



ISSN: 2603-9982

García-Suárez J. y Bolaños-González, H. (2022) Errores algebraicos en las producciones de estudiantes universitarios de Costa Rica y México. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 5(2), 31-45

ERRORES ALGEBRAICOS EN LAS PRODUCCIONES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE COSTA RICA Y MÉXICO

José García-Suarez, Universidad de Guadalajara, México

Helen Bolaños-González, Universidad Nacional, Costa Rica

Resumen

En este trabajo se analizan comparativamente los errores frecuentes que cometen los estudiantes universitarios, al realizar tareas algebraicas. Se aplicó un cuestionario centrado en los niveles de entendimiento del uso de las letras y también se abordó desde los enfoques del álgebra. Este estudio se realiza desde el enfoque cuantitativo con carácter diagnóstico y descriptivo. La muestra está conformada por 54 estudiantes de Costa Rica y México. Como resultado se obtuvo que la mayoría de los estudiantes cometen errores de cálculo o tienen un aprendizaje deficiente, estos recurren a procedimientos aritméticos y se evidencia incapacidad de establecer modelos matemáticos.

Palabras clave: *enfoques del álgebra, uso de las letras, niveles de entendimiento, estudiantes universitarios, errores.*

Algebraic errors in the productions of university students from Costa Rica and Mexico

Abstract

In this work, the frequent errors committed by university students when performing algebraic tasks are comparatively analyzed. A questionnaire focused on the levels of understanding of the use of letters was applied and it was also approached from the algebra approaches. This study is carried out from the quantitative approach with diagnostic and descriptive character. The sample is made up of 54 students from Costa Rica and Mexico. As a result, it was found that most students make calculation errors or have poor learning, they resort to arithmetic procedures and there is evidence of an inability to establish mathematical models.

Keywords: *approaches to algebra, use of letters, levels of understanding, university students, errors.*

INTRODUCCIÓN

En el primer curso universitario los estudiantes exhiben deficiencias significativas en sus producciones de diversas tareas algebraicas (García, 2010; 2016). Desde nuestro punto de vista, algunas de esas dificultades exhibidas como errores, están muy alejadas del nivel educativo donde debieron ser superadas. También cabe señalar que, los alumnos de primer curso universitario ingresan a este nivel con una preparación matemática previa, sin embargo, la realidad muestra que es necesario realizar cursos iniciales de nivelación lo que retrasa el avance en la adquisición de nuevos conocimientos (García, 2016).

Esta educación matemática previa no es en muchas ocasiones, lo suficientemente sólida como para enfrentar situaciones de tareas relacionadas con la aritmética o el álgebra, lo cual se puede suponer que alumnos no tienen conocimientos previos o son escasos, como se documentó en las investigaciones de García (2011), Gamboa, et al (2019), Bolaños y Lupiáñez (2021), donde se concluye que un factor importante que ocasionan los errores algebraicos y aritméticos en los estudiantes universitarios son sus insuficientes conocimientos previos.

Este último punto parece controversial, nos permite conocer la realidad de las aulas en el contexto costarricense, donde se destacan dos estudios realizados en dicha universidad con la población de primer ingreso; Castillo et al (2020) afirman que se ha evidenciado un alto porcentaje de repitencia y deserción por parte de la población estudiantil. Por otra parte, en 2019 estos autores manifiestan que existe un alto porcentaje de estudiantes que ingresa a la Universidad Nacional y que presentan dificultad en los cursos de la Escuela de Matemática presentando errores en operaciones con polinomios, fórmulas notables, leyes de potencias, factorización, entre otros temas (Gamboa, et al, 2019).

En este trabajo se pretende indagar y documentar la posible relación entre los diversos enfoques del álgebra escolar preuniversitaria y los errores que cometen los estudiantes de primer curso a nivel universitario. Aunado a lo anterior, se realiza una comparación en los resultados de ambos contextos, considerando que las poblaciones presentan similitudes en los planes de estudio de educación secundaria y bachillerato en cuanto a la formación algebraica. Para esto se aplicó un instrumento diseñado para identificar el dominio de los diferentes enfoques de álgebra mencionados en el trabajo de Usiskin (1988).

MARCO CONTEXTUAL

En este apartado se abordará elementos generales de las dos instituciones de educación superior partícipes en la investigación. Además, se detallan algunos elementos que permiten comprender el contexto de la población estudiantil que participa en el estudio.

La Universidad Nacional de Costa Rica es una institución pública que atiende a una gran cantidad de población estudiantil. La Escuela de Matemática ofrece los cursos a las diferentes carreras como, por ejemplo, el curso de Matemática General, este es introductorio y requisito para cursos avanzados en el plan de estudios. En este curso se estudian los conceptos fundamentales del álgebra, funciones, ecuaciones y trigonometría (Escuela de Matemática, 2017). Específicamente, para el contexto de este trabajo de investigación se consideró un grupo de estudiantes de la carrera de Licenciatura en Administración.

Respecto al contexto educativo en México, el Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, es una institución educativa que ofrece diversas carreras, en el caso particular de este trabajo se llevó a cabo en las carreras de Ingeniería Mecatrónica

e Ingeniería en Obras y Servicios con los estudiantes inscritos en el curso de Precálculo siendo los temas tratados en dicho curso: Operaciones algebraicas, factorización, fracciones algebraicas, funciones y tópicos de trigonometría.

