Maz-Machado, A., Cuida, A. y Pedrosa-Jesús, C. (2021). Tratamiento de los números negativos en las *Lecciones de Aritmética y de Álgebra Elemental* de Diego Terrero (1894). *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *4*(3), 1-16

ISSN: 2603-9982

TRATAMIENTO DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS EN LAS *LECCIONES DE ARITMÉTICA Y DE ALGEBRA ELEMENTAL* DE DIEGO TERRERO (1894)

Alexander Maz-Machado, Universidad de Córdoba, España

Astrid Cuida, Universidad de Valladolid, España

Cristina Pedrosa-Jesús, Universidad de Córdoba, España

Resumen

Se presenta una breve semblanza biográfica de Diego Terrero y un análisis de una de sus obras. El estudio se ha centrado en la forma en que el autor aborda y presenta los números negativos en un periodo histórico en el que, en Alemania, recién se habían formalizado, y en el que algunos autores españoles de libros de matemáticas de la época aún no habían incorporado este avance epistemológico. Se hallan evidencias de ideas cercanas a las presentes a principios del siglo XIX.

Palabras clave: *Números negativos, libros de texto, matemáticas, historia de la educación matemática, España.*

Treatment of Negative Numbers in Diego Terrero's *Lecciones de Aritmética y de Álgebra Elemental* (1894)

Abstract

This study presents a brief biographical sketch of Diego Terrero and an analysis of one of his works. The study has focused on the way in which the author approaches and presents negative numbers in a historical period in which, in Germany, they had only recently been formalized, and in which some Spanish authors of mathematics books had not yet incorporated this epistemological advance. There is evidence of ideas close to those present at the beginning of the XIX century.

Keywords: *Negative numbers, textbooks, mathematics, history of mathematics education, Spain*

Recibido: 16/11/2021; Aceptado: 13/12/2021

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la historia de las matemáticas pretende indagar y conocer de qué manera han evolucionado los conceptos matemáticos y la forma en que estos se han transmitido a la población en el sistema educativo. El conocimiento del pasado en relación con las matemáticas y los procesos de enseñanza y transmisión de los conocimientos matemáticos brinda al profesorado una comprensión de algunas de las dificultades presentes en las aulas, en la actualidad, porque son similares a las que se dieron para la aceptación, formalización y generalización de ciertos conceptos. Por otra parte, para los investigadores es importante comprender las rupturas epistemológicas que se han dado en aspectos matemáticos y cómo se han planteado estrategias para superarlas y mejorar la transmisión de las matemáticas a la sociedad en cada época.

Para este propósito se analizan planes curriculares, instituciones de educación, libros, métodos de enseñanza, autores de libros de texto y materiales didácticos antiguos, entre otras cosas. A nivel internacional, se tienen muchos ejemplos de investigación sobre la historia de las matemáticas y la educación matemática, abordando aspectos relacionados con la enseñanza de las matemáticas en distintos niveles educativos (Clark, 2012; Fried, 2008; Haverhals y Roscoe, 2010; Puig y Rojano, 2004; Oliveira y Schubring, 2020).

EL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS

Como señalan García y Beas (1995), en toda sociedad es primordial que se transmitan los elementos básicos de su cultura y, en este sentido, los libros de texto son uno de los mayores canales que han contribuido a la difusión de los conocimientos. Por otra parte, en el caso de las matemáticas, en la construcción de conceptos y teorías el lenguaje textual, simbólico y gráfico, adquiere un papel destacado e importante que en ocasiones es particular de esta disciplina, por lo que es de gran importancia el análisis epistemológico de los libros de texto de matemáticas.

El análisis de los libros de texto es útil e importante en educación matemática porque ofrece información sobre los contenidos matemáticos, las técnicas y las tendencias pedagógicas y didácticas que utilizan los autores. Asimismo, reflejan las necesidades de la sociedad del momento que se manifiestan a través de las leyes y orientaciones educativas que los manuales deben seguir. Como registros históricos, "reflejan los hábitos y costumbres, la organización de las ideas, la actividad intelectual, las relaciones publicas de apropiación y exclusión del saber […] las modas y tendencias imperantes de una época" (Maz-Machado y Rico, 2015, p. 51).

Diversos autores han señalado métodos, técnicas y orientaciones sobre qué y cómo investigar en los libros de textos matemáticos antiguos (Maz, 2009; Schubring, 1987). En España el análisis de los libros de texto ha sido una línea prioritaria en la investigación histórica del área (Maz-Machado et al., 2017). Como señala Gómez (2011), el análisis de los libros de texto de matemáticas antiguos permite identificar posibles problemas de investigación en educación matemática. Se han dado consejos e instrucciones sobre cómo realizar una selección adecuada de los manuales para ser objeto de estudio (Picado y Rico, 2011) y se ha ejemplificado, por ejemplo, con estudios sobre los aspectos didácticos presentes en los libros y que los autores han incorporado para mejorar la comprensión de los contenidos por parte de los lectores de la obra (Maz y Rico, 2015).

Una pequeña muestra de este tipo de investigaciones son las realizadas por Madrid et al. (2018), quienes analizaron manuales de matemáticas del siglo XVIII, en España, para caracterizar a los autores atendiendo a su desempeño profesional en la sociedad de la época. De igual forma, se han estudiado las aritméticas impresas en España en el siglo XVI (Madrid et al., 2019).

