Vidal R. y Barra M. (2019). Un modelo para caracterizar la justificación de reglas y algoritmos del ámbito numérico – algebraico en libros de texto. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *2*(2), pp. 33-49

ISSN: 2603-9982

UN MODELO PARA CARACTERIZAR LA JUSTIFICACIÓN DE REGLAS Y ALGORITMOS DEL ÁMBITO NUMÉRICO – ALGEBRAICO EN LIBROS DE TEXTO.

Roberto Vidal, Universidad Alberto Hurtado, Chile.

Marcos Barra, Universidad Alberto Hurtado, Chile.

Resumen

Se presenta un estudio descriptivo - interpretativo centrado en el análisis de libros de texto de mayor uso en Chile en el período 2001 – 2018, en los niveles de enseñanza escolar, que busca identificar y caracterizar la justificación de reglas y algoritmos en el ámbito numérico – algebraico. Para ello, se elaboró un modelo a priori en base a tres dimensiones: el modo de representación (Enactiva – Icónica – Simbólica) que se utiliza, la cantidad de éstas y su posibilidad de generalizar. La aplicación de estas dimensiones a los libros de texto condujo a ajustar el modelo, lo que posibilitó encontrar nuevos tipos de justificación y estudiar sus tendencias, lo que constituye un aporte en los procesos de selección y análisis de actividades para el aula.

Palabras clave: *Justificación matemática, reglas y algoritmos en matemática, libros de texto, representaciones enactivas, icónicas y simbólicas.*

A model to characterize the justification of rules and algorithms of the numerical-algebraic domain in textbooks

Abstract

A descriptive-interpretative study is presented centered on the analysis of textbooks of greater use in Chile in the period 2001 - 2018, in the levels of school education, that seeks to identify and characterize the justification of rules and algorithms in the numerical - algebraic scope. For this purpose, an a priori model was developed based on three dimensions: the mode of representation (Enactive - Iconic - Symbolic) that is used, the quantity of these and their possibility of generalizing. The application of these dimensions to textbooks led to the adjustment of the model, which made it possible to find new types of justification and study their trends, which constitutes a contribution in the selection and analysis processes of classroom activities.

Keywords*: Mathematical justification, rules and algorithms in mathematics, textbooks, enactive, iconic and symbolic representations.*

Recibido: 02/05/2019; Aceptado: 12/09/2019

LA NECESIDAD DE UN MODELO PARA CARACTERIZAR JUSTIFICACIONES PROVISTAS EN LIBROS DE TEXTO.

Resultaría fácil explorar cuáles son los verbos de los tipos de tarea más frecuentes en las aulas de matemática, así como en los manuales escolares que se utilizan en ellas. En esa inspección, “calcular” y “resolver” son verbos que se utilizan ampliamente, dejando en segundo plano las tareas vinculadas a dar una explicación, una argumentación o evidenciar un razonamiento.

Desde la implementación de la última reforma educacional en Chile en 1996, los programas oficiales y toda orientación para la enseñanza puso el foco en el paradigma constructivista. Desde 2001 en adelante, prácticamente toda la enseñanza escolar cuenta con libros de texto y programas de cursos los que especifican con ejemplos las actividades para el desarrollo y evaluación de los contenidos, siendo distribuidos por el Ministerio de Educación a los establecimientos que dependen administrativa y financieramente de esta entidad, los que superan el 90% de la oferta. Entre los años 2011 y 2015, el gobierno invitó a 300 colegios a experimentar con lo que se denominó “el método Singapur”, aportando con los insumos necesarios. Expertos de ese país visitaron en varias oportunidades a Chile, con el propósito de dar a conocer su modelo educativo (especialmente centrado en matemáticas), empleando libros de texto traducidos y ajustados a la realidad chilena, dándole un espacio importante al problema del paso de lo concreto a lo abstracto, por medio de la teoría de Jerome Bruner (1966) sobre los modos de representación del conocimiento, el cual considera que éstas han de ser de tres tipos: Enactivas, Icónicas y Simbólicas.

Respecto de las representaciones enactivas, éstas son las primeras que surgen en la vida de cada persona. Está presente por ejemplo cuando se aprende a sumar mediante la acción concreta de juntar, agregar o avanzar, haciendo referencia al modo de representar eventos pasados mediante respuestas motrices, por tanto está ligada al mundo sensible. De ahí que enactivo se refiera al sujeto que aprende en base a acciones de tipo manipulativa. Algunas de estas acciones pueden ser: cortar, plegar, superponer, vaciar, trasvasijar, mover, etc. También, en lugar de representación enactiva, se le suele llamar representación concreta. Supone la puesta en escena de movimiento y de la experiencia sensorial.

En al caso de las icónicas, también denominadas pictóricas, hacen referencia al modo de representar su conocimiento mediante imágenes, dibujos o esquemas que recuperan sólo los aspectos más relevantes de la experiencia concreta, por medio de una re-creación que contiene las características esenciales. En este sentido, es importante aclarar, que una fotografía o una imagen que recupera todos los detalles, como por ejemplo, la imagen de varios vasos y una botella real en un libro de texto, para justificar el algoritmo de la división por la acción del trasvasije, no cuenta como una justificación icónica, sino enactiva. En cambio, el tachado en una imagen que es de naturaleza estática, sí puede ser considerada un buen ejemplo de justificación para la regla de la cancelación de la suma o de la simplificación de fracciones.

Por último, sobre las representaciones simbólicas éstas hacen referencia al modo de representar el conocimiento haciendo uso de símbolos, que para el caso de la matemática lo constituyen sus notaciones en un lenguaje simbólico universal. Las justificaciones en este modo, tienen un carácter más riguroso, a medida que se adquiere soltura en su trabajo. Las representaciones simbólicas se enmarcan en el ámbito de la abstracción (motivo por el cual algunos autores le denominan representaciones abstractas[1]) y por su naturaleza, garantizan la posibilidad de generalizar reglas, algoritmos y todo tipo de propiedades, incluyendo la explicitación de las condiciones de validez. Para Bruner, este modo

[1] En la versión del enfoque CPA, las siglas corresponden a: Concreto, Pictórico, Abstracto.

constituye la tercera forma de representación a la que se aspira llegar, una vez que se ha propiciado el camino desde lo concreto o enactivo hacia lo abstracto mediado por lo icónico.

En Chile la propuesta de Bruner se hace conocida con la sigla CO-PI-SI, para abreviar las representaciones de tipo concretas, pictóricas y simbólicas, como uno de los pilares fundamentales que explicarían el éxito de Singapur en las pruebas PISA y TIMSS en matemáticas y que para el MINEDUC comportarían una experiencia digna de adoptar.