Al hablar del estudiante universitario de primer ingreso, es necesario conocer acerca de la educación secundaria. Por un lado, los Programas de Estudio de Secundaria de Matemática de Costa Rica refleja en todos los niveles de formación distintas competencias algebraicas que el estudiante debe adquirir (Ministerio de Educación Pública, 2012). Lo cual coincide con el perfil del egreso del nivel educativo medio superior en México, en el Documento Base del Bachillerato General (Secretaría de Educación Pública, 2018), menciona que un egresado del bachillerato debe desarrollar competencias que permitan la aplicación de procedimientos aritméticos y algebraicos para construir e interpretar modelos matemáticos, resolver problemas, entre otros. Lo anterior permite suponer que el estudiante que ingresa a la universidad posee las bases que le permitirán desenvolverse en los cursos introductorios del área de matemática.

Por lo anteriormente expuesto, se considera que los egresados del bachillerato si cuentan con las competencias algebraicas, por lo cual deberían superar con pocas dificultades los ejercicios algebraicos que se les presentaron en el instrumento de aplicado en esta investigación.

Además, es importante mencionar que la población participante en el presente estudio, son estudiantes de los cursos: matemática general y precálculo en el contexto costarricense y mexicano respectivamente, dichos cursos son equiparables en cuanto a objetivos y contenidos.

MARCO TEÓRICO

De acuerdo con García (2016), desde la formación educativa inicial hasta la universidad, los estudiantes aprenden conceptos y principios matemáticos abstractos, además de los procedimientos para desarrollarlos, sin embargo, hay muchos estudiantes que tienen dificultades para comprender los conceptos y principios que dan soporte a los procedimientos y, en consecuencia, obtienen conceptos y principios que no corresponden a los procedimientos; por consiguiente, son éstos los estudiantes que emplean procedimientos errados y por lo tanto estos procedimientos generan patrones sistemáticos de errores que arrastran durante su formación en los distintos niveles educativos.

Sin embargo, cometer errores y aprender cómo identificarlos para corregirlos es una parte importante en el aprendizaje del estudiante; de allí que distintos investigadores enfoquen sus trabajos hacia el estudio de los errores que cometen los estudiantes de matemáticas, con la intención de identificar el origen de estos errores y ayudar a los estudiantes en su corrección (Bachor, 1979).

Específicamente, en el caso de la identificación de las fuentes de los errores, numerosos investigadores se han centrado en establecer cuáles son las fuentes de errores que sirvan para dar explicación de los diversos errores sistemáticos de los estudiantes, tal es el caso de Kieran (1992), Chi y Roscoe (2002), Mason (2002), Brown, et al (2007) quienes identificaron a los conocimientos previos de los alumnos como fuente de errores; en cambio para Fischbein (1987), Stavy y Tirosh (2000) las creencias intuitivas estaban en el origen de estos; otros investigadores como, Matz (1982), Ashlock (2002), Vosniadou y Verschaffel (2004), atribuyen al empleo inadecuado procedimientos específicos la causa de los mismos. Consideramos también la teoría de buggy algorithms desarrollada por diversos investigadores como VanLehn (1980), Resnick y Omanson (1987), con la

cual trataban de desentrañar las causas de los errores. Esta última teoría está complementada con la diferenciación que hacen del conocimiento conceptual y procedimental en sus estudios Hiebert y Lefevre (1986) y Silver (1986). Más recientemente algunos autores han sugerido taxonomías propias pero basadas en las clasificaciones comentadas previamente, tal es el caso de Abrate, et al (2006), Saucedo (2007), Garcia (2010), Dodera, et al (2014), Brodie (2014) y Barrón, et al (2016).

Ante la diversidad de teorías existentes para la explicación de las fuentes de los errores en los que incurren los estudiantes al resolver tareas algebraicas, tomamos en cuenta la importancia que tienen los conocimientos matemáticos de los estudiantes en su primer curso universitario para poder determinar así, cómo influyen éstos en sus producciones algebraicas.

Bajo este orden de ideas, consideramos conveniente resaltar la relevancia que tiene la enseñanza de los distintos usos de la variable en los diferentes programas curriculares de la secundaria y bachillerato, en los cuales se plantean como objetivos el desarrollar habilidades en los estudiantes que les permitan identificar de manera adecuada los distintos usos de la variable, es esencial tomar en cuenta el papel multifacético que juega la variable en distintos contextos, como incógnita, número general, relación funcional o parámetro.

Así pues, concordamos con las investigaciones realizadas con estudiantes universitarios que llevaron a cabo Trigueros y Ursini a lo largo de 1996 y hasta 1998, quienes durante ese periodo observaron que el aprendizaje del concepto de variable durante los años de secundaria y bachillerato es poco significativo y encontraron que los estudiantes, sólo alcanzaron un nivel elemental en el manejo de la variable como incógnita específica, como número general y en relación funcional, recurriendo de manera frecuente a sus conocimientos previos aritméticos para resolver las nuevas situaciones que se les planteaban.

Por lo anteriormente expuesto, adoptamos como marco teórico de este trabajo, las consideraciones de Usiskin (1988), quien pone de manifiesto cuatro usos diferentes en la variable y los asocia a cuatro distintas concepciones del álgebra, haciendo énfasis en la relación de éstas con los propósitos de la enseñanza del álgebra elemental. Dichos usos aparecen en la tabla 1.