En ocasiones, el objeto de estudio ha sido un autor de libros de texto y las investigaciones se han orientado hacia el análisis de los libros de matemáticas publicados por autores españoles. Meavilla y Oller (2015) analizaron todas las obras matemáticas del gaditano Antonio Terry y Rivas. León-Mantero et al. (2018) realizaron un estudio sobre las obras matemáticas de Juan Cortázar. El Cordobés Gonzalo Serrano ha sido analizado centrando la atención en su libro de matemáticas (Gutiérrez-Rubio y Madrid, 2018) o en toda su obra (Maz-Machado et al., 2020). Otros autores matemáticos también han sido analizados de manera individual o con el conjunto de toda su obra, entre ellos están José Mariano Vallejo (Maz et al., 2006), Juan Andrés (Madrid et al., 2016), Juan Justo García (2019), Thomas Cerdá (Maz y Rico, 2009) o Juan de Yciar (Maz-Machado et al. 2013)

En relación con temas específicos de matemáticas, Picado et al. (2015) analizaron libros de texto de matemáticas publicados en España, en la segunda mitad del siglo XIX, para conocer el proceso de difusión y enseñanza del sistema métrico decimal en España. Meavilla (2005) analizó los contenidos algebraicos presentes en la obra de Pérez de Moya; también los procesos de extracción de raíces en la obra este autor ha sido estudiado (Meavilla y Oller, 2014). Por otra parte, Sánchez y González (2017) estudiaron la geometría analítica en los manuales de texto españoles publicados durante el siglo XIX. Todas estas investigaciones se han apoyado en el análisis de contenido, centrándose en aspectos históricos, epistemológicos, conceptuales o didácticos.

Históricamente, los números negativos han sido considerados como una fuente de dificultades para los alumnos en distintos niveles educativos (Hefendehl-Heberker, 1991; Cid, 2015). Desde la historia de las matemáticas y la educación matemática, se han realizado algunos estudios sobre este concepto. Todo ello porque, según Schubring (1986), constituyen un ejemplo que ilustra el complejo proceso de desarrollo de los conceptos matemáticos.

Glaeser (1981) realizó una de las investigaciones de mayor trascendencia sobre los números negativos. Analizó el trabajo de destacados matemáticos del pasado (Diofanto, Stevin, Descartes, McLaurin, Euler, D`Alambert Carno, Laplace, Cauchy y Hankel) para identificar las dificultades epistemológicas que fue necesario superar para aceptar los negativos como un conjunto numérico formal en los números enteros. Heeffer (2008) analizó las ideas de número negativo que están presentes en la obra de algunos matemáticos: como menor que nada (Arnauld, Leibniz, Cardano) y mayor que infinito (Wallis, Euler, D`Alambert).

En España, Maz y Rico (2007) analizaron el tipo de situaciones fenomenológicas con las que se asociaban los números negativos en algunos manuales del siglo XVIII y IX. Estos mismos autores (Maz y Rico, 2009) presentan, además, una categorización sobre los fenómenos y las representaciones utilizados para presentar los números negativos en los textos de estos siglos. Señalan que es importante y necesario realizar estudios en más libros de texto de matemáticas publicados en España sobre la presencia y uso de los números negativos. Siguiendo esta línea de investigación, presentamos un análisis de una obra matemática de un autor español del siglo XIX.

OBJETIVOS

O1: Establecer el tratamiento dado a los números negativos en textos publicados en España durante el siglo XIX.

O2: Caracterizar el entorno social, cultural, científico y académico en que se ubican los matemáticos españoles autores de libros de texto en el siglo XIX.

MATERIALES Y MÉTODO

El análisis de contenido en esta investigación se centra en las ideas que se expresan y reflejan en un texto dado, teniendo en cuenta su carácter didáctico, lo que se utiliza en muchos casos como complemento a la investigación histórica.

La elección de la obra a analizar fue intencional porque no se halló ningún estudio especifico sobe ella. Se determinaron tres focos de interés para caracterizar el texto, siguiendo las pautas señaladas por Maz (2005) y utilizadas en diversas investigaciones de tipo histórico epistemológico en educación matemática (Madrid, 2016; León-Mantero et al., 2021). Estos focos fueron:

- Autor: se buscaron datos bibliográficos y se contextualizó el contexto histórico-social y científico.
- Estructura de la obra: fueron identificados y descritos aspectos generales de la obra.
- Contenido sobre los números negativos: se identificaron los temas, usos, problemas, representaciones y demás aspectos relacionados con los negativos.

Para el foco 1, se consultó bibliografía disponible en bibliotecas físicas y virtuales. Para los focos 2 y 3, las unidades de análisis fueron los párrafos que contenían información sobre esto.

Una vez identificados los párrafos, estos se volcaron a una base de datos y se agruparon según los ítems propuestos por Maz (2005), tras lo que se realizó un análisis conceptual descriptivo.

