso de preguntas de sondeo que impulsaran a los estudiantes a explicar su forma de pensar sobre la realización de las tareas, pero se tuvo cuidado de no canalizar sus respuestas. A continuación detallamos el protocolo seguido en estas entrevistas.

Partimos del supuesto de que los estudiantes de este nivel educativo, cuentan con una formación matemática previa que ha sido adquirida en los distintos cursos de los niveles de secundaria y del bachillerato. Antes de iniciar las preguntas de la entrevista, se informó al estudiante del motivo de la misma, así como su carácter de confidencialidad, tratando con esto de crear un ambiente de amabilidad entre el entrevistador y el entrevistado, buscando con esto, que el estudiante cooperara de la mejor forma posible en este trabajo.

Para iniciar la entrevista se utilizaban frases como "*observé tu respuesta pero no alcancé a comprender bien lo que haces, ¿me puedes comentar un poco acerca de cómo obtienes ese resultado?*". Una vez que el estudiante tomaba la palabra se empleaban frases orientadoras como *¿Al* *ver el ejercicio, recordabas alguna regla que te ayudara a resolverlo? ¿Al momento de responder, llegaste a considerar que eso estaba incorrecto y deberías resolverlo de alguna otra forma para obtener una respuesta correcta? ¿Una vez que considerabas resuelto el ejercicio, lo comprobabas? ¿Por qué?* Lo que se buscaba con ellas era estimular a los estudiantes a desarrollar aclaraciones explícitas de sus respuestas escritas. Además, se les daba la libertad de expresarse sin estar sujetos a un guion rígido, logrando con esto una interacción cordial entre el entrevistador y el entrevistado.

RESULTADOS

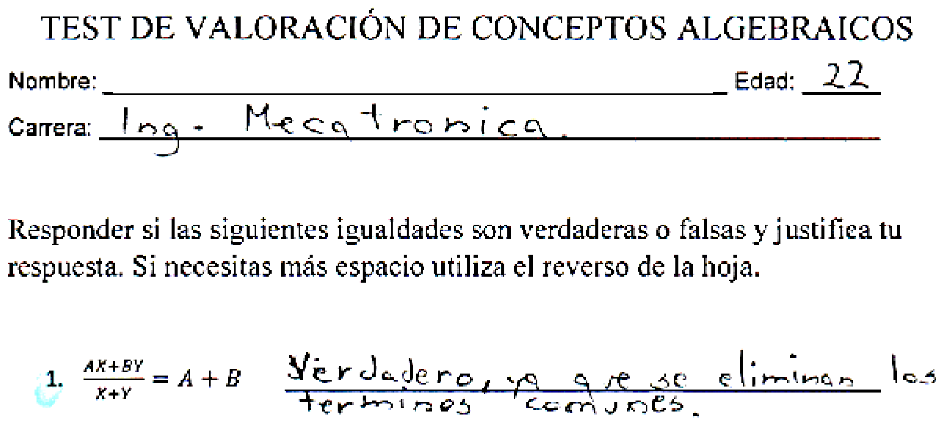
Respecto a las observaciones de resultados del análisis cualitativo con base en las entrevistas semiestructuradas. Nos interesa profundizar en las fuentes de los errores de las producciones de los estudiantes cuando son detectadas las distintas técnicas de extrapolación algebraica previamente mencionadas.

A partir de las respuestas obtenidas en las entrevistas, logramos diferenciar las diferentes técnicas de extrapolación propuestas por Matz (1982) y que fueron localizadas en las respuestas de los estudiantes entrevistados. Los resultados ordenados en las diferentes categorías encontradas se muestran en la tabla 1.

La simbología empleada en la tabla 1 es la siguiente: G= Generalización, L= linealidad, RPR= Reconocimiento parcial de la regla, RP= Reciprocidad, CL= Clausura.

A continuación, presentamos un par de ejemplos de las respuestas obtenidas en las entrevistas realizadas en esta investigación, con base en dichas respuestas fue elaborada la tabla 1.

En la figura 1, se puede observar un error inicialmente atribuido a la técnica de extrapolación de generalización, por medio de la cual el estudiante intenta resolver el problema que se le presenta aplicando un conocimiento previo.


TEST DE VALORACIÓN DE CONCEPTOS ALGEBRAICOS

Nombre: ______ Edad: 22

Carrera: Ing. Mecatronica.