Tabla 1. *Concepciones del álgebra*

Concepciones del Álgebra	Ejemplo de aplicación
Aritmética generalizada	$3+5.7=5.7+3$, que se generaliza como $a+b=b+a$
Procedimientos para resolver problemas	Cuando se suma tres a cinco veces cierto número el resultado es 40. "Cuál es el número"
Estudio de relaciones entre cantidades	"¿Qué le sucede al valor $\frac{1}{x}$ cuando x se hace más grande?"
Estudio de estructuras	Factorizar $3x^2 - 4ax + 136a^2$

Aunado a lo anterior, Godino y Font (2003) mencionan que,

Las variables son uno de los instrumentos más poderosos para expresar las regularidades que se encuentran en matemáticas. El principal interés del uso de letras (variables) en matemáticas es que permiten expresar relaciones generales entre los objetos de una manera eficaz (p. 789).

También Küchemann (1980) identifica seis formas de interpretar los símbolos literales.

- Letra evaluada, se entiende cómo a la letra se le asigna un valor numérico.
- Letra ignorada, es la letra no utilizada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado.
- Letra como objeto, se considera la letra cómo una abreviación del nombre de un objeto o cómo a un objeto en sí.
- Letra como incógnita específica, representando un número particular pero desconocido y los estudiantes son capaces de operar directamente sobre ella.
- Letra como número generalizado, la letra puede asumir distintos valores.
- Letra como variable, representa un rango de valores no especificados, mediante una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

En el estudio de Küchemann (1980) se logra identificar estos usos de letras y los caracteriza en cuatro niveles de entendimiento de los estudiantes con relación al significado y uso de las mismas.

- Nivel 1: En el primer nivel se resuelven tareas numéricas o que tiene una estructura algebraica simple, por ejemplo, sustituciones numéricas directas en expresiones algebraicas en donde las letras no tiene coeficiente, multiplicación de datos numéricos, simplificación de términos semejantes que involucran una sola letra como incógnita. Los estudiantes en este nivel deben ser capaces de resolver el ítem mediante el uso de letra cómo objeto o sin hacer uso de la letra.
- Nivel 2: Este nivel es muy similar al anterior, la diferencia es que son tareas un poco más complejas, con una estructura aritmética mayor. En este nivel existe una mayor disposición para aceptar respuestas incompletas o ambiguas. Los 15 estudiantes podrían resolver las tareas mediante el uso de las letras como letra evaluada, letra como objeto y letra ignorada.
- Nivel 3: En este nivel las tareas presentan una estructura algebraica simple. El estudiante debe ser capaz de resolver tareas mediante la interpretación de las letras como incógnitas de valor específico, números generalizados y variables.
- Nivel 4: Las tareas de este nivel son más abstractas y tienen una estructura compleja. Los estudiantes requieren como mínimo que las letras sean consideradas como incógnitas específicas, pero donde hay una tendencia a tratar las letras como objetos. El estudiante debe ser capaz de distinguir que las letras no son etiquetas de las características propias de los objetos y argumentar que la expresión formulada puede representar distintos valores. Además, debe poder expresar y justificar la respuesta de manera generalizada y no limitarse a la evaluación de sólo algunos valores numéricos que satisfagan la expresión.

El presente trabajo, se apoya en lo expuesto por Usiskin (1988), quien pone de manifiesto cuatro usos diferentes en la variable y los asocia a cuatro distintas concepciones del álgebra, y Küchemann (1980), quién identifica los usos de letras y los caracteriza en cuatro niveles de entendimiento.

METODOLOGÍA

Este trabajo tiene como objetivo general analizar comparativamente los errores frecuentes que cometen los estudiantes universitarios, en Costa Rica y México, al realizar algunas

tareas algebraicas. La investigación se aborda desde el enfoque cuantitativo con carácter diagnóstico y descriptivo. Lo cual nos permite recoger los datos a partir de la aplicación de un cuestionario con el propósito de conocer el rendimiento académico en álgebra y detectar el error algebraico en las producciones de los estudiantes de Costa Rica y México.

Muestra

La población participante se conformó por 24 estudiantes de Costa Rica y 30 estudiantes de México, ambas poblaciones matriculadas en cursos iniciales de matemáticas a nivel universitario y las cuales estaban bajo tutela de los profesores participantes de este trabajo de investigación, por lo tanto se trata de una muestra de carácter circunstancial. Dichos cursos se impartían en la modalidad de presencialidad remota a causa del COVID-19.

En el caso de Costa Rica, 20 estudiantes provienen de colegios públicos y 4 de colegios privados, esta población son estudiantes de la carrera de Licenciatura en Administración en Universidad Nacional de Costa Rica, con un grado de repitencia del curso significativo; un 75% lo han repetido dos o más veces.

En el contexto de México la prueba fue aplicada a 30 estudiantes de las diferentes carreras de ingeniería del Centro Universitario de la Costa Sur, dichos estudiantes pertenecían a las carreras de Ingeniería Mecatrónica e Ingeniería en Obras y Servicios y estaban inscritos en el curso de Precálculo.