Tabla 1. *Parrilla para la Caracterización del contenido sobre los números negativos. Fuente: Maz, 2005; p. 104.*

Campo	Texto
TSN1 Significado y presentación de los signos + y -	
TSN2 Presentación de las cantidades negativas	
TSN3 Naturaleza de las cantidades negativas	
TSN4 Justificación de la aparición de las cantidades negativas	
TSN5 Cantidades negativas como menores que nada	
TSN6 Ejemplificación de cantidades negativas	
TSN7 Regla de los signos	
TSN8 Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa	
TSN.9 Orden en las cantidades negativas	
TSN10 Operaciones y utilización de las cantidades negativas	
TSN11 Interpretación de los resultados negativos	
TSN12 Utilidad de las cantidades negativas	
TSN13 Otros	

RESULTADOS

Semblanza biográfica de Diego Terrero y Pérez

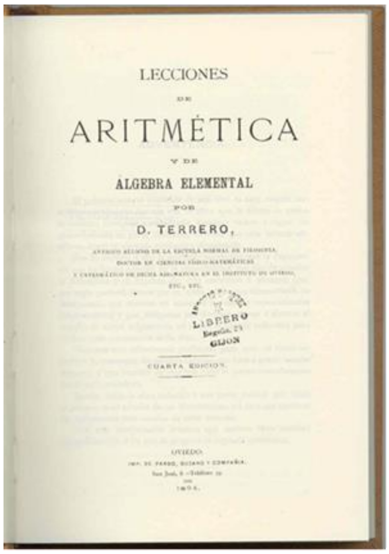
Diego Terrero y Pérez nació en Cádiz, en 1830, y falleció en Oviedo, en 1892. Fue alumno de la Escuela Normal Central, del Seminario Nacional de Maestros, de la Normal de Filosofía. Se doctoró en Ciencias Físico-matemáticas en Oviedo.

Este gaditano fue científico, fotógrafo y poeta (Gracia Noriega, 2001). Fueron famosas sus polémicas humorísticas con Teodoro Cuesta, las cuales se plasmaron en el libro *Andalucía y Asturias* que publicaron juntos (Terrero y Cuesta, 1881). En 1866, al jubilarse Salmeán, director del Observatorio astronómico en la Universidad de Oviedo, Terrero le sucedió en la dirección junto a los catedráticos Ceruelo, Frandes, Méndez, Aparicio y Urios (Canella, 1995).

En 1878, participó en la comisión organizadora que redactó el reglamento de la Escuela Ovetense de Artes y Oficios creada ese mismo año y que comprendía "enseñanzas preparatorias y periciales para carpinteros, albañiles, cantero, obreros industriales hasta maestros de obras y capataces mecánicos" (Canella, 1995; p. 575)

Ejerció como catedrático en el Instituto de Oviedo, del cual fue su director. Este instituto era de carácter privado. Inició, en Oviedo, en 1886, la preparación de alumnos para carreras militares y facultativas. En ese año establece el Colegio Hispano-americano. Fue vicedirector del Instituto Provincial de 2ª Enseñanza de Oviedo que formó parte de la Facultad de Filosofía de la Universidad de Oviedo.

Terrero era el presidente de la sección literaria del Círculo Mercantil e Industrial de Oviedo, que organizaba veladas literarias. Formó parte del claustro extraordinario de la Universidad de Oviedo por Ciencias y fue socio de la Sociedad Económica de Amigos del País de Asturias (S. S., 1880).



En 1885, bajo su dirección, algunos alumnos de 5º B realizaron el plano del Jardín Botánico de Oviedo. En 1860, junto a Salmeán y Mandayo, fueron los primeros en demostrar, en una Universidad Española, el movimiento rotatorio de la tierra por medio del Péndulo de Foucault que instalaron en la capilla de la Universidad (Martínez y Lastra, 1978). Con este experimento, se trataba de proyectar la ciencia a la sociedad en general, puesto que "Para mejor conocimiento de los asistentes se repartió un impreso con todas las necesarias explicaciones, y fue muy notable este suceso, del que se ocuparon con elogio la prensa de la corte y provincias" (Álvarez, 1978, citado por Martínez y Lastra 1978; p. 8).

Durante su vida profesional, fue testigo de los esfuerzos gubernamentales para establecer un ordenamiento jurídico sobre la educación en el territorio español, entre ellos la ley Moyano o el Plan de estudios de 1866 de Orovio.

Terrero publicó las siguientes obras de contenido matemático:

- *Lecciones De Aritmética Para Uso De Los Niños* (1871) (3ª edición)
- *Lecciones De Aritmética* (1880).
- *Lecciones De Álgebra Elemental* (1880).
- *Lecciones y Ejercicios de Geometría Elemental* (1877).
- *Lecciones de Geometría Elemental y de Trigonometría Rectilínea* (1880).
- *Lecciones de Aritmética y de Álgebra* (1894) (4ª edición)

Las *Lecciones de Aritmética y de Álgebra elemental*

Publicada en 1894 en su cuarta edición. Oviedo: Imprenta de Pardo, Gusano y Compañía. El texto consta de 279 páginas, distribuidas en dos partes: lecciones de Aritmética y lecciones de Álgebra; la primera está dividida en 37 lecciones. Inicia definiendo los conceptos básicos: número, cantidad, unidad, etc.; prosigue con la numeración y las operaciones aritméticas; se explican las operaciones con los números primos y los fraccionarios; prosigue con las raíces, potencias, razones y proporciones, logaritmos, variables, limites, regla de tres; hay un apartado de la lección XXVI que se dedica a los números positivos y negativos.