En este contexto el MINEDUC[2] en sus documentos para la enseñanza, apunta a promover la construcción de ideas abstractas por parte de los estudiantes, por medio de lo que denominan un pensamiento simbólico. Al respecto, señalan que:

"los niños pueden solucionar problemas en distintos niveles de abstracción, transitando en ambos sentidos desde el material concreto a las representaciones simbólicas. Esta es la esencia de COPISI. La manipulación de material concreto y su representación pictórica mediante esquemas simples (cruces, marcas, círculos, cuadraditos, marco de 10, tabla de 100 y recta numérica) permite a los estudiantes desarrollar imágenes mentales. Con el tiempo, prescinden gradualmente de los materiales y representaciones pictóricas, y operan solamente con símbolos". (Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/w3-article-20853.html consultado el 10 de septiembre de 2019).

Como ejemplo de la explicitación de abordar este modelo, el programa de primero medio[3] de 2016, expone:

"En esta propuesta se enfatiza el uso de representaciones, analogías y metáforas para una mayor comprensión. En este sentido, los y las estudiantes pueden resolver problemas en distintos niveles de abstracción, transitando en ambos sentidos desde representaciones reales, concretas, hasta representaciones simbólicas, y viceversa. Esta es la esencia del modelo concreto, pictórico y simbólico". (MINEDUC, 2016, p.45).

Dado el alto interés en la adopción de COPISI, cabe preguntarse por el lugar de la justificación en la actividad matemática que se le demanda realizar a los estudiantes, respecto de las reglas y algoritmos referidos a los números y al álgebra elemental escolar.

Postulamos de este modo, que el acto de justificar una regla o un algoritmo, requiere del uso de representaciones, entendidas éstas según Bruner (1966) como producto final de un sistema de codificaciones y de procesamiento de las experiencias pasadas de quien aprende. La enseñanza de la matemática y en particular vía libros de texto, debiera entonces proveer de estos elementos que puedan hacer recuperar los conocimientos en el momento en que se requieran.

Cabe aclarar lo que aquí entendemos por regla y por algoritmo, para evitar posibles ambiguedades o malinterpretaciones. Siguiendo a la Real Academia Española (2001), una regla es un modo establecido de ejecutar algo, en nuestro caso, un método de hacer una operación matemática. Por ejemplo, si a y b son números enteros y tienen igual signo, su producto es positivo.

En tanto, un algoritmo es una serie finita de reglas en cierto orden predeterminado que tiene como propósito resolver una serie de problemas de un mismo tipo, independiente de los datos (Bouvier y George, 2016). Un ejemplo: Para transformar una fracción impropia a número mixto, primero se divide el numerador por el denominador. El cuociente obtenido indica el número de enteros, dejando el resto como el numerador de la parte fraccionaria cuyo denominador se conserva.

Así, este algoritmo se compone de las siguientes reglas:

---

[2] Es la sigla con que se conoce en Chile al Ministerio de Educación.

[3] Corresponde al primer curso de secundaria en Chile, por lo general, estudiantes de 14 años.

R1. *se divide el numerador por el denominador.*

R2.El cuociente de la división indica el número de enteros y el resto es el numerador de la parte fraccionaria.

R3. se conserva el denominador.

Es común que las reglas y los algoritmos aparezcan impuestos y por tanto carentes de justificación siendo por lo general los modelos docentes tecnicistas (Gascón, 2001) de los profesores que promueven estas formas de tratamiento en las aulas. En un discurso ministerial que orienta hacia el constructivismo y enfatiza para el aprendizaje el tránsito entre representaciones concretas, pictóricas y simbólicas, resulta de real importancia examinar las justificaciones que los libros de texto en este sentido proporcionan.

De esta forma, existen dos posibilidades; el procedimiento se presenta sin justificación y, por tanto, promueve una visión dogmática de la matemática en los estudiantes, o bien por el contrario, en el libro de texto aparece algún intento al menos, de justificar una regla o un algoritmo, permitiendo comprender la construcción de sentido de ese procedimiento.

Es en este último punto donde nos detenemos, puesto que el acto de justificar o mejor dicho aún, dar elementos para que los estudiantes construyan una justificación, da pie a la construcción de sentido de lo que se aprende. Desde esta perspectiva, cuando las justificaciones o las actividades que éstas promuevan pueden ser evidenciadas en los libros de texto, se hace relevante analizar si existen y cómo es el tránsito entre las representaciones en las que se basan las justificaciones, identificando el paso de lo concreto a lo abstracto y cómo estos escenarios son parte de las actividades matemáticas de los manuales escolares.

Estudiar libros de texto con fines de la Didáctica de la Matemática se ha vuelto una necesidad. En varios países con desarrollos importantes en Educación Matemática, el análisis de manuales escolares es visto como una línea de investigación. Para Gómez, Cózar y Miralles (2014), como para Suárez, (2019), los profesores emplean manuales escolares por la seguridad que les transmiten para realizar su docencia, les resulta ser su material predilecto para sus clases, permitiéndoles desarrollar competencias comunicativas, siendo un insumo clave para el cambio del paradigma euclideo (en el que la justificación es impuesta como resultado cristalizado) al de tipo constructivista, en el que juega un rol fundamental para el aprendizaje situado y con sentido construido por los estudiantes.

Por otra parte, varias investigaciones (Torres, 1994, Escolano, 1997, Puelles, 2000; Braga y Belver, 2016), señalan que a pesar de la fuerte entrada de tecnologías informáticas en los últimos años, los libros de texto siguen siendo uno de los protagonistas en el aula escolar, de alta preferencia de uso por parte de los profesores, siendo considerado como manual de la clase propiamente tal, como un dispositivo para desarrollar tareas y actividades propuestas o bien de consulta directa del profesorado para preparar sus lecciones, el cual evidencia el real currículo que es desarrollado en el aula.

En relación al uso de los modos de representación de Bruner en libros de texto, Cárcarmo, Díaz-Levicoy y Ferrada (2018) estudian la enseñanza de las ecuaciones, en las que conviven las representaciones de tipo icónicas y simbólicas, por lo que queda abierta la inquietud de saber si tal uso favorece la realización de generalizaciones y conocer si hay un uso variado y articulado de representaciones que tal como señala Bruner, producen aprendizajes anclados en la experiencia, proporcioándoles mayor solidez.

METODOLOGÍA.