Instrumento de recogida de datos

Para la realización de este análisis se diseñó una prueba escrita que consta de 9 ejercicios, algunos de estos ejercicios se subdividen en ítems, en total se cuentan con 12 ítems que tratan contenidos algebraicos, estos fueron seleccionados de los trabajos de investigación de Küchemann (1980), Matz (1980) y Townsen (2005) cuyos ítems fueron validados por la comunidad de investigadores de educación matemática al ser publicados en revistas especializadas de dicha área. Además, se deseaba realizar un contraste de los errores obtenidos en las producciones de los estudiantes a partir de los niveles de entendimiento descritos por Küchemann (1980). En la tabla 2 se describen de manera general los contenidos del instrumento aplicado.

Tabla 2. Descripción de los ejercicios del instrumento

	Descripción del ejercicio	Constructo/ Enfoque que evalúa
1	Enunciado que inducía a la generalización de la aritmética	Álgebra una generalización de la aritmética
2	Una figura geométrica que estimulaba a plantear una expresión algebraica que inducía a la generalización del resultado	Álgebra para la obtención de patrones generalizadores
3	Un problema que inducía a la obtención de un patrón generalizador del resultado	Álgebra para la obtención de patrones generalizadores
4	Un problema de análisis de la relación entre las variables	Álgebra como el estudio de las funciones
5	Un problema de análisis de la relación entre las variables	Álgebra como el estudio de las funciones
6	Desarrollo de un producto notable	Álgebra para la manipulación de estructuras algebraicas
7	Resolución de un producto algebraico sin coeficientes numéricos	Álgebra para la manipulación de estructuras algebraicas
8	Demostración de propiedades de radicales	Álgebra para la manipulación de estructuras algebraicas
9	Resolución de ecuaciones lineales	Álgebra para la resolución de ecuaciones

Recolección de datos

Para la recolección de los datos se dispone un instrumento creado de acuerdo a los propósitos de la investigación, el cual se describió en el apartado anterior, el mismo fue aplicado en los meses de octubre a noviembre del 2020, por medio de imágenes o en formato PDF, el docente envía dicho instrumento solicitando al estudiante la solución de cada ítem con el procedimiento respectivo dando un tiempo prudencial de alrededor de ocho días para su solución, cada estudiante sube su solucionario a la plataforma que el docente ha indicado. Es relevante considerar que se ha aplicado en las últimas semanas lectivas, por lo cual el estudiante ha asumido el compromiso de realizarlo de forma responsable y subirlo en el tiempo asignado.

La forma en que se ha recolectado la información se ha planteado como respuesta a la situación por el COVID-19, sin embargo, se ha transmitido al estudiante el propósito de investigación y la importancia de responder de forma individual sin uso de la calculadora, evidenciando el procedimiento escrito en el solucionario por parte de cada estudiante, de esta manera se logra los insumos necesarios para realizar el análisis de datos durante el 2021 a partir de la aplicación de dicho instrumento.

Ambas pruebas fueron aplicadas por los investigadores a cargo de este trabajo, cada investigador en su propio país.

Limitaciones de la investigación

El tamaño de muestra es pequeño, por lo que no se pueden generalizar los resultados. La selección de la muestra responde a varios factores como la pandemia por COVID-19, esto no permitió agrandar dicha muestra ya que las clases se realizaban de manera virtual, y fue difícil obtener una mayor cantidad de datos.

Otra de las limitaciones fue el tiempo disponible para la recolección de los datos, esta fue al cierre del ciclo lectivo en dichas instituciones y fue necesario establecer fecha límite para este proceso ya que no se podía alargar el periodo lectivo y era importante realizarlo al final del curso para lograr evaluar las competencias adquiridas durante el curso lectivo y los conocimientos previos.

Los datos recolectados fueron de forma virtual, en formato pdf o imágenes que en algunos casos no eran imágenes de calidad, algunas movidas, mal enfocadas, con poco procedimiento, sin embargo se lograba observar lo que se quería, la respuesta que el estudiante planteaba en cada ítem. Se debe resaltar que muchos estudiantes tenían limitación con los recursos tecnológicos, con el acceso a internet lo que dificulta poder subir un documento con varias imágenes o no contaban con un dispositivo que logrará enfocar bien la imagen, situaciones fuera del control de los investigadores.

Además, se pudo observar que no todos los estudiantes subieron a tiempo el instrumento con las respuestas, esto pues al inicio se consideró una mayor participación. Es importante recordar que el alumno debía completar o responder cada ítem y tomar fotos o escanear sus respuestas y subirlo, lo que conlleva compromiso y responsabilidad de parte del estudiante.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

La información recolectada en la aplicación del instrumento se codificó y se organizó de manera sistemática en una base de datos, obteniendo algunos resultados interesantes que se expondrán a continuación.

Para dicho análisis se apoya en lo expuesto por Usiskin (1988) y Küchemann (1980), permitiendo analizar los errores algebraicos en las producciones de los estudiantes según los niveles de entendimiento y según los enfoques del álgebra.

Análisis según los niveles de entendimientos en el uso de las tareas

Respecto a los niveles de entendimiento de las letras se obtuvo que hay un porcentaje mayor de estudiantes mexicanos que de costarricenses en el nivel más alto de entendimiento; en este nivel el estudiante debe ser capaz de identificar las relaciones existentes entre las variables que son representadas con letras, así como números con valores generalizados. Por lo anterior, al ser estudiantes universitarios se esperaba que la mayoría se ubicara en este nivel.