La segunda parte se divide en 24 lecciones. Define el objeto del álgebra, las expresiones algebraicas y las operaciones entre ellas, prosigue con las fracciones algebraicas, raíces y potencias, permutaciones y combinaciones; presenta las ecuaciones y los métodos de solución, incluye problemas de primer grado con una y varias incógnitas.

Un hecho interesante es que Terrero indica que utilizó, para resolver la mayor parte de los ejercicios, un Aritmómetro, que era una calculadora mecánica con la que se podían realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. No indica expresamente en qué autores se basó para escribir el texto, sin embargo, cuando utiliza algunas fórmulas o métodos menciona a sus autores, tal es el caso de Pitágoras, Ougtred, Guy, Briggs, Neper; y cuando hace referencia a las tablas de logaritmos menciona las de: Sánchez Ramos, Vázquez Queipo, Callet y Schroön. Finalmente, menciona un diccionario matemático de Montferrier. Los objetivos de la obra son iniciar a los alumnos en el estudio de las matemáticas y presentar algunas de las aplicaciones más usuales de esta ciencia.

Se dan unas definiciones básicas sobre cantidad: "todo lo que tiene igual y este igual puede determinarse" (p. 9) y número es "la idea que se adquiere de una cantidad al compararla con la unidad" (p. 9). El número entero (natural para nosotros) surge cuando "la cantidad es conmensurable con la unidad elegida" (p. 10). Indica que la cantidad constante es la que siempre es la misma, mientras que la cantidad variable "es la que no es siempre la misma" (p.82); estas aparecen en las ecuaciones, las cuales define así: "ECUACIÓN. Es la unión por medio del signo igual de dos expresiones que no son siempre iguales, por que los son en alguno ó algunos casos" (p. 213); las ecuaciones pueden ser "numéricas y literales" (p. 213). Las cantidades negativas aparecen en dos apartados: en la parte de aritmética (lección XXVI) y en el álgebra (lección I).

El autor afirma que es consciente de que se podrían percibir algunas "lagunas" en el desarrollo de los contenidos pues considera que a duras penas se pueden enseñar estos conocimientos matemáticos a los alumnos, ya que, por su corta edad y carencia de otros conocimientos fundamentales, así como por estudiar otras asignaturas, no comprenderían adecuadamente más matemáticas. Indica que los contenidos se ajustan a los fines de la segunda enseñanza.

Tratamiento dado a los negativos

TSN1: Significado y presentación de los signos + y -.

> "[...] el signo + que se lee más." (p. 15).
>
> "[...] el signo -, que se lee menos" (p. 16).

La presentación que se hace de los signos + y - es sólo de signos abstractos asociados a aumento y disminución.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.

> "Los números afectados del signo más, los llamaremos positivos, y los que lo estén del signo menos, NEGATIVOS.
>
> Cuando un número no lleve expreso su signo, se deberá entender que es positivo" (p. 115).

Indica que los signos más y menos actúan sobre los números y deja de lado a las cantidades. Asimismo, es el signo el que determina la condición del número y su ausencia reafirma el sentido positivo de los números.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.

> "Entre las cantidades que se den para la resolución de un problema, puede haber dos de la misma naturaleza, que tiendan á producir efectos contrarios." (p. 176).

Hallamos dos ideas:

- De forma implícita se indica que las cantidades negativas y positivas tienen igual naturaleza.
- Las cantidades positivas y negativas intervienen en la resolución de problemas y según se utilicen unas u otras sus efectos son diferentes.

TSN4: Justificación de la aparición de las cantidades negativas.

> “Necesario es, para que esta distinta afección ó modo de ser de las cantidades sea tomada en consideración, introducir en el cálculo algo que lo indique, y al efecto vamos á CONVENIR en afectar de un signo las que tengan un modo de existencia, y de otro distinto las que tengan el contrario, siendo el más y el menos los elegidos, á pesar de habernos servido ya, y aún servirnos ahora, para indicar la adición y la sustracción.
>
> Las cantidades que estén afectadas del signo más las llamaremos positivas, y negativas las que lo estén del signo ménos.” (p. 176).

La consideración de cantidades positivas o negativas es tan sólo convencional; la elección de los signos + o - es arbitraria según el modo de existencia de cada cantidad. Se reitera la idea presentada en TSN2 sobre la forma en que los signos que preceden a la cantidad determinan la condición de positiva o negativa.

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.

> “Observamos que, si los puntos M’ y M” están igualmente distantes de A, no hay motivo para decir que la cantidad positiva AM’ es mayor que la negativa AM”, y si el punto móvil estuviese en A, su distancia á este punto sería cero, ó mejor dicho, no abría distancia, siendo por lo tanto un absurdo el admitir que las cantidades negativas son menores que cero, y menores que las positivas. Cero no es cantidad, y por consiguiente no puede compararse con una cantidad, ni ser menor o mayor que ella. Si se admitiera comparación entre las cantidades positivas ó negativas y cero, podríamos asegurar con verdad, que respecto de cero, lo mismo son las unas que las otras.” (p. 177).

P____________________.________.________.________.________.______Q

M” A M’ M

No se considera la “nada”, se aborda la reflexión es sobre el cero. Se indica la imposibilidad de establecer una comparación entre las cantidades positivas y negativas respecto a cero.

TSN6: Ejemplificación de cantidades negativas.