En este estudio se siguió una metodología cualitativa con un diseño descriptivo – interpretativo, compuesta de 3 fases. La primera referida al levantamiento de un modelo de justificaciones sobre reglas y algoritmos del ámbito de los números y del álgebra elemental, que consideró 3 dimensiones:

(R). El modo de representación empleado: Concreto, Pictórico y/o Simbólico en la que se expresa o se pretende que los estudiantes construyan la justificación. Esta dimensión se justifica por el éxito de Singapur en pruebas estandarizadas y comparadas.

(F). El uso de una o más representaciones: Se trata de identificar si la presentación de la regla o algoritmo aparece bajo un único discurso justificativo o con más de uno que refuerza siempre la misma idea. En los casos de una única representación usamos la etiqueta "mono-representacional" para esa dimensión de la justificación y para dos o más discursos con representaciones distintas, utilizamos la denominación "poli-representacional". En este último caso, es de interés ver si hay tránsito entre las representaciones. Esta dimensión (F) permite ver tanto la articulación como el vínculo entre representaciones distintas o si se pone el énfasis en el trabajo mono - representacional.

(G). El alcance de generalización: corresponde a identificar si se trata de una justificación para un caso particular, o bien permite generalizar a otros casos. El acto de generalizar es propio de la representación simbólica, como el caso del álgebra elemental, sin embargo, Warren, Miller y Cooper (2013) muestran que estudiantes de 5 a 9 años llegan a generalizaciones a partir de un cambio de gestos y actos manipulativos (enactivos o concretos) que son desechados cuando reconocen la estructura matemática que sustenta la tarea. En efecto, para Kieran et al (2016), la generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes de la actividad matemática y que tiene un lugar fundamental en la iniciación al álgebra en el aula escolar.

La segunda fase comienza con la selección de una muestra intencionada de 212 libros de texto de matemáticas de mayor uso en Chile entre los años 2001 y 2018, considerando como unidad de análisis un "extracto de discurso", el cual definimos como parte de una o más páginas de un libro de texto que tiene por propósito el aprendizaje de una regla o de un algoritmo matemático específico. Un total de 342 extractos del ámbito numérico – algebraico fueron identificados y sometidos al modelo descrito en la fase 1, empleando el Análisis de Contenido como técnica para examinar tales extractos (Ander-Egg, 1980, Ruiz, 1996).
Una vez recopilados los libros de texto, se procedió a la selección de los contenidos referidos al ámbito de Números y Álgebra[4] bajo el siguiente criterio: Las reglas y algoritmos en los ejes señalados, se utilicen en al menos dos niveles o cursos de la enseñanza primaria y/o secundaria, o bien en al menos dos temas escolares, de modo de asegurar que tales procedimientos sean recurrentes en el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, el algoritmo para calcular el mínimo común múltiplo (mcm) de dos o más números naturales, también aparece en la adición y sustracción de fracciones. De igual modo, la regla conocida como "menos por menos da más", aparece en el octavo grado de la primaria chilena[5]. Sin embargo, en primer y segundo año de secundaria[6] vuelve a aparecer esta regla para ser utilizada en los Números Racionales y posteriormente en los Números Reales. Por el contrario, se optó por dejar

[4] Números y Álgebra son dos de los bloques o ejes del currículo escolar chileno, de un total de 4. Los otros dos son Geometría y Estadística – Probabilidades, (aunque los nombres han cambiado en el tiempo)
[5] Se le llama Educación Básica en Chile. Estudiantes de 13 años, aproximadamente.
[6] Enseñanza Media en Chile. Estudiantes de 14 y 15 años, aproximadamente.

fuera las reglas de divisibilidad, pues éstas en el currículo escolar, sólo aparecen en sexto grado de primaria y no vuelven a ser utilizadas. En la siguiente tabla, se muestran los contenidos seleccionados.

Tabla 1. *Contenidos de números y del álgebra elemental que fueron analizados por extractos.*

Algoritmo de la adición en IN	Potencia de una potencia
Algoritmo de la sustracción en IN	Potencia de exponente cero
Algoritmo de la Multiplicación en IN	Potencia de exponente negativo
Algoritmo de la División de en IN	Proporcionalidad Compuesta
Algoritmo de la multiplicación de fracciones	Adición y Sustracción de fracciones
Método para hallar fracciones equivalentes	Ubicación de fracciones en la recta numérica
Método de resolución de ecuaciones de primer grado	Transformación fracción impropia - Numeral Mixto
Algoritmo de la división de fracciones	Transformación decimal a fracción
Regla de lo signos para la división de enteros	Reducción de términos semejantes
Algoritmo de la división de números decimales	Algoritmo del m.c.m.
Imposibilidad de la división entre cero	Propiedades de los logaritmos
Regla "menos por menos da más"	Multiplicación de decimales
Regla -(a+b)= -a-b (uso de paréntesis)	Propiedades de los radicales
Multiplicación de potencias de igual base	Método de resolución de ecuaciones "irracionales"

La tercera y última fase corresponde al proceso ajuste del modelo fijado a priori, obteniendo las tendencias de los tipos de justificaciones definidos, como así nuevos tipos de justificación, lo que permitió una primera aproximación a una validación interna del modelo. En esta dirección, el propósito no está en la validación cuantitativa, sino en mostrar cómo a partir de los datos, esto es, de la configuración de la realidad vivida, puede construirse un modelo que posteriormente puede ser utilizado con fines inferenciales.

RESULTADOS.

A partir de la fase 1, se levantó un modelo teórico (a priori) para caracterizar las justificaciones que podían producirse por la combinación de las componentes de cada una de las tres dimensiones: Modo de representación empleado (R), el uso de una o más representaciones (F) y el alcance de generalización (G), Como la dimensión (R) tiene 3 posibilidades (concreta, pictórica, simbólica), y las dimensiones (F) y (G) tienen ambas 2 posibilidades cada una (mono-representacional y poli-representacional para (F) - Particular y general para (G)), se obtuvieron 12 tipos de justificación
El modelo a priori, queda conformado como indica la figura 1.