Responder si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta. Si necesitas más espacio utiliza el reverso de la hoja.

1. $\frac{AX+BY}{X+Y} = A + B$ Verdadero, ya que se eliminan los terminos comunes.

Figura. 1. Respuesta al ítem 1

Tabla 1. *Concentrado de las diferentes técnicas de extrapolación diferenciadas en las respuestas de los estudiantes entrevistados.*

# Estudiante	**Reactivo evaluado**													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	G	RPR	L	G	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
2	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
3	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
4	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
5	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	RPR	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
6	G	RPR	L	G	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
7	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
8	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
9	RPR	RPR	RPR	RPR	RPR	L	RPR	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
10	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
11	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
12	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
13	G	RPR	CL	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
14	RPR	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
15	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
16	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
17	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
18	RPR	RPR	RPR	RPR	RPR	L	RPR	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G
19	RPR	RPR	CL	RPR	CL	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	CL	G
20	G	RPR	RPR	RPR	RPR	L	L	RPR	RP	RPR	RPR	G	RPR	G

Nota. Fuente: Elaboración propia.

Al entrevistar al estudiante en cuestión, se pudo comprobar nuestras suposiciones relacionadas con el empleo de las distintas de extrapolación algebraica. A continuación se muestra un extracto de una entrevista realizada a un estudiante, en el cual inicialmente identificamos que aplicaba la generalización de una regla algebraica de eliminación de literales.

Investigador (i): ¿Me podrías explicar cómo obtuviste la respuesta al problema 1?

Entrevistado (e): *Cuando hay términos iguales arriba y abajo se pueden eliminar… ¿no?*

(i): ¿Recuerdas que regla se aplica para poder hacer eso?

(e): *No estoy seguro…*

(i): Al no estar seguro de que estuviera correcto, ¿Por qué motivo lo intentaste resolver?

(e): *Porque me acordaba de algunos ejercicios parecidos que se resolvían así.*

(i): Según esta última respuesta, ¿este tipo de ejercicios ya los habías estudiado o visto anteriormente?

(e): *Sí, en la Preparatoria (Bachillerato)*

(i): Mencionas que eran ejercicios parecidos, si haces un esfuerzo, ¿lograrías recordar en qué casos se aplica esa regla?

(e): *Pues recuerdo que cuando la misma letra está arriba y abajo, se eliminan y en el ejercicio hay "x" y "y" arriba y abajo, por eso se pueden eliminar.*

(i): Muy bien, entonces recuerdas esas reglas que se aplica en casos de que la misma literal se encuentre multiplicando en el denominador y en el numerador. Pero si observas bien el ítem 1, se trata de sumas no de multiplicaciones.

(e): *A ver, es cierto la "x" y la "y" están sumando, pero yo pensé que esa regla aplicaba en todos los casos…*

i): Y de la manera más sincera que puedas responder, ¿Por qué crees que se te olvidó como resolverlo?

(e): *La verdad, cuando vimos ese tema, no me quedo claro, porque se veían varias operaciones algebraicas a la vez y me enredaba (confundía)…*

Un segundo ejemplo de las respuestas obtenidas por medio de las entrevistas, la presentamos a continuación:

Al observar la respuesta presentada en la figura 2, inferíamos que el estudiante aplicaba la técnica de extrapolación de linealidad para responder al ítem 3.

Figura 2. Respuesta al ítem 3

Basados en esta suposición inicial, realizamos la entrevista al estudiante elegido, un extracto de esta se presenta a continuación:

Investigador (i): Con respecto al ejercicio 3, mencionas que es lo mismo, ¿Me podrías decir por qué afirmas eso?

Estudiante (e): *Creo, que si tenemos dos números sumando dentro de la raíz, los podemos separar y el resultado será el mismo.*

(i): ¿Recuerdas que regla se aplica para hacer eso?

(e)*: No, solo pensé que como era una suma, primero se hacía la suma de los dos números y después se les sacaba raíz.*

(i): Al no estar seguro de que estuviera correcto, ¿Por qué motivo lo intentaste resolver?

(e): *las sumas si las sé resolver, pero siempre me han costado más trabajo las raíces.*

(i): Según esta última respuesta, ¿este tipo de ejercicios ya los habías estudiado o visto anteriormente?