> “Tales son, por ejemplo, el metálico que ingresa en la caja de un comerciante por ventas ó cobro de letras, y el que sale para pago de éstas ó de mercancías la cantidad de agua que echa un caño en el pilón de una fuente, y la que otro arroja fuera del mismo…” (p. 176).

Presenta actividades cotidianas asociadas a situaciones relativas (ingresos, cobros, pagos) para dar ideas y ejemplos de las cantidades negativas. Todas ellas se caracterizan por presentar contextos de oposición o contrarios.

> “Para demostrar las ventajas de la consideración de las cantidades positivas y negativas, y al mismo tiempo, para ver que el CONVENIO para representarlas no se opone á los hechos anteriormente, presentaremos la siguiente cuestión:

P____________________.________.________.________.________.______Q

M” A M’ M

> Sean los puntos fijos A y B en la línea PQ, y un punto móvil que podrá tomar las posiciones M, M’, M”.
>
> Llamando d á la distancia conocida y constante AB, x á la variable desde A al punto móvil, é y á la que hay desde B al mismo punto, tendremos que

para la posición M, AM=AB+BM, ó x=d+y. Iª fórmula;

para la posición M', AM'=AB-BM' ó x=d-y. 2ª fórmula;

para la posición M", AM"=BM"-AB, ó x=y-d. 3ª fórmula.

Considerando las cantidades positivas y negativas, se tendrá que, en la posición M', será y=-BM' y aplicando á este caso la primera fórmula se obtendra

AM'=AB+(-BM')

Ó bien AM'=AB-BM',

Resultado idéntico al que proporciona la segunda fórmula, no considerándolas.

En la tercera posición, x=-AM", y=-BM", y la primera fórmula nos dá

-AM"=AB+(-BM");

-AM"=AB-BM";

ó bien AM"=BM"-AB;

resultado también igual al proporcionado por la tercera, no considerándolas.

Vemos, pues que la consideración de las cantidades positivas y negativas es ventajosa, pues dá más generalidad á las fórmulas haciendo que una sola sirva para los tres casos." (pp. 176-177).

Utiliza una representación geométrica (la recta) en una situación física de desplazamientos para interpretar el sentido de las cantidades positivas y negativas. Explica la conveniencia de la ubicación o determinación de las cantidades negativas en uno u otro extremo de la recta; e incorpora la representación algebraica como complemento a la gráfica para la explicación.

TSN7: Regla de los signos.

"El producto de un número negativo por otro positivo es también negativo, y de un valor absoluto igual al producto de los valores absolutos de los factores.

En efecto: (-3) X 4=-3-3-3-3=-(3X4)=-12.

Del mismo modo, 3 X (-4)=-4-4-4=- (3X4)=-12." (p. 116).

"El producto de dos números negativos es positivo.

Si el producto (-3) X 4=-12, cambiando de signo al factor 4, debe cambiar de signo el producto, según la consecuencia anterior.

Luego (-3) X (-4)=12." (p. 116).

"El producto ó el cociente de dos números del mismo signo es positivo, y el de dos números de signo contrario, es negativo." (p. 116).

En estos párrafos, se enuncia una regla para la multiplicación de números con signo. Justifica el valor positivo o negativo del número resultante por medio del carácter aditivo de una misma cantidad con signo en una multiplicación.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.

"Si de dos sujetos uno debe 2000 duros y otro 7000, decimos que la deuda del primero, es MENOR que la del segundo, ó la de éste MAYOR que el capital del primero; lo mismo que si uno tiene 2000 duros de capital y otro 7000, diremos que el capital del primero es MENOR que el del segundo, ó el de éste MAYOR que el del primero. También podría decirse que la deuda del primero era mayor ó menor que el capital del segundo, pero entonces prescindimos del modo de existencia de estas cantidades y solo atendemos á sus valores absolutos. Según esto,

-2000<-7000, y +2000<+7000

El ejemplo anterior nos enseña que para comparar la magnitud de dos cantidades, es necesario que tengan el mismo modo de existencia, y en este caso aquella que está incluida ó comprendida en la otra, es la que llamaremos menor, y mayor á la que comprende" (p. 177).

Se indica el doble sentido en el que puede considerarse una cantidad; uno relativo, el cual tiene que ver con la situación o contexto en el que se utiliza; el otro, el valor absoluto, se relaciona únicamente con su carácter numérico y sin tener en cuenta la clase de naturaleza, positiva o negativa. En el ejemplo, hay una comparación de orden relativo; esta indica que deber 200 es menor que deber 700, por lo cual se evidencia que, aunque se trata de deudas y es dinero "faltante", se está considerando el valor absoluto de los naturales para estas cantidades.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.

"1º. De dos números positivos, es menor aquel cuyo valor absoluto éste contenido en el otro.

Así, +4<+7, pues +4+3=7

2º. Cero es menor que cualquier número positivo.

Así, 0<+7, pues 0+7=+7

3º. Un número negativo es menor que cero.

Así, -4<0, pues –4+4=0

4º. De dos números negativos es menor el de mayor valor absoluto.

Así, -7<-4, pues –7+3=-4." (p. 177).

Se establecen dos cosas: en primer lugar, un orden entre los números positivos y también entre los números negativos con otros negativos; en segundo término, el orden, tanto para los positivos como para los negativos, se establece respecto al cero, pero no se hace ninguna mención de los positivos en relación con los negativos, o lo contrario.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.