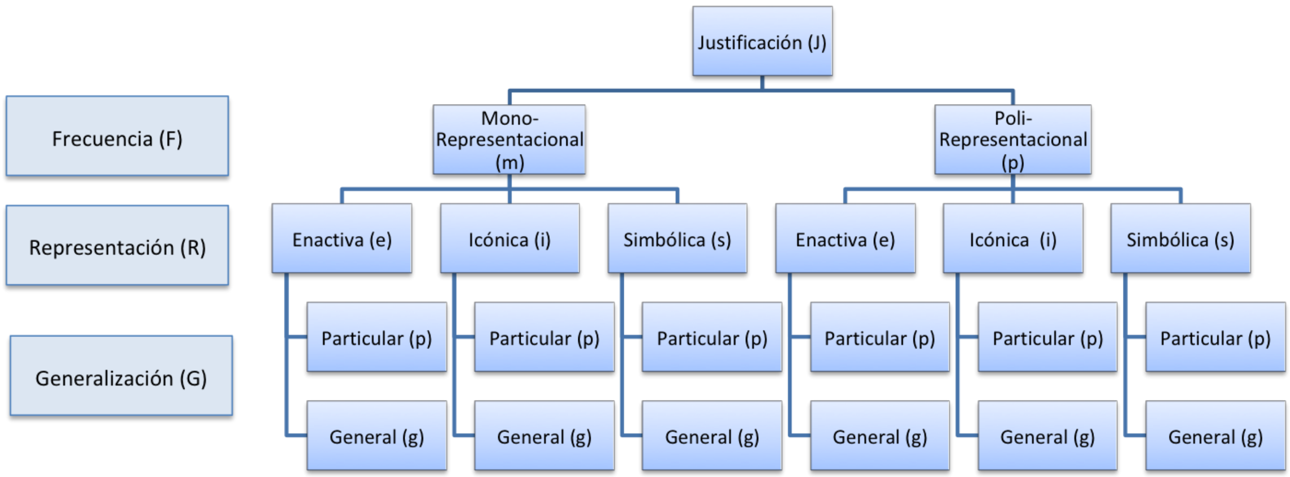


Figura 1. Modelo teórico de justificaciones en base a las dimensiones F, R y G

En la tabla 2, se muestra la codificación de cada tipo de justificación, la que se compone de cuatro caracteres comenzando con J (que señala la existencia de justificación), seguida de las iniciales de los valores de cada dimensión.

Tabla 2. *Denominación, codificación e indicador para el tipo de justificación.*

Tipo de justificación	**Código**	**Indicador**
Mono – Enactiva – Particular	Jmep	Emplea sólo un material concreto para un caso no generalizable
Mono – Enactiva – General	Jmeg	Emplea un material concreto y que permiten la generalización
Mono - Icónica - Particular	Jmip	Emplea una única imagen, esquema o artefacto icónico que no
Mono – Icónica – General	Jmig	Emplea una única imagen que si permite la generalización
Mono – Simbólica – Particular	Jmsp	Emplea una única representación numérica no generalizable
Mono Simbólica General	Jmsg	Emplea una única representación algebraica
Poli – Enactiva - Particular	Jpep	Emplea al menos dos materiales concretos con casos no generalizables
Poli – Enactiva General	Jpeg	Emplea al menos dos materiales concretos con los que se puede evidenciar una generalización.
Poli – Icónica – Particular	Jpip	Emplea al menos dos imágenes, esquemas o artefactos no exhibiendo una generalización
Poli – Icónica – General	Jpig	Emplea al menos dos imágenes, esquemas o artefactos que permiten generalizar
Poli – Simbólica Particular	Jpsp	Emplea al menos dos representaciones numéricas no generalizables
Poli – Simbólica – General	Jpsg	emplea al menos dos representaciones algebraicas

Respecto de los resultados de la fase 2 del estudio, al aplicar el modelo teórico de justificación a los contenidos matemáticos, se constató que el 30% (103 de los 342 extractos), de los algoritmos o reglas no poseen justificación, ni tampoco una instancia para promover su elaboración.

El modelo teórico logró captar 203 extractos de los 239 que presentan algún tipo de justificación, quedando 36 casos fuera. Al respecto, los resultados por tipo de justificación teórica captados por el modelo teórico, se muestran en la siguiente gráfica:

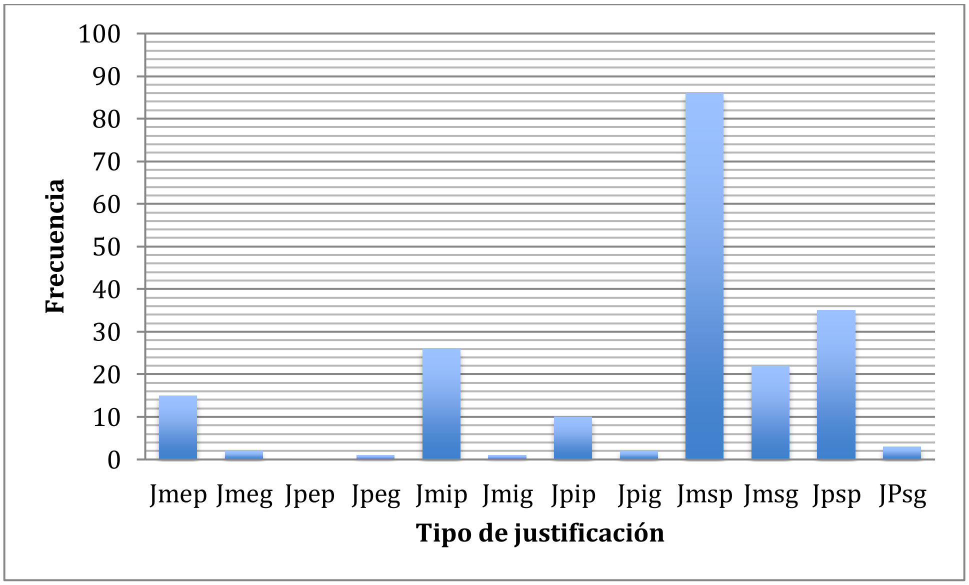


Figura 2. Gráfico de frecuencia de las justificaciones según el modelo teórico.

Analizando las tendencias, el tipo mono – simbólica –particular es el más recurrente con 86 extractos, seguido del poli – simbólico – particular con 35 casos. Luego está la justificación mono – icónica – particular que aparece 26 veces y con 22 casos la de tipo mono – simbólica – general, predominando la representación simbólica. Este resultado vuelve a obtenerse al sumar por tipo de representación utilizada con respecto a los 203 extractos con justificación teórica: 8,3% para la enactiva, 19,2% para la icónica y 72,5% para la de tipo simbólica.

En relación al carácter mono o poli representacional, un 67% de los extractos dan cuenta del primero, mientras que el segundo aparece en un 21,7% de los casos analizados.

Observando la tercera dimensión, sobre el alcance de generalización, un 85% de las justificaciones se hacen de modo particular y sólo el 15% restante explicita o promueve la generalización de la regla o algoritmo.

Por otra parte, ninguno de los extractos presentó el tipo de justificación mono – enactiva – general, sin embargo, sólo se identificó un caso para la justificación poli – enactiva – general, el cual presentamos más adelante.