(e): *Con letras no, pero con números creo que sí.*

(i): ¿Quieres decir que si tienes, por ejemplo: $\sqrt{9+4}$ ***esto sería igual a*** $\sqrt{9}+\sqrt{4}$***?***

(e): *Si, es lo mismo, ¿o no?, a ver déjeme hacerla,* $\sqrt{9}$ *es igual a 3 y* $\sqrt{4}$ *es igual a dos. Y sumamos 3 + 2 es 5, el resultado debe ser 5.*

Como se puede observar el estudiante expresa que el resultado puede obtenerse aplicando el operador (la raíz) a cada subparte y luego simplemente combinando los resultados parciales, esta técnica de extrapolación se conoce como linealidad.

Con base en el análisis de las respuestas de cada una de las entrevistas realizadas y considerando también los resultados de la tabla 1, se presenta en la figura 3, la estimación de frecuencias de errores cometidos por los estudiantes de acuerdo a la técnica de extrapolación empleada.

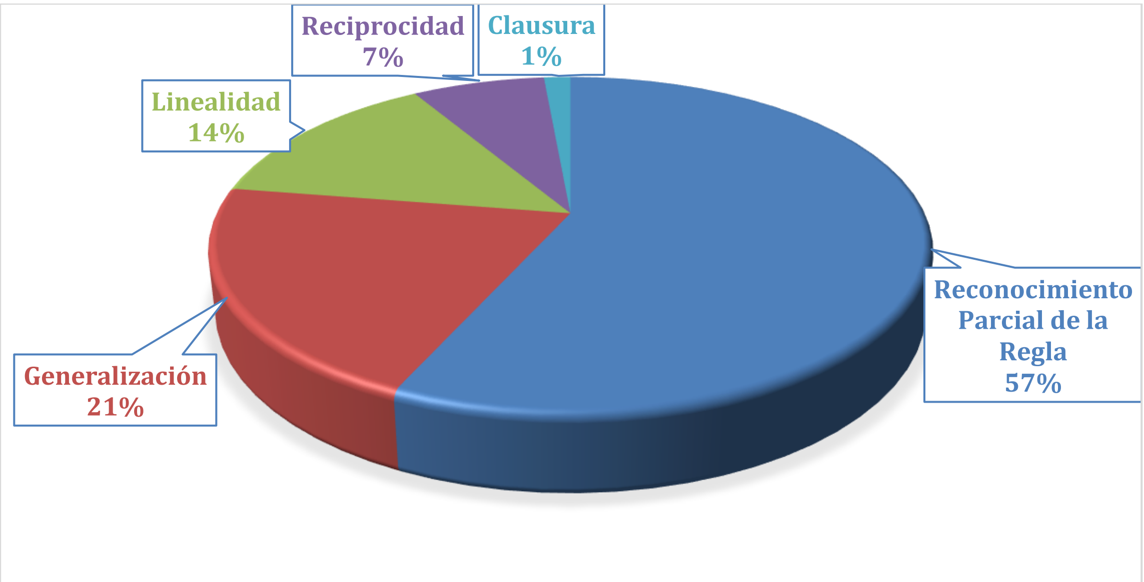


Figura 3. Frecuencia de errores por tipo de técnica de extrapolación.

Como se puede ver en la figura 3, más de la mitad de los estudiantes (57%) manifestaron dificultades para aplicar de manera correcta algunas reglas algebraicas que manifestaban conocían, pero no las recordaban de manera total. Con respecto a las técnicas de extrapolación más comunes la generalización de las propiedades de reglas fue la más empleada con un 21% de respuestas identificadas con esta técnica, enseguida la técnica de extrapolación consistente en la linealización de algunas propiedades de reglas algebraicas se presentó en un 14% de las respuestas. La técnica de extrapolación algebraica menos frecuente, fue la de reciprocidad, algo de esperarse, al utilizarse 1 solo ítem para evaluarse.

Finalmente destacamos, aunque no es objeto de estudio de esta investigación, que se documentó la presencia de errores por falta de aceptación de clausura de la expresión algebraica, es decir que 4 estudiantes entrevistados manifestaron que alguno de los ítems no tenían respuesta por no conocer el valor de las incógnitas, tal como lo menciona en su trabajo Collis (1974).

DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

De acuerdo con el análisis de las respuestas obtenidas en las entrevistas realizadas, consideramos que la mayoría de los estudiantes universitarios participantes en este estudio, a pesar de poseer conocimientos previos de diversos contenidos algebraicos, dichos conocimientos no han sido comprendidos de manera significativa, lo que nos conduce a inferir que durante su formación educativa de secundaria y de bachillerato, el conocimiento y la compresión del álgebra es deficiente y esta carencia les genera obstáculos cognitivos al momento de querer aplicar estos conocimientos en nuevos contextos matemáticos.

Lo anterior se puede deducir, del hecho de que la totalidad de los estudiantes participantes en esta investigación manifestaron como dificultad más frecuente, el recordar de manera parcial las reglas para resolver las tareas algebraicas que se les presentaban, declarando que ya habían visto, la gran mayoría de esas tareas algébricas, en algún momento de su formación académica previa, sin embargo, eran incapaces de recordar de manera total o completa, la regla o procedimiento necesario para la obtención de resultados correctos en sus producciones.

Así mismo, y de acuerdo a los comentarios de los estudiantes en las entrevistas, estos nos revelaron que ellos son conscientes de sus deficiencias, pero que también los docentes, los planes de estudio y los materiales didácticos con los que se trabaja en los niveles educativos anteriores a la universidad, contribuyen en ocasiones, a un aprendizaje poco significativo del álgebra en esos niveles educativos.

Por todo lo anterior, consideramos que las dificultades que les genera a los estudiantes, una mala comprensión de sus conocimientos algebraicos previos, los conducen a emplear las distintas técnicas de extrapolación algebraica, en sus intentos ineficaces de adaptar esos conocimientos a los nuevos contextos que se les presentan, tal como se menciona en el trabajo de Matz (1982).

Por consiguiente, es importante resaltar la importancia de evaluar los conocimientos algebraicos con los que ingresan los estudiantes a la universidad, ya que de esto dependerá en gran medida un buen desempeño académico de ellos en su formación universitaria.

Por otra parte y en la búsqueda de alternativas de solución de esta problemática, nos planteamos la posibilidad de realizar una investigación relacionada con el análisis didáctico de los contenidos de los materiales bibliográficos que emplean los estudiantes en el nivel de bachillerato con el objetivo de identificar las posibles fuentes de las dificultades tratadas en este trabajo.

Así mismo y finalmente, queda abierta también la posibilidad de valorar el conocimiento de los distintos tipos de conocimiento de los profesores de matemáticas en el bachillerato y su posible influencia en el origen de los errores documentados en este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Astolfi, J. P. (1999). *El error, un medio para enseñar*. Sevilla: Diada.

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P

Brown, S., Findley, K., & Montfort, D. (2007). Student Understanding of States of Stress in Mechanics of Materials. *The International Journal on the Biology of Stress*, (August): 1994-2000.

Chi, M. T. H., & Roscoe, R. D. (2002). The process and challenges of conceptual change. In M. Limon & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 3-27). Dordrecht: Kluwer.

Collis, K. F. (1974). Cognitive Development and Mathematics Learning. Paper presented at the Psychology of Mathematics Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College. London.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

De la Torre, S. (2004) *Aprender de los errores. El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación*. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Matz, M. (1982). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In D. Sleeman & J.S. Brown (Eds.), *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 25-50). New York: Academic Press.

Merenluoto, K., &Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: understanding the real numbers. In M. Limon, & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change. Issues in theory and practice* (pp. 233–258). Dordrecht: Kluwer.

Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna. Recuperado 1 de octubre de 2018 de: http://www.cseiio.edu.mx/bibliotecavirtual/Matematicas/Descargar/lenguajealgebraicoenadolescentes.pdf

Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics.*1(1) (July): 16-20.

Rico, L. (1995): “Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas”, cap. 3. pp. 69-108, en Kilpatrik, J.; Gómez, P., y Rico, L.: *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico.

Stavy, R. &Tirosh, D. (2000). *How Students (Mis-) Understand Science and Mathematics: Intuitive Rules*. New York: Teachers College Press.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). *Student’s understanding of the numerical value of fractions: A conceptual change approach*. In L. Verschaffel and S. Vosniadou (Guest Eds).

José García Suárez
Universidad de Guadalajara, México
jose.gsuarez@academicos.udg.mx