"3ª. La sustracción de un número negativo equivale á la adición de otro positivo de igual valor absoluto." (p. 116).

"10ª. El cociente de dos números negativos es positivo.

11ª. Todos los teoremas demostrados para números positivos serán ciertos para los negativos." (p. 116).

Hay una referencia a la sustracción como un caso particular de la adición. En la primera afirmación, hay una distinción entre el significado del signo menos en operación sustracción y el signo menos de la cantidad negativa. Además, da presunción del cumplimiento de teoremas de números positivos a negativos. Es una referencia primaria al principio de permanencia de las leyes formales que había establecido Hankel (1867).

Los negativos son asumidos y considerados “números”, manifestándose esto de forma reiterada en estos párrafos.

> “Continuando en ambos sentidos la primera de las dos progresiones anteriores, se tendrá:
>
> ÷...-6.-3. 0. 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27….” (p. 117).
>
> “Sea, por ejemplo, el logaritmo enteramente negativo –2,345678.” (p. 132).
>
> “[…] se tendrá 8-5=3, y 5-8=-3” (p. 115).

Las cantidades negativas pueden hacer parte de una progresión o ser un logaritmo. Desde el punto de vista numérico, es posible seguir una secuencia iniciada desde los negativos y proseguirla en los positivos. Esto implica la admisión de la continuidad del sistema numérico de forma independiente a los signos más y menos.

> “En efecto si 5-8=-3, se deberá tener, para conformarse con la definición de la sustracción, 5=8+(-3); y como 5=8+(-3), será 8+(-3)=8-3”. (p. 116).

TSN11: Interpretación de los resultados negativos.

> “[...] Ahora bien: al introducir en el cálculo las cantidades positivas y negativas, damos á las palabras Menor y mayor otra significación distinta de la que hasta aquí han tenido; [...]” (p. 177).

Algebraicamente con los positivos y negativos entran en juego significados diferentes para ciertos términos que se utilizaban en aritmética (mayor y menor), pero que en álgebra se usan bajo otras connotaciones.

> “[...]Es evidente que el que debe 7000 duros, debe 4000; pero el que debe 4000 no debe 7000; lo mismo que el que tiene 7000 duros, tiene 4000; pero el que tiene 4000 no tiene 7000.” (p. 177).

Presenta situaciones con cantidades relativas para mostrar la diferencia de significado en una circunstancia en la que los términos “deber/tener” imprimen distintas características de valor absoluto. Relaciones de inclusión y subconjunto con cantidades negativas están manifiestas en el ejemplo.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.

> “Vemos, pues que la consideración de las cantidades positivas y negativas es ventajosa, pues dá más generalidad á las fórmulas haciendo que una sola sirva para los tres casos.” (p. 177).

La generalidad otorgada por el uso de cantidades positivas o negativas en las fórmulas permite utilizarlas para la solución de un problema determinado según la conveniencia para calculador.

TSN13: Otros.

> “3º. Si la incógnita puede recibir el valor positivo ó negativo que nos dé la fórmula, ni el problema ni la hipótesis serán absurdos, aunque esta última podrá no ser la verdadera. Pero si la incógnita no puede recibir el valor positivo ó negativo que nos dé la fórmula, el problema será absurdo, si la hipótesis es la verdadera, pero si ésta no es la verdadera, el problema no será absurdo.” (p. 232).

Vemos cómo, aunque la respuesta negativa refuta lo absurdo, tanto del problema como de la hipótesis, esta es rechazada y no se acepta como verdadera solución a un problema.

Sin embargo, esta respuesta implica un análisis al tipo de planteamiento realizado, centrando la atención al tratamiento dado a las hipótesis.

Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

Número

Para Terrero, el número surge de comparar la cantidad con la unidad, es "la idea que se adquiere de una cantidad al compararla con la unidad", esta noción de número es de carácter relacional; es otra evidencia en autores españoles de la influencia del concepto de número enunciada por Stevin y Newton (Maz, 2005). Sin embargo, el hecho de condicionar el número a la comparación con una medida, que llama unidad, hace que sea esta medida respecto a la unidad la que constituya el numero; este planteamiento es de corte cartesiano, donde es la medida la condición del número.

Cantidad

El autor define la cantidad como "todo aquello que tiene igual y puede determinarse", de tal forma, la cantidad puede ser comparada con otra de su misma especie. Se aleja de la idea de aumento y disminución postulada por Euler (Maz, 2009); esto permite que puedan ser ordenadas respecto a otras mediante relaciones de comparación y orden. Esta es la misma idea que había planteado Comte (Maz, 2005).

Cantidad positiva y cantidad negativa

Las cantidades negativas tienen una misma naturaleza que las positivas, aunque los efectos que produce su aparición son contrarios, tal como se afirma en TSN3. Se indica que la consideración de positivo o negativo de las cantidades es sólo de forma convencional, así como también lo es la asignación de signos + o – a las cantidades, tal como se deduce de TSN4. La conveniencia del calculador es lo que permite utilizarles de una u otra forma determinada, como se deduce de TSN12; este aspecto de "conveniencia" es destacado en muchos apartados del texto, los cuales hemos recogido en TSN4, TSN6 y TSN12. Se asignan distintos significados para el signo menos. Prueba de ello es que en TSN10 se plantea la distinción entre la sustracción y la cantidad negativa.