Resultados respecto del ajuste del modelo en la fase 3:

Respecto de los 36 casos que no se adaptan directamente al modelo teórico de los 12 tipos de justificación, el análisis del contenido permitió caracterizarlos como combinaciones de dos casos teóricos, resultando 7 nuevos tipos de justificación. Un ejemplo de ellos es: Jmep + Jpsp, que en el gráfico siguiente tiene la mayor cantidad de extractos observados.

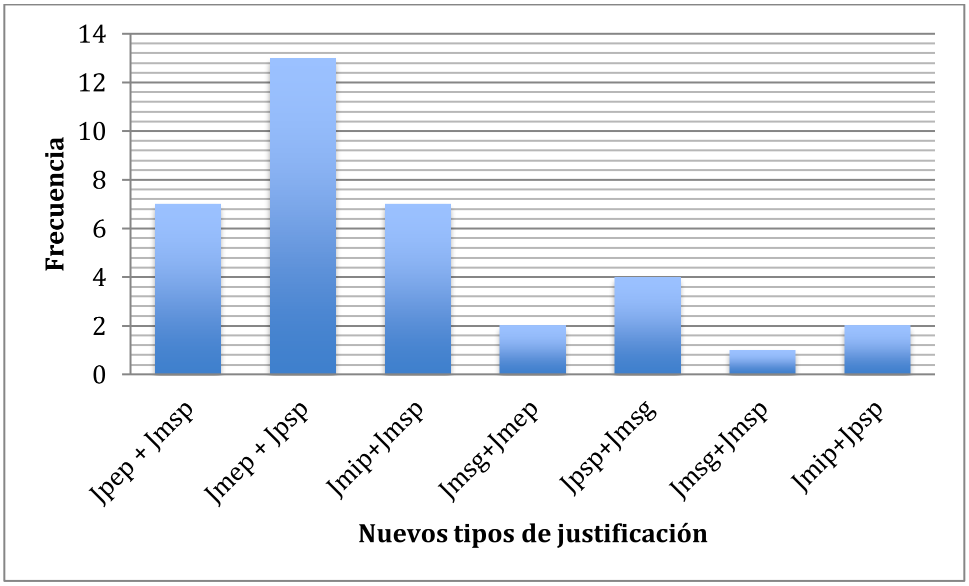


Figura 3. Gráfico de frecuencia de las justificaciones ajustadas al modelo teórico.

A continuación mostramos ejemplos de los diferentes tipos de justificación, partiendo por aquellos que el modelo logró predecir, finalizando con uno de los sietes nuevos casos obtenidos del ajuste.

Ejemplo1. Una justificación del tipo mono- enactiva – particular: Jmep.

En el siguiente extracto, en el cual se pretende mostrar una justificación de por qué $\frac{3}{4}:3=\frac{1}{4}$ (aunque también serviría para mostrar que $\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=3$), aparece una imagen que contiene todos los detalles de la realidad, por lo que puede considerarse como una experiencia motriz, reconociéndola como una justificación en base a una representación enactiva y no icónica, como podría pensarse. La representación que Bruner denomina icónica, corresponde a un estadio superior que se identifica por una imagen que no representa un objeto real, sino sus características más importantes y que permiten evocarlo.

Figura 4. Ejemplo de una justificación tipo Jmep
Fuente: Matemática 6ºbásico. Ed. Zig-Zag (2004)

Es mono-representacional, pues hay ausencia de algún otro tipo de representación, siendo el único ejemplo dado por el libro de texto. En cuanto a su alcance de generalización, ésta es de tipo particular, por las cantidades específicas de frascos como de contenido. Tampoco se aprecia un discurso en el manual escolar, que permita que los estudiantes exploren la generalización del algoritmo que se está tratando respecto de la división de fracciones.

Ejemplo 2: Una justificación del tipo poli- icónica – particular: Jpip.

El procedimiento que aparece en el siguiente extracto, es el de la amplificación de fracciones, para mostrar por qué $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$. En este caso, se utiliza un modelo rectangular que puede recuperar por ejemplo lo esencial de la forma de la superficie de una madera o de una mesa, por lo que a la justificación de este procedimiento se le identifica con base en una representación icónica.

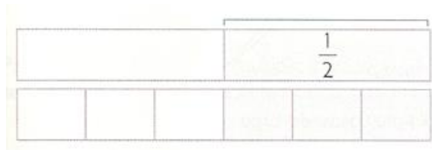


Figura 5. Ejemplo de una justificación tipo Jpip
Fuente: Matemática 5º básico. Ed. McGraw Hill (2003)

Es de tipo poli-representacional, dado que en el libro de texto desde donde se extrae esta imagen, aparecen otras representaciones tanto del mismo tipo, como enactivas (con regletas) y las simbólicas. En cuanto a su alcance de generalización, el trabajo con estas representaciones icónicas sólo resultan ser para casos (fracciones) específicos, por lo que se le asigna la p de particular, al final de su codificación.

Ejemplo 3: Una justificación del tipo poli – simbólica - particular: Jpsp.

En el siguiente extracto, se presenta una justificación del algoritmo de la división de fracciones, en base a la idea abstracta que "dividir es multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor", lo que se desarrolla con lenguaje simbólico matemático:

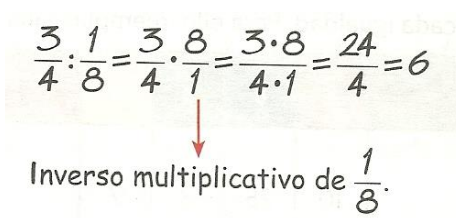


Figura 6. Ejemplo de una justificación tipo Jpsp
Fuente: Matemática 5º básico. Ed. McGraw Hill (2003)

Lo anterior da cuenta de una justificación del tipo Jpsp, de modo que la primera "p" se asigna por ser poli-representacional, es decir, hay al menos dos ejemplos de la división de fracciones que emplea este tipo de representación simbólica y es de tipo particular, pues no se vislumbra el uso de letras o lenguaje algebraico generalizador de este algoritmo.

Ejemplo 4: Una justificación del tipo poli – enactiva - particular: Jpep.

En un libro de texto de octavo grado, encontramos la presentación de dos actividades concretas para justificar la regla de los signos. La primera recurre a la manipulación de tarjetas que deben recortar y confeccionar los estudiantes, con las indicaciones que se explicitan en la figura 7:

¿Cuál es el resultado de la multiplicación –6 • (–3)?

Para representar la multiplicación de números negativos usaremos tarjetas rectangulares, cada una con un 1 escrito en una cara y un –1 escrito en la otra. Además, para usar las tarjetas daremos una regla para la multiplicación por el factor 1 y por el factor –1:

- Si hay que multiplicar por 1 un ordenamiento dado de tarjetas, las tarjetas involucradas permanecen tal y como se encuentran sobre la mesa.
- Si hay que multiplicar por –1 un ordenamiento dado de tarjetas, las tarjetas involucradas se invierten dejando a la vista las caras que estaban ocultas.