De acuerdo a la tabla 3 se puede evidenciar que la mayoría de los estudiantes participantes se ubican en el nivel III de entendimiento.

Tabla 3. *Cantidad de estudiantes por nivel de entendimiento según país*

	Cantidad de estudiantes	
	<i>Costa Rica</i>	<i>México</i>
Nivel I	0	0
Nivel II	4	6
Nivel III	12	12
Nivel IV	8	12
Total	24	30

Es importante destacar que ningún estudiante se ubicó en el I nivel de entendimiento del uso de las letras (el más bajo nivel), esto puede responder a que el instrumento se aplicó en las últimas clases del ciclo escolar, cuando ya se habían repasado todos contenidos del curso introductorio de matemática en ambos contextos.

En la revisión de los ítems del instrumento se ha evidenciado errores por descuido, errores de cálculo, errores en la aplicación de propiedades, entre otros. A continuación, vamos a ejemplificar los más relevantes. En la tabla 4 se muestran los ítems con mayor error, se eligieron los dos más significativos en cada población.

Tabla 4. *Los ítems con porcentajes de error más altos*

	Costa Rica	México
Ítem 3C	54.17	50.00
Ítem 8	54.17	26.67
Ítem 3B	33.33	36.67


Se debe destacar que, en el caso de Costa Rica, los ítems 2 y 5 también obtienen el mismo porcentaje de error que el ítem 3B. Por contraparte, el ítem 8 ocupa un tercer lugar en el contexto de México con un porcentaje mucho menor que Costa Rica.

Según la tabla anterior, los ítems de mayor dificultad para la población mexicana son el ítem 3C y ítem 3B, el primero de ellos coincide con la población costarricense, sin embargo, el segundo ítem de mayor dificultad para la población costarricense fue el ítem 8. A continuación se describirán dichos ítems.

En el ejercicio 3, el estudiante debe resolver tres partes, la primera de ellas el estudiante debe ser capaz de comprender el álgebra como un patrón generalizado a partir de la información del enunciado, luego en el ítem 3b se le pide generalizar la respuesta a un caso específico y finalmente en el ítem 3c debe ser capaz de plantear una expresión algebraica que indujera a un resultado generalizado.

Los resultados del ítem 3b ubicado en el nivel II de entendimiento, arrojan que el porcentaje de error en Costa Rica es menor al contexto de México como se evidencia en la tabla IV. En la figura 1 se muestra un caso donde el estudiante tiene dificultad para poder generalizar la respuesta, lo que le impide resolver el ítem 3c (figura 2), aunque sí logra con facilidad la primera parte de este ítem con apoyo de procedimientos aritméticos.

3. En la sala hay siete asientos en la primera fila. El aumento en el número de asientos es la misma, de fila en fila. A continuación, se muestra un diagrama de las tres filas en el teatro.



Asientos del teatro

a) ¿Cuántos asientos hay en la fila 4ª del teatro?

- 1) 14 _____
- 2) 15 _____
- 3) 16 _____
- 4) 17 _____
- 5) 20 _____
- 6) Otro respuesta (explicar) _____

b) ¿Cuántos asientos hay en la fila de 138 de teatro? Explicar cómo se determina esto.

- 1) 145 _____
- 2) 966 _____
- 3) 421 _____
- 4) 418 _____
- 5) 1050 _____
- 6) Otro respuesta (explicar) _____

$7 + 3 \cdot 138 =$

Figura 1: Ejemplo de error en el ítem 3B

En el ítem 3c, ubicado en el último nivel de entendimiento se obtiene un porcentaje de error en Costa Rica mayor en comparación que en México, siendo el ítem con mayor error en ambos contextos. A continuación, se muestra el caso donde el estudiante intenta establecer una fórmula que le genere la cantidad de asientos, se evidencia que es incapaz de generar un modelo matemático que generalice el resultado deseado (figura 2).

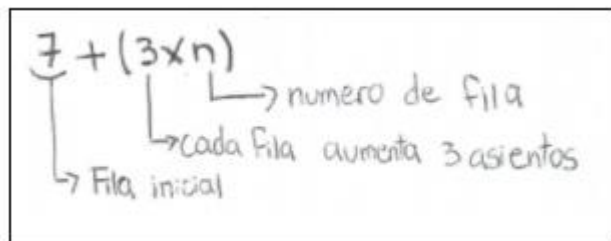


Figura 2: Ejemplo de error en el ítem 3C

Como el ejemplo anterior, se detectaron procedimientos similares tanto en Costa Rica como en México, en algunos casos recurren al procedimiento algebraico sin éxito. En general, se puede concluir que el razonamiento del estudiante es puramente aritmético y

es incapaz de establecer un modelo matemático que lo induzca a la generalización del resultado.

Otro de los ítems que también presenta un alto porcentaje de error es el ítem 8 en este se requiere justificar la no igualdad en una expresión con radicales donde se involucra la ley distributiva cuya estructura se relaciona en apariencia a la ley de linealidad, ubicado en el nivel IV de entendimiento. El porcentaje de error en Costa Rica es mayor en comparación con México.

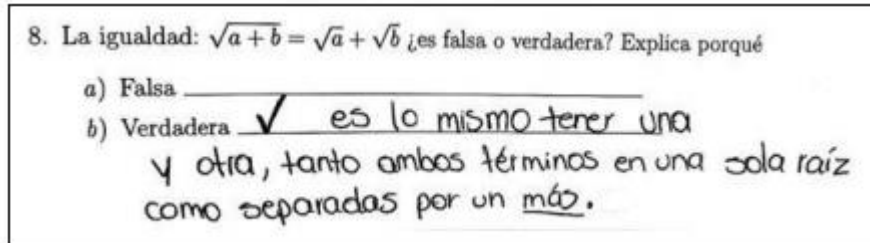


Figura 3: Ejemplo de error en el ítem 8

En este caso el estudiante justifica su respuesta afirmando que ambas expresiones son equivalentes, es decir se cumple la igualdad porque es lo mismo. También se encontró otra justificación recurrente al afirmar que son propiedades radicales (figura 3). Aunado a lo anterior, en este ítem se detectó algunas respuestas correctas con justificaciones deficientes donde el estudiante debe recurrir a ejemplos numéricos para poder justificar (figura 4).

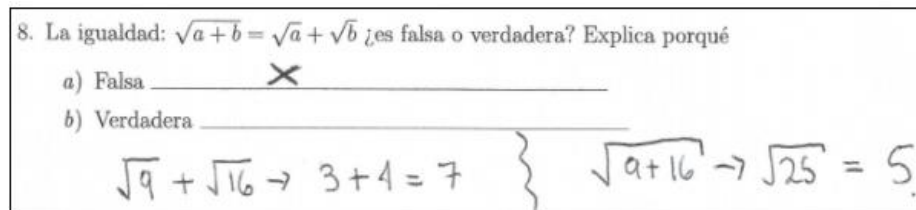


Figura 4: Ejemplo de justificación deficiente en el ítem 8.

De manera general, los estudiantes participantes evidenciaron mayores dificultades en el uso de la letra como número generalizado, se ha comprobado que el estudiante no es capaz de justificar correctamente y reflexionar su respuesta, lo cual evidencia carencia de habilidades propias del pensamiento matemático. También cabe mencionar que los estudiantes recurren a procedimientos aritméticos para poder resolver los ítems planteados, situación que no se espera a nivel universitario.

También es interesante evidenciar los ítems donde el porcentaje de mayor acierto. De acuerdo con la tabla 5, se tiene el ítem 3a (I nivel de entendimiento) el cual está planeado dentro del enfoque del álgebra como generalización de la aritmética. Los ítems 4, 9a y 9b están ubicados en el II nivel de entendimiento dentro del enfoque del álgebra para la resolución de ecuaciones.

Tabla 5. Los ítems con porcentajes de acierto más alto

	Costa Rica	México
Ítem 3A	100,00	96,67
Ítem 9A	100,00	100,00
Ítem 9B	100,00	100,00
Ítem 4	95,83	96,67

Los ítems donde se evidenció mayor porcentaje de acierto son, ítem 3a donde el estudiante debe ser capaz de comprender el álgebra como un patrón generalizado a partir de la información del enunciado. También en el ítem 9a, donde se requiere resolver la ecuación lineal, para esto el estudiante debe valorar el uso de la letra como incógnita de valor específico. En ese mismo ejercicio, tenemos el ítem 9b donde es necesario resolver la ecuación lineal, para esto el estudiante debe lograr despejar la variable "x" aplicando operaciones como la suma o división de términos semejantes. Finalmente, en el ítem 4, el estudiante debe lograr comprender el problema algebraico y resolverlo planteando una ecuación algebraica o resolverlo de forma intuitiva.

Lo anterior, nos indica que existe un manejo algebraico para resolver ecuaciones lineales en ambos contextos. Así como un buen manejo del uso de la letra como incógnita de valor específico y como letra evaluada, algo esperado por el nivel educativo de los participantes en este trabajo.

Análisis según los enfoques del álgebra

Los resultados muestran que las concepciones del álgebra en donde los estudiantes obtuvieron mayor éxito es la que trabaja el álgebra para la resolución de ecuaciones, tanto en el contexto mexicano como en el costarricense, evidenciando un mayor dominio al resolver ecuaciones lineales simples. A continuación, se muestra el porcentaje de error según los cuatro enfoques del álgebra (tabla 6).

Tabla 6. *Porcentaje de error según los enfoques del álgebra*

	Costa Rica	México
Estudio de relaciones entre cantidades	40,28	34,44
El estudio de las estructuras algebraicas	26,39	20,00
Aritmética generalizada	13,89	14,44
Algebra para la resolución de problemas	2,78	2,22

También se puede evidenciar que el enfoque del álgebra donde se presentó mayores errores fue el estudio de relaciones entre cantidades, donde al estudiante se le pide escribir un modelo matemático que permita establecer una relación sistemática existente entre un conjunto de valores como una herramienta para el estudio de funciones. Lo cual podría significar que el estudiante presenta dificultad en los ítems donde se les pide comprender una regla, o establecer un modelo matemático generalizado respondiendo a la relación entre dos conjuntos, esto por desconocimiento o poca comprensión del tema.

Así mismo, también se presentó cierta dificultad para los estudiantes, en el estudio de las estructuras algebraicas, en este caso los ítems se relacionaban con el binomio al cuadrado, el producto de polinomio, propiedades radicales. Resulta significativo que un porcentaje mayor de estudiantes universitarios de Costa Rica que de México, revelaron obstáculos para manejar algunas propiedades de las estructuras algebraicas como por ejemplo las requeridas en el ejercicio 8. Como se puede observar en la tabla VI en Costa Rica se presentan mayores dificultades que en México.

En el caso del enfoque de la aritmética generalizada fue mínima, la diferencia entre los resultados de ambos países, en este caso se presentó mayor dificultad en el contexto mexicano, los ítems ubicados en este enfoque demandan comprender el álgebra como un patrón generalizado a partir de la información del enunciado.

En relación con los ítems que se ha presentado mayor grado de error, se ha podido percibir en el caso de Costa Rica que se ha presentado mayor dificultad en los ítems ubicados, en el estudio de las estructuras matemáticas y estudio de relaciones entre cantidades, en ese orden. En el caso de México, el ítem de mayor error se ha ubicado de acuerdo con los enfoques del álgebra en el estudio de relaciones entre cantidades coincidiendo con Costa Rica. Estos tres ítems obtienen un porcentaje de error del 50% o más.

CONCLUSIONES

Como resultado de la aplicación del instrumento en ambos países se identificó una mayor dificultad en los ítems que se relacionan con el uso de las letras como números generalizados, mostrando incapacidad de proponer modelos matemáticos que induzcan a la generalización de los resultados.

Diversos errores detectados en las producciones de los estudiantes aparentemente pueden ser considerados por descuido, así mismo, se observa cómo algunos estudiantes en muchas ocasiones recurren a sus conocimientos aritméticos, demostrando entre otras dificultades: incapacidad para establecer modelos matemáticos, aprendizaje deficiente de reglas para la manipulación de las estructuras algebraicas, errores debido a inferencias incorrectas, errores de cálculo, así como errores procedimentales al intentar resolver cuentas aritméticas.

Así mismo, como se ha documentado en otros trabajos (García, 2016 y Bolaños-González y Lupiáñez-Gómez, 2021), los estudiantes manifiestan mayores dificultades al momento de emplear las letras como incógnitas, como valores numéricos generalizados y como variables, ya que en los ejercicios de mayor nivel cognitivo que requieren este tipo de conocimiento para su resolución correcta, fue donde se encontraron las frecuencias mayores de errores. Teniendo en cuenta lo anterior, nuestros resultados coinciden con lo manifestado por Trigueros y Ursini (1998) en cuanto a las grandes dificultades que manifiestan los estudiantes en el manejo de las letras como variables, lo que nos lleva a considerar que hasta la actualidad persisten las deficiencias en cuanto a la enseñanza de las matemáticas en los cursos escolares preuniversitarios, relacionadas con los diferentes usos de las letras en el álgebra.

Por otra parte, considerando el total de estudiantes participantes, se ubicaron 10 estudiantes en un II nivel de entendimiento del uso de las letras en álgebra (18.52%), siguiendo con el porcentaje más alto de 44.44%, lo que equivale a 24 estudiantes ubicados en el III nivel de entendimiento y finalmente el IV nivel de entendimiento donde se esperaba la mayoría de los estudiantes se ubicaran, con un 37.04% lo que equivale a 20 estudiantes del total de la muestra. Esta realidad es preocupante desde el punto de vista universitario, donde se evidencia que la población no ha adquirido las bases matemáticas ni en la formación secundaria ni se han superado tras cursar el primer curso universitario. Este resultado no se puede generalizar, pero sí permite evidenciar una realidad educativa en ambos contextos.

De acuerdo con los enfoques del álgebra, el enfoque más empleado en ambos contextos educativos resultó aquel que está orientado para resolver ecuaciones, donde se trabajó ecuaciones lineales simples. Lo anterior, nos lleva a considerar que dicho enfoque puede ser el que más se puede estar desarrollando en los cursos de matemáticas en los niveles educativo anteriores al nivel universitario en detrimento de los otros enfoques del álgebra mencionados con anterioridad en este trabajo, esto nos lleva a considerar una posible vía de continuidad de este trabajo orientando en el análisis de los materiales didácticos así como en el estudio de los componentes del conocimiento profesional de los docentes en los citados niveles educativos, para documentar si esta inferencia puede tener validez.

También ha sido interesante que en ambos contextos el análisis de los enfoques del álgebra es similar, la diferencia entre los porcentajes de error en los ítems según cada enfoque varía muy poco, sin embargo, los porcentajes de error son más bajos en el contexto mexicano.

En el caso particular, el enfoque del estudio de relaciones entre cantidades, se ubican los dos ítems de mayor error en ambos países, también se debe señalar que en el caso de Costa Rica se detectó otro ítem de alto porcentaje de error ubicado en el enfoque del estudio de estructuras algebraicas, situación que no se evidenció en México.

Es importante destacar que la población mexicana sacó mejores resultados en la aplicación de la prueba, esto se puede deber a que los estudiantes de México pertenecen a diferentes carreras de Ingeniería del Centro Universitario de la Costa Sur, en comparación con los estudiantes de Costa Rica que pertenecen a una Licenciatura en Administración de la Universidad Nacional. Se debe aclarar que la población de administración eran estudiantes en su mayoría repitentes con un mayor acompañamiento académico durante el curso de matemática.