En TSN6, vemos unos ejemplos mediante los cuales pretende aclarar la idea de cantidad negativa. Estas son situaciones asociadas a fenómenos físicos reales tales como ingresos de dinero, pagos, flujos y salidas de agua. Más adelante utiliza otra situación para dar ejemplo de lo beneficiosas que son las cantidades negativas, esa situación corresponde a desplazamientos. En este caso hay una representación simbólica y geométrica pues se utiliza una recta en la cual se han señalado puntos que representan ciertas posiciones. Es claramente un ejemplo de una modelización de situaciones reales en la cual se utilizan cantidades negativas.

Terrero en TSN2, TSN7, TSN9 y TSN10 llama "números negativos" a las cantidades precedidas del signo menos. Esta asignación como número, se refleja en TSN11 cuando afirma que las cantidades negativas y positivas llevan a una significación distinta de los términos mayor y menor. En TSN3 se indica que son dos los tipos de cantidades que se dan para la resolución de problemas, las cantidades positivas y negativas. Por tanto, estas surgen como consecuencia de operaciones algebraicas.

Fenomenología/Justificación

La justificación dada por Terrero se basa en la necesidad de considerar las distintas "afecciones" de las cantidades, por lo cual era preciso afectar mediante un signo tales diferencias en las cantidades. Como se infiere de TSN3 estas alteraciones que producen los signos + y – en las cantidades dan origen a las cantidades positivas y negativas,

Como se ha mencionado en TSN6, los ejemplos utilizados son situaciones cotidianas de tipo relativo, asociadas a entornos y acciones físicas tangibles. Las situaciones fenomenológicas a las que recurre el autor para ilustrar a las cantidades tanto positivas como negativas, corresponden a ingresos, retiros, pagos, cobros, flujos, salidas y recorridos. En TSN6, TSN9 y TSN10 se utilizan representaciones numéricas, algebraicas y gráficas para las cantidades negativas.

Uso algebraico

Queda suficientemente ilustrado, en TSN4 y TSN5, que la elección de los signos para las cantidades en una situación determinada es arbitraria, según sea el modo de existencia de tal cantidad; este mismo hecho entra en juego de acuerdo a la conveniencia para que el calculador alcance su propósito.

En TSN10, las cantidades negativas hacen parte de una progresión aritmética, asumiéndose la continuidad del sistema numérico en cero. Las incógnitas de planteadas para resolver un problema determinado pueden adquirir un valor negativo como resultado de las operaciones algebraicas.

CONCLUSIONES

Este estudio ha permitido constatar que Diego Terrero fue una figura importante en el ámbito académico y científico de la sociedad asturiana del siglo XIX. Sus conocimientos matemáticos estaban al mismo nivel que otros autores de libros de matemáticas de la época en España.

El autor se involucró de manera activa en diversos aspectos relacionados con la enseñanza, en particular de las matemáticas, desde distintos frentes: docente, gestor y divulgativo.

Terrero tenía una noción sobre los números negativos similar a la de Juan Cortázar o José Mariano Vallejo. Consideraba que estos números existen como resultado de operaciones y cálculos aritméticos. Esto es llamativo e indica que desconocía la obra de Hankel (1867) en la que formaliza los números negativos mediante el principio de permanencia de las leyes formales.

Consideraba que existía un orden entre las cantidades positivas y negativas, pero que estas no eran comparables entre sí, idea que compartía con autores como Asciclo Fernández Vallín y Bustillo o Joaquín María Fern

REFERENCIAS

Álvarez, L. X. (1978). *La universidad de Asturias.* Salinas, Astrurias: Ayalga Ediciones.

Canella, F. (1995). *Historia de la Universidad de Oviedo y noticicas de los establecimientos de enseñanza de su distrito (Asturias y León).* 3ª edición.Oviedo: Imp. de flórez, Gusano y Cª.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos.* Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza. Zaragoza, España.

Clark, K. M. (2012). History of mathematics: Illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(1), 67-84.

Fried, M. (2008). History of mathematics in mathematics education: A Saussurean perspective. *The Mathematics Enthusiast*, *5*(2), 185-198.

García, J. J. y Beas, M. (1995). Análsis histórico del libro de texto. en Figueres, J. y Beas, M. (Eds.): *Libros de texto y construcción de matemáticas currículares*. (pp. 21- 47). Granada: Proyecto Sur.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA, 5*(2), 49-65.

Gracia-Noriega, J. I. (2001). Entrevistas en la historia: el pintor Tómas García Sampedro. *La Nueva España. Diario Independeinte de Asturias* (6 de agosto de 2001).

Gutiérrez-Rubio, D., y Madrid, M. J. (2018). Geometría Selecta Theorica, y práctica del matemático cordobés Gonzalo Antonio Serrano. *Matemáticas, educación y sociedad*, *1*(1), 32-39.

Hankel, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen zahlen und ihrefuntionen*. Leipzig: Leopold Voss.

Haverhals, N., y Roscoe, M. (2010). The history of mathematics as a pedagogical tool: Teaching the integral of the secant via Mercator's projection. *The Mathematics Enthusiast*, *7*(2), 339-368.

Hefendehl-Heberker, L. (1991). Negative numbers: obstacles in their evolution from intuitivw to intellectual constructos. *For the Learning in Mathematics, 2*(1), 16-31.