Figura 7. Ejemplo de una justificación tipo Jpep
Fuente: Matemática 8º básico, Ed. SM. (2015)

Al haber dos representaciones concretas, se asigna la letra “p” de poli-representacional. Luego, sabemos que es enactiva, pues se debe realizar mediante acciones que implican movimiento (recortar y mover las tarjetas). La última letra de la codificación es la “p” referida a que se trata de un procedimiento para multiplicar de modo específico el entero -6 y el entero -3.

Sin embargo, se deja entrever que el texto podría haber avanzado a la repetición de la actividad para conjeturar una regularidad, lo que sí daría pie con el conjunto de representaciones enactivas a concluir una generalización.

Ejemplo 5: Una justificación del tipo poli – enactiva - general: Jpeg.

Con el mismo propósito, el texto continúa con otra actividad que a través de la manipulación de círculos de cartón propone dar las razones por las cuales $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$.

Comienza dando las instrucciones para confeccionar los discos de cartón de modo que al girar uno de ellos, los otros también giren al estar conectados de forma tangencial, tal como se muestra en la figura 8.

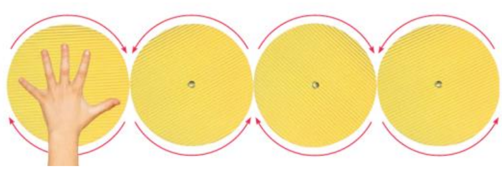


Figura 8. Ejemplo de una justificación tipo Jpeg para $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$.
Fuente: Matemática 8º básico, Ed. SM. (2015)

Resulta interesante observar que esta justificación de por qué el producto de -1 por -1 por -1 es -1, permite lograr una generalización para el caso $(-1)^n$. Si bien este recurso es de tipo enactivo, propicia mediante el apoyo de preguntas que conducen a observar un patrón al variar el número de círculos, la generalización:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & si\ n\ es\ par \\ -1 & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

Por esta razón se le asigna la codificación Jpeg.

Ejemplo 6: Una justificación del tipo mono – simbólica - particular: Jmsp.

En un libro de texto del año 2014, encontramos una única justificación de la regla "menos por menos da más". El contexto que presenta es un juego de 5 etapas entre 4 amigos, cuyos puntajes de ganancia y pérdida se representan con números positivos y negativos, respectivamente tal como se muestra en la figura 9.

	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5
Beatriz	15	15	15	15	15
Cristián	–10	–10	–10	–10	–10
Gonzalo	0	0	0	0	0
Alejandra	–12	–12	–12	–12	–12

Figura 9. Ejemplo de una justificación tipo Jmsp
Fuente: Matemática 8º básico, Ed. Santillana.(2010)

A partir de estos datos, en el libro de texto se hacen diversas preguntas que conllevan a los estudiantes a representar el producto de dos números enteros. Una de las interrogantes es *si Alejandra jugara hasta la tercera etapa, ¿Cuántos puntos dejaría de perder con las dos etapas que no jugó?*.

La respuesta viene dada en la misma página, a modo de ilustrar el razonamiento y la representación simbólica que se utiliza para construir la respuesta.

La expresión que permite determinar cuántos puntos obtuvo Alejandra en las 2 últimas etapas, si en cada una obtuvo (–12) puntos, es: (–12) • 2 = –24 puntos. Entonces, al no jugar las últimas dos etapas dejó de perder 24 puntos. La expresión matemática en este caso, considerando que representaremos con (–2) a las dos etapas que no jugó, es: **(–12) • (–2) = 24.**
Notemos que (–12) • (–2) = 12 • 2 = 24.

Figura 10. Extracto de una justificación del tipo Jmsp
Fuente: Matemática 8º básico, Ed. Santillana.(2010)

Ejemplo 7. Una justificación del tipo mono – simbólica - general: Jmsg.

Otra de las justificaciones de la regla de los signos se apoya en las regularidades numéricas. El efecto de buscar un patrón da paso a considerar este tipo de justificación como la búsqueda de generalización.

- Multiplica los siguientes números por una misma cantidad y observa las **regularidades** que se producen. Puedes utilizar a tu calculadora.

$+5 \bullet 2 = 10$	$+5 \bullet 1 = 5$	$+5 \bullet 0 = 0$	$+5 \bullet -1 = -5$	$+5 \bullet -2 = -10$
$+4 \bullet 2 = 8$	$+4 \bullet 1 = 4$	$+4 \bullet 0 = 0$	$+4 \bullet -1 = -4$	$+4 \bullet -2 = -8$
$+3 \bullet 2 = 6$	$+3 \bullet 1 = 3$	$+3 \bullet 0 = 0$	$+3 \bullet -1 = -3$	$+3 \bullet -2 = -6$
$+2 \bullet 2 = 4$	$+2 \bullet 1 = 2$	$+2 \bullet 0 = 0$	$+2 \bullet -1 = -2$	$+2 \bullet -2 = -4$
$+1 \bullet 2 = 2$	$+1 \bullet 1 = 1$	$+1 \bullet 0 = 0$	$+1 \bullet -1 = -1$	$+1 \bullet -2 = -2$
$0 \bullet 2 = 0$	$0 \bullet 1 = 0$	$0 \bullet 0 = 0$	$0 \bullet -1 = 0$	$0 \bullet -2 = 0$
$-1 \bullet 2 = \boxed{}$	$-1 \bullet 1 = \boxed{}$	$-1 \bullet 0 = \boxed{}$	$-1 \bullet -1 = \boxed{}$	$-1 \bullet -2 = \boxed{}$
$-2 \bullet 2 = \boxed{}$	$-2 \bullet 1 = \boxed{}$	$-2 \bullet 0 = \boxed{}$	$-2 \bullet -1 = \boxed{}$	$-2 \bullet -2 = \boxed{}$
$-3 \bullet 2 = \boxed{}$	$-3 \bullet 1 = \boxed{}$	$-3 \bullet 0 = \boxed{}$	$-3 \bullet -1 = \boxed{}$	$-3 \bullet -2 = \boxed{}$
$-4 \bullet 2 = \boxed{}$	$-4 \bullet 1 = \boxed{}$	$-4 \bullet 0 = \boxed{}$	$-4 \bullet -1 = \boxed{}$	$-4 \bullet -2 = \boxed{}$
$-5 \bullet 2 = \boxed{}$	$-5 \bullet 1 = \boxed{}$	$-5 \bullet 0 = \boxed{}$	$-5 \bullet -1 = \boxed{}$	$-5 \bullet -2 = \boxed{}$

- Al multiplicar dos números enteros del mismo signo, ¿cuál es el signo del producto?

- Al multiplicar dos números enteros de diferente signo, ¿cuál es el signo del producto?

Figura 11. Extracto de una justificación del tipo Jmsp
Fuente: Educación Matemática 8º Ed. básica, Ed. SM.(2006)

Es mono-representacional (no hay otras representaciones del mismo tipo o distintas en el libro de texto) y es simbólica y particular para estos números. Surge otro problema en este caso: podríamos decir que se puede generalizar, pero el problema es que en el libro de texto, no hay preguntas que permitan construir esa generalización.

Ejemplo 8. Una justificación del tipo poli – icónica - general: Jpig.

En relación a la enseñanza de la adición de números enteros, se detectó un extracto único en un libro de texto, el cual contiene una justificación basada en la representación icónica, que tiene el propósito implícito de generalizar, mostrando lo que ocurre cuando se distinguen los 4 casos según las posibles combinaciones de los signos de los números. Para ello, la imagen deja entrever el orden de los valores absolutos de los números implicados, como medida de la longitud de rectángulos de igual altura.

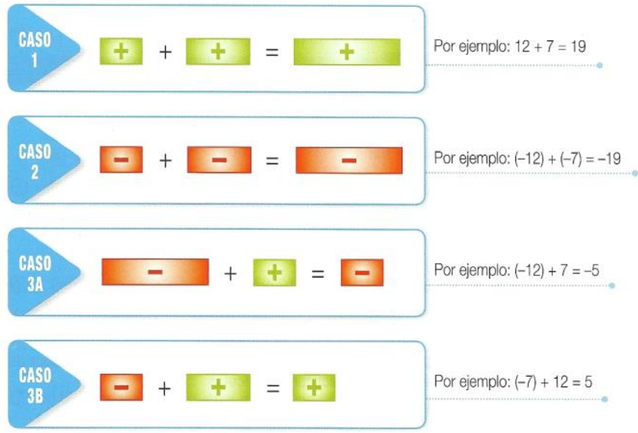
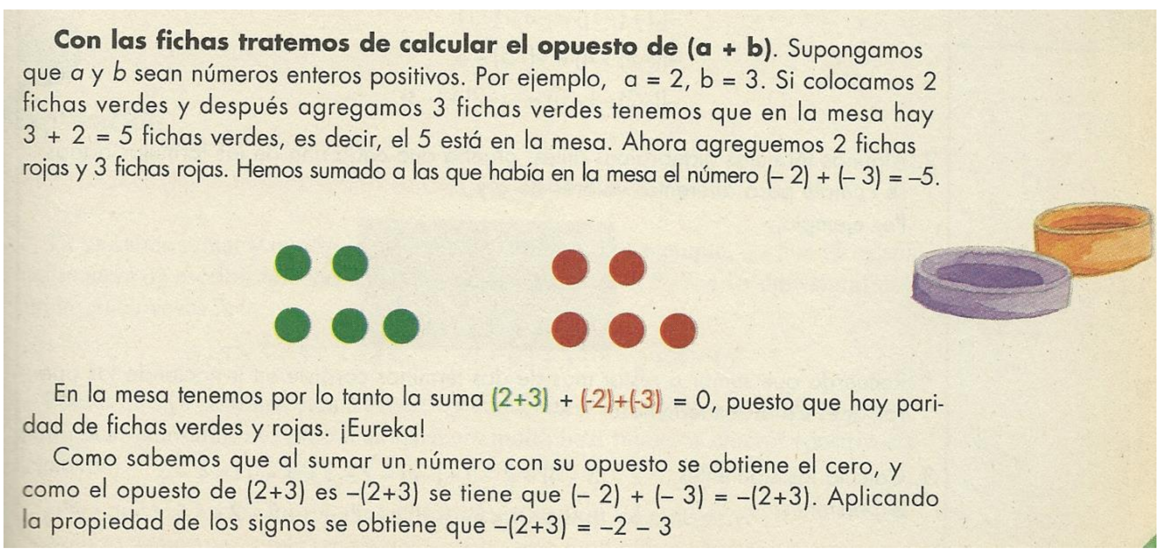


Figura 12. Extracto de una justificación tipo Jpig
Fuente: Matemática 7º Ed. básica, Ed. Pearson.(2012)

Ejemplo 9. Una justificación nueva obtenida de la combinación Jmip + Jmsp

En el siguiente extracto sobre la regla – (a+b) = - a – b, se puede advertir que se utilizan fichas verdes para los números positivos y rojas para los negativos. Con esa premisa, se procede a justificar la propiedad, empleando una mono – representación icónica - particular. Luego, se complementa dicha justificación con la propiedad que indica que la suma de números opuestos es cero, desde la perspectiva de una mono –representación simbólica – particular.



Con las fichas tratemos de calcular el opuesto de (a + b). Supongamos que *a* y *b* sean números enteros positivos. Por ejemplo, a = 2, b = 3. Si colocamos 2 fichas verdes y después agregamos 3 fichas verdes tenemos que en la mesa hay 3 + 2 = 5 fichas verdes, es decir, el 5 está en la mesa. Ahora agreguemos 2 fichas rojas y 3 fichas rojas. Hemos sumado a las que había en la mesa el número (– 2) + (– 3) = –5.

En la mesa tenemos por lo tanto la suma (2+3) + (-2)+(-3) = 0, puesto que hay paridad de fichas verdes y rojas. ¡Eureka!

Como sabemos que al sumar un número con su opuesto se obtiene el cero, y como el opuesto de (2+3) es –(2+3) se tiene que (– 2) + (– 3) = –(2+3). Aplicando la propiedad de los signos se obtiene que –(2+3) = –2 – 3

Figura 13. Extracto de una justificación tipo Jmip + Jmsp
Fuente: Matemática 7º Ed. básica, Ed. Arrayán.(2006)

CONCLUSIONES

Respecto del modelo teórico constituido por 12 tipos de justificaciones, 11 fueron encontradas. La justificación poli – enactiva – particular no se observó en ninguno de los extractos, por lo que se puede conjeturar que por problemas de espacio y diseño del libro de texto o bien por no considerarlo necesario, lo enactivo se desarrolla en los manuales escolares con un único ejemplo concreto cuando se trata de justificar una regla o un algoritmo de modo particular. Esta falla del modelo teórico levanta una nueva interrogante: ¿Se podrá probar que la justificación Jpep es imposible de realizar?. Creemos que no resulta difícil imaginar que Jpep es posible, considerando que la representación enactiva no tiene por qué ser única frente a un caso particular. Pongamos por caso, que en un libro de texto se requiera construir y fundamentar un algoritmo para hacer 3,19 + 2,3. Empleando el ábaco y los bloques de base 10, éstos últimos situados en un tablero posicional, podrían permitirlo, es decir, empleando dos representaciones enactivas (por tanto poli-representacional) para resolver una operación específica. Sin embargo, este tipo de trabajo no está desarrollado en los libros de texto.

De otro lado, podemos ver que el modelo teórico no sugirió la aparición de nuevas formas de justificación, ni que éstas podían descomponerse en dos de las sugeridas a priori. Una nueva aplicación del modelo podrá diferenciarse en este punto, por ejemplo, al aplicarlo a otros libros de texto o bien a otras ramas de la matemática escolar, como en geometría. Es altamente probable, pensamos, que aparezcan otros tipos de justificación o distintos en cantidad y no exactamente 7 como en este estudio. Por tanto, concluimos que nuevas aplicaciones del modelo podrán determinar su validez, la que en nuestro caso piloto puede considerarse alta, ya que logra cubrir sobre el 85% de los casos que equivale a 203 extractos de un total de 239.

Al mismo respecto, un 30% de las reglas y algoritmos de las temáticas seleccionadas no son justificadas, lo que revela una alta tasa (casi un tercio) de conocimientos que no se fundamentan por razones que pueda obedecer a distintas causas, entre otras: las diferencias de cómo se organizan los contenidos científicos versus los del currículo escolar, la epistemología predominante y heredada del programa euclideo, la omisión fundamentada en creencias sobre la enseñanza que apunten a que el acto de justificar es propio de las representaciones de carácter simbólico.

Con respecto al empleo de las representaciones Brunerianas[7], el tránsito de justificaciones teóricas emerge naturalmente cuando se gestan las 7 nuevas justificaciones por combinación de las originadas a priori. Del análisis realizado, se encontraron 36 extractos en los que ese tránsito puede describirse como una conjugación de representaciones, intentando fundamentar una misma regla o un mismo algoritmo. Por esto, creemos necesario promover un escenario de enseñanza vía libros de texto, mediante competencias de comunicación escrita que considere una articulación o un tránsito entre justificaciones.

En cuanto a las tendencias, las justificaciones más habituales en libros de texto se apoyan mayormente en representaciones simbólicas de índole particular, exhibiendo unos pocos ejemplos que no promueven instancias de generalización. Visto de esta manera, los procesos de justificación que se siguen en los manuales escolares, por lo general, tienden a propiciar una forma de trabajo confiado a la validez de un solo caso, lo que es recurrente en el 85% de los casos.

Finalmente, concluimos que este estudio se enmarca en el análisis de libros de texto y nos proponemos investigar los invariantes que deje la aplicación tanto a otros sectores de la matemática escolar

[7] Acuñamos este nombre, para especificar sin lugar a confusión que nos referimos a la teoría de J. Bruner.

(Geometría, Pre - cálculo, Estadística y Probabilidades), como a otras ciencias: física, química y biología, de modo de constituir sus dominios de validez, con zonas comunes y de particularidad.

REFERENCIAS

Ander – Egg, E. (1980). *Técnicas de investigación social*. Buenos Aires: El Cid Editor.

Araneda, J. , Ovalle, X. (2003). *Matemática 5º básico*. Santiago de Chile: McGraw Hill.

Aróstegui (2001). *La investigación histórica: Teoría y método*. Barcelona: Crítica.

Bórquez, E., Darrigrandi, F. y Zañartu, M. (2010). *Matemática 8º Educación Básica*. Santiago de Chile: Santillana.

Bouvier, A. y George, M. (2016). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: AKAL.

Braga, G. , Belver, J.L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación. 27*, 199-218.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Harvard University Press.

Bruner, J. S.(1980). *Investigaciones sobre el desarrollo cognitivo*. Madrid: Pablo del Río.

Bruner, J. S., Goodnaw, J. J. y Austin, G. A. (1978). *El proceso mental en el aprendizaje*. Madrid: Morata.

Bruner, J. S. (1963). *El proceso de la educación*. México: UTEHA

Cárcamo, M. , Díaz – Levicoy, D. y Ferrada, C. (2018). Los ejemplos en la enseñanza de las ecuaciones en libros de texto de educación primaria. *REMAT, 4*, 38-54

Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C. y Rupin, P. (2015). *Matemática 8º Básico*. Santiago de Chile: SM.

Cofré, A. y Russel, A. (2001). *Matemática 7º año básico*, Santiago de Chile: McGraw Hill.

Escolano, A. (1997). *Historia ilustrada del libro escolar en España. Del Antiguo Régimen a la Segunda República.* Madrid: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.

Frías, M. (2004). *Matemática 6ºbásico.* Santiago de Chile: Zig-Zag.

Gascón, J.(2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*, 129-159.

Gómez, C.J, Cózar. R. y Miralles, P. (2014): La enseñanza de la historia y el análisis de libros de texto. Construcción de identidades y desarrollo de competencias, en *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, *29*, 11-25.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., y Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* Cham: Springer.

Martínez, M. y Sandoval, M. (2006). *Educación Matemática 8º Ed. Básica. Proyecto Ecosfera*. Santiago de Chile: SM.

Muñoz, C. y Barriga, P. (2012). *Matemática 7º básico*. Santiago de Chile. Pearson Educación.

Martínez, J. (2008). Los libros de texto como práctica discursiva. *Revista de la asociación de sociología de la educación (RASE), 1*, 62-73.

MINEDUC. (2016). *Matemática Programa de estudio primero medio. Unidad de Currículum y Evaluación.* Santiago de Chile: Ministerio de Educación

Puelles, M. (2000). Los manuales escolares: un nuevo campo de conocimiento. Historia de la Educación. *Revista Interuniversitaria, 19*, 5-12.

Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española* (22.ªed.). Madrid, España.

Resnick y Ford (1990). *La enseñanza de la matemática y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Ruiz, J.L. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Bilbao: Universidad de Deusto.

Suárez, M. (2019). Libro de texto, práctica educativa y competencia comunicativa. *Polyphonía, 3*, 27-45.

Torres, J. (1994). *Globalización e interdisciplinariedad: el curriculum integrado*. Madrid: Morata.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). *Exploring young students'functional thinking. PNA, 7*, 75-84.

Roberto Vidal
Universidad Alberto Hurtado, Chile
rvidal@uahurtado.cl

Marcos Barra
Universidad Alberto Hurtado, Chile
mbarra@uahurtado.cl