Bravo-Ávila, C., Vergara-Gómez, A. y Gaona, J. (2024). Sentido numérico en la resolución de problemas en tres profesores en activo. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *7*(2), 1-24

ISSN: 2603-9982

# SENTIDO NUMÉRICO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN TRES PROFESORES EN ACTIVO

Carolina Bravo-Ávila, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile

Andrea Vergara-Gómez, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile

Jorge Gaona, Universidad de Playa Ancha de Ciencias de la Educación, Valparaíso, Chile

***Resumen***

*Está documentado que el sentido numérico es de suma importancia para el desarrollo de habilidades aritméticas tempranas, pero son escasos los estudios que abordan este conocimiento en profesores de matemática en servicio. En este estudio analizamos las componentes del sentido numérico que activan profesores en ejercicio, cuando enfrentan problemas matemáticos diversos. Desde un enfoque cualitativo, se realiza un estudio de caso múltiple, que nos permite revelar la predominancia de ciertas componentes del sentido numérico. Destaca en los hallazgos la relación entre los niveles de formación matemática del profesorado y la activación de componentes del sentido numérico.*

***Palabras clave***: *Educación matemática, didáctica, sentido numérico, profesor en servicio, conocimiento aritmético.*

## Number sense in problem solving on three active teachers

***Abstract***

*It is documented that number sense is of utmost importance for the development of early arithmetic skills, but there are few studies that address this knowledge on in-service mathematics teachers. In this study we analyze the components of number sense that practicing teachers activate when they face various mathematical problems. From a qualitative approach, a multiple case study is carried out, which allows us to reveal the predominance of certain components of number sense. The findings highlight the relationship between the levels of mathematics training of teachers and the activation of components of number sense.*

***Keywords***: *mathematical education, didactics, number sense, in-service teachers, arithmetic knowledge.*

Recibido: 19/01/2024; Aceptado: 23/08/2024

## INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas ha sido un tema de interés creciente para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OCDE] (2014) define los problemas como situaciones sin una solución obvia y, por lo tanto, resolver problemas requiere pensar y aprender. Liljedahl et al. (2016) plantean que la resolución de problemas matemáticos se ha considerado durante mucho tiempo como un aspecto importante de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y, por lo tanto, ha sido de interés para los investigadores en educación matemática prácticamente desde que existe este campo, iniciando con los trabajos germinales de Polya (1945) y Mason et al. (1982), pasando por Blum y Niss (1991), Silver (1997), Goos et al. (2002), Carlson y Bloom (2005), y Hollebrands et al. (2010), por mencionar algunos, hasta las investigaciones más actuales como Autor (2023) o Szabo et al. (2024), lo que da cuenta de la vigencia de este tema. Las investigaciones anteriormente citadas, además de mostrar un largo periodo de estudio y un desarrollo a nivel internacional, muestran distintos grupos de interés entorno a la resolución de problemas: matemáticos de profesión (Carlson & Bloom, 2005), estudiantes de primaria (Rodríguez-Jara et al., 2023), secundaria (Goos et al., 2002) y universitarios (Rodríguez-Nieto et al., 2023), la influencia de las emociones (DeBellis y Goldin, 2006), el trabajo en equipo (Goltz et al., 2008) y la utilización de tecnologías (Gaona et al., 2022) en la resolución de problemas. De acuerdo con Liljedahl et al. (2016), su desarrollo reciente incluye el estudio de variados aspectos, tales como razonamiento heurístico, procesos creativos y uso de tecnologías digitales.

Algunos autores sostienen que la habilidad para resolver problemas está relacionada con el sentido numérico (Louange y Bana, 2010; Tsao, 2004), para el cual se han acuñado distintas definiciones. Autores como Greeno (1991), McIntosh et al. (1992), Dehaene (2001) y Sharma (2016), han definido el constructo de sentido numérico entendiéndose como la habilidad de utilizar los números y los métodos cuantitativos para comunicar, procesar e interpretar información. En esta línea, la mayoría de las investigaciones del sentido numérico son realizadas con foco en las matemáticas tempranas, considerando principalmente estudiantes preescolares y de primaria (Griffin, 2004; Halberda y Feigenson, 2008; Jordan et al., 2010; Guzmán et al., 2019), siendo más reducidos los casos en que personas adultas sean los sujetos de estudio. También, es bastante frecuente encontrarse con investigaciones centradas en estudiantes con dificultades de aprendizaje (Berch, 2005; Mazzocco et al., 2011; Praet et al., 2013; Lewis et al., 2020).

En cuanto al estudio del sentido numérico en profesores, este se ha centrado principalmente en analizar cómo promover el desarrollo del sentido numérico en profesores en formación (e.g., Yang, Reys & Reys, 2009; Courtney-Clarke & Wessels, 2014; Whitacre & Nickerson, 2014; Yaman, 2015). Estos antecedentes confirman la necesidad de explorar las habilidades del sentido numérico del profesorado en servicio. Para poder desarrollar el sentido numérico es clave la figura del profesor, pues es él quién debe diseñar, proponer actividades y organizar la enseñanza, escuchar las explicaciones y orientar a sus estudiantes (Noviyanti y Suryadi, 2019). En efecto, de acuerdo con Cain et al., (2020), el sentido numérico se construye con el tiempo para facilitar el aprendizaje a medida que se avanza en él y la labor de los profesores debería ser ampliar las habilidades del sentido numérico, en vez de apuntar a que tan "alto" se puede llegar con un algoritmo. Así el propósito es desarrollar el sentido numérico como una habilidad cotidiana o habitual, en lugar de desarrollar procesos algorítmicos de forma continua, independiente del tema específico que se esté abordando.