Heeffer, A. (2008). Negative numbers as an epistemic difficult concept: Some lessons from history. In *Proceedings of the History and Pedagogy of Mathematics Conference* (pp. 1-13).

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., y Madrid, M. J. (2021). El Tratado de Álgebra elemental de Juan Cortázar: un libro significativo para la enseñanza de las matemáticas en España. *Educatio Siglo XXI*, *39*(1), 235-256.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Madrid, M. J., y Jiménez-Fanjul, N. (2018). Estrategias didácticas en libros de matemáticas españoles del siglo XIX: los tratados elementales de Juan Cortázar. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *52*, 34-45.

Madrid, M. J. (2016). *Los libros de aritmética en España a lo largo del siglo XVI* (Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca).

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., y León-Mantero, C. (2018). Una caracterización de los autores de manuales de matemáticas en España en el siglo XVIII. In *Actas del IV Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática* (pp. 281-291).

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., y López, C. (2016). 500 años de Historia de las Matemáticas: la obra de Juan Andrés. *Suma*, *82*, 51-58.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., López, C., y León-Mantero, C. (2019). Old Arithmetic Books: Mathematics in Spain in the First Half of the Sixteenth Century. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(1), em0553.

Madrid M. J., León-Mantero, C., Gutiérrez-Rubio, D. y Maz-Machado, A. (2019). La enseñanza de las matemáticas en la Universidad de Salamanca en el siglo XVIII: la obra de Juan Justo García. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 627). Valladolid: SEIEM.

Martínez, J. L. y Lastra, C. (1978) *Historia de la enseñanza de las ciencias biológicas en la Universidad de Oviedo (hasta 1968).* Oviedo: Universidad de Oviedo.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Granada: editorial de la Universidad de Granada.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M. González, M. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación matemática XIII* (pp. 5-20). Santander, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Maz, A. y Rico, L. (2007). Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX. *PNA, 1*(3), 113-123.

Maz, A. y Rico, L. (2009). Las Liciones de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758-2008). *Suma* (60), 35-41.

Maz, A. y Rico, L. (2009). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 537-554.

Maz-Machado, A., y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *18*(1), 49-76.

Maz, A., Rico, L. y Torralbo, M. (2006). José Mariano Vallejo y Ortega: Matemático y Político. En Maz, A., Torralbo, M. y Rico, L. (eds.): *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática* (Pp. 11-25). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Maz-Machado, A., López, C. y Sierra, M. (2013). Fenomenología y representaciones en la Arithmetica de Juan de Yciar. En L. Rico L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 77-84). Granda: Editorial Comares.

Maz-Machado, A., Argudo-Osado, C., y Gutiérrez-Rubio, D. (2020). Semblanza de un cordobés del siglo XVIII: Gonzalo Antonio Serrano, médico, astrónomo y matemático. En Maz-Machado, A. y López, C. (Eds.): *Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores* (pp. 181-198). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Maz-Machado, A., Madrid, M. J., León-Mantero, C. y Jiménez-Fanjul, J. (2017). Research trends in the history of mathematics education: the Spanish case. In Patterson, K. (Ed.), *Focus on Mathematics Eduaction Research* (pp. 150-182). Nova.

Meavilla, V. (2005). Historia de la Educación Matemática en España: el contenido algebraico de la Arithmetica practica, y specvlatiua de Juan Pérez de Moya (ca. 1512–1596). *Revista Brasileira de História da matemática, 5*(9), 19-35.

Meavilla, V., y Oller, A. M. (2014). La extracción de raíces en el Tratado de Mathematicas (1573) del bachiller Juan Pérez de Moya. *Revista Épsilon, 31*(88), 71-88.

Meavilla, V. y Oller, A. (2015). Los textos matemáticos de Antonio Terry y Ribas. *Números,* 90, 89-103.

Oliveira, C., y Schubring, G. (2021). Las dobles transmisiones de los libros de Lacroix y Legendre en el siglo XIX: el caso de Colombia y Venezuela. *Matemáticas, educación y Sociedad*, *4*(2), 1-20.

Picado, M., y Rico, L. (2011). La selección de textos en una investigación histórica en Educación Matemática. *Revista Épsilon*, *28*(77), 99-112

Picado, M., Rico, L., y Gómez, B. (2015). Enseñanza de las unidades métricas en España en la segunda mitad del siglo XIX. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 175-196.

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study* (pp. 187-223). Springer, Dordrecht.

S.S. (1879). *Guía civil, militar y eclesiástica del aprovincia de Asturias. 1878-1879.* Oviedo: Imp. de Vallian y Comp.

Sánchez, I. y González, M. T. (2017). La geometría analítica en España durante el siglo XIX: estudio de las soluciones negativas de una ecuación. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 35*(3), 89-106.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathematique des nombres negatifs. *Petit X*, 12, 5-32.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbooks authors. *For the Learning of Mathematics*, *7* (3), 41-51.

Terrero, D. y Cuesta, T. (1881). *Andalucía y Asturías. Polémica en los dialectos andaluz y bable.* Oviedo: Libreria de Juan Martínez.

Alexander Maz-Machado
Universidad de Córdoba, España
ma1mama@uco.es

Astrid Cuida
Universidad de Valladolid, España
acuidag@am.uva.es

Cristina Pedrosa-Jesús
Universidad de Granada, España
crispj1991@gmail.com