REFERENCIAS

- Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo* [versión digital pdf]. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.
- Ashlock, R. (2002). *Error patterns in computation: using error patterns to improve instruction*. (9th Edition). Columbus, USA.
- Barrón, J., Ruiz, O., Luna, J., Estrada, J. y Loera, E. (2013). Errores matemáticos más comunes de los alumnos de nuevo ingreso en las clases de física y matemáticas de las carreras de ingeniería de la UACJ. *Cultura Científica Y Tecnológica*, (50). Recuperado a partir de <http://revistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt/article/view/933>
- Bolaños-González, H., y Lupiáñez-Gómez, J. L. (2021). Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario. *Uniciencia*, 35(1), 1-18. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.1>
- Bachor, D., (1979), Using Work Samples as Diagnostic Information. *Learning Disability Quarterly*. Vol. 2, No. 1 pp. 45-52. DOI: <https://doi.org/10.2307/2F1510838>
- Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 221–239. <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-013-9507-1>
- Brown, S., Findley, K., y Montfort, D. (2007). Student Understanding of States of Stress in Mechanics of Materials. *The International Journal on the Biology of Stress*, (August), 1994-2000.
- Castillo-Sánchez, M., Gamboa-Araya, R., y Hidalgo-Mora, R. (2020). Factores que influyen en la deserción y reprobación de estudiantes de un curso universitario de matemáticas. *Uniciencia*, 34(1), 219-245. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.34-1.13>
- Chi, M. T. H., y Roscoe, R. D. (2002). The process and challenges of conceptual change. In M. Limon y L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 3-27). Dordrecht: Kluwer. <https://education.asu.edu/chi-m-t-h-roscoe-r-d-2002-processes-and-challenges-conceptual-change-m-limon-and-l->

mason-eds-0.

- Documento base del Bachillerato General. (2018). *Boletín oficial del Estado*. https://www.dgb.sep.gob.mx/informacionacademica/pdf/Doc_Base_22_11_2018_dgb.pdf
- Dodera, G., Bender, G., Burrioni, E. y Lázaro, M. (2014). Errores, actitud y desempeño matemático del ingresante universitario. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (38), 69-84.
- Escuela de Matemática. (2017). *Carta al estudiante del curso de servicio MAT001 Matemática General*. Universidad Nacional, Costa Rica: Documento no publicado.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel.
- Gamboa Araya, R., Castillo Sánchez, M., e Hidalgo Mora, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades Investigativas en Educación*, 19(1), 104-136. 10.15517/AIE.V19I1.35278
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel.
- García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. Lupiáñez, J. L., Cañadas, M. C., Molina, M., Palarea, M., & Maz, A. (Eds.). *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática*, 145-155. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/2018/1/GarciaSegoviaLupianez2011.pdf>.
- García, J. (2016). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas* (Doctoral dissertation, Tesis doctoral). Universidad de Granada, España. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/43529>
- Godino, J., y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática
- Hiebert, J., y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.
- Küchemann, D. (1980). *The understanding of generalized arithmetic (algebra) by secondary school children*. Doctoral dissertation, Chelsea College, University of London.
- Mason, L. (2002). c, in M. Limón y L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change. Issues in theory and practice* (pp. 301-336), Dordrecht (NL), Kluwer
- Matz, M. (1982). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In D. Sleeman y J.S. Brown (Eds.), *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 25-50). New York: Academic Press.
- Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de estudio de Matemática*.
- Payne, S. J. and Squibb, H. R. (1990), Algebra Mal-Rules and Cognitive Accounts of Error. *Cognitive Science*, 14: 445–481. <https://doi.org/10.1016/0364->

0213(90)90019-S

- Resnick, L., S. Omanson (1987). Learning to understand arithmetic. *Advances in instructional psychology*, 41-95.
- Saucedo, G. (2007). Categorización de Errores Algebraicos en Alumnos Ingresantes a la Universidad. *Itinerarios Educativos*, 1(2), 22-43. <https://doi.org/10.14409/ie.v1i2.3898>
- Silver, E. A. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 181-197). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum
- Stavy, R. y Tirosh, D. (2000). *How Students (Mis-) Understand Science and Mathematics: Intuitive Rules*. Teachers College Press. New York.
- Townsend, B. (2005). *Examining secondary students' algebraic reasoning: flexibility and strategy use*. [Tesis de doctorado inédita]. Universidad de Missouri-Columbia.
- Ursini, S., y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3),5-38. [fecha de Consulta 2 de enero de 2021]. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40518302>
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, pp. 8-19). Reston, VA: NCTM. <http://www.math.wisc.edu/~kwon/135Spring2014/alg.pdf>
- VanLehn, K. (1990). *Mind bugs: origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass: MIT Press.
- Vosniadou, S. y Verschaffel, L. (2004) Extending the Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching. In L., Verschaffel and S. Vosniadou (Guest Editors), *Conceptual Change in Mathematics Learning and Teaching, Special Issue of Learning and Instruction*, 14, 5, 445-451. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014>

José García-Suarez
Universidad de Guadalajara, México
jose.gsuarez@academicos.udg.mx

Helen Bolaños-González
Universidad Nacional, Costa Rica
hellen.bolanos.gonzalez@una.ac.cr