Como la figura del profesor es determinante a la hora de desarrollar el sentido numérico, resulta interesante conocer cómo lo manifiestan los profesores. Autores como Kaminski (1997), Yang et al., (2008), Courtney et al. (2014), y Almeida et al., (2014), entre otros, se han hecho cargo de esta interrogante, con profesores en formación, y han concluido que los profesores manifiestan un bajo sentido numérico, prefiriendo resolver problemas con la utilización de reglas o algoritmos. De acuerdo con Whitacre y Nickerson (2014), mejorar el sentido numérico es un objetivo importante para la formación de profesores de matemáticas, sin embargo, es un proceso complejo. Escasas investigaciones dan cuenta del sentido numérico que poseen los profesores en activo de educación primaria o secundaria, prefiriendo investigar las estrategias didácticas utilizadas para enseñarlo, por ejemplo, Ghazali et al. (2010).

De acuerdo con la revisión realizada, son escasas las investigaciones que abordan el sentido numérico que manifiestan los profesores en activo al resolver distintos problemas matemáticos. Aún menos, encontramos investigaciones enfocadas en la activación de las componentes del sentido numérico en profesores. Por esto, la pregunta a investigar es la siguiente: ¿Cuáles son las componentes del sentido numérico que manifiestan profesores en activo cuando enfrentan problemas matemáticos diversos? Para ello, se propone una investigación de enfoque cualitativo, orientada a comprender la presencia de las componentes del sentido numérico en tres profesores de matemáticas en activo, que realizan clases en distintos ciclos educativos en Chile, cuando resuelven problemas de los ejes de Números, Geometría y Datos y Azar.

## SENTIDO NUMÉRICO

Diversos autores han definido el concepto de sentido numérico desde distintas perspectivas, por lo que no hay una definición precisa del término (Sowder y Schappelle, 1989; Almeida et al., 2014; Godino et al., 2009). La psicología ha implementado este concepto para abordar temas como la concepción inicial del sentido del número en edades tempranas (Gelman y Meck, 1992) o hacer una distinción entre el sentido numérico desde la cognición matemática y la educación matemática (Berch, 2005).

Greeno (1991) señala que el sentido numérico hace referencia a capacidades importantes que adquiere una persona a través de sus experiencias cognitivas, como realizar cálculos mentales flexibles, estimaciones numéricas, inferencias y juicios cuantitativos. McIntosh et al. (1992) sostienen que el sentido numérico es la habilidad de utilizar los números y los métodos cuantitativos para comunicar, procesar e interpretar información, así como el uso flexible de los números y las operaciones para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias. Sowder y Schappelle (1989) agregan a las características anteriores que el sentido numérico puede incluir esquemas generales sobre cómo se comportan los números, la capacidad de utilizar puntos de referencia apropiados, la tendencia a querer dar sentido a situaciones que involucran números y cantidades, la comprensión y el uso correcto de notaciones numéricas, por ejemplo, decimales y fraccionarias, y el evaluar lo razonable de una respuesta para un contexto determinado. De este modo, la adquisición del sentido numérico es un proceso gradual y progresivo que comienza mucho antes de que comience la escolarización formal (McIntosh, et al., 1992). Es más, Dehaene (2001) afirma que el sentido numérico viene predeterminado biológicamente. De todas formas, Griffin (2004) sostiene que el sentido numérico se puede enseñar, prueba de ello son los resultados de las investigaciones realizadas por Tsao (2004), Whitacre y Nickerson (2014) y Yaman (2015), las que evidencian que el sentido numérico que tenían profesores en formación mejoró al finalizar un curso o un programa especializado de resolución de problemas o números y operaciones.

Al ser el sentido numérico una capacidad importante para el desarrollo del pensamiento matemático, diversos autores han centrado su estudio con estudiantes de primaria y secundaria (Almeida y Bruno, 2014; Sanfiel et al., 2021; Sianturi et al., 2021; Yang, et al., 2007; Yang y Hsu, 2009). Los resultados de estos trabajos coinciden en señalar que los estudiantes priorizan la realización de algoritmos sobre la utilización de habilidades propias del sentido numérico y, por lo tanto, son pocos los estudiantes que logran manifestar sentido numérico.

Debido a esta situación resulta interesante conocer la razón de este modo de proceder frente a las tareas numéricas. Griffin (2004) menciona que los estudiantes de preescolar o de primaria que han aprendido a relacionar números con cantidades no tienen problemas para reconocer relaciones numéricas. Sin embargo, los estudiantes que sólo aprenden las reglas demuestran una falta de comprensión del significado de los números y de los signos de operación. Yang y Hsu (2009) indican que el sentido numérico se puede desarrollar mediante actividades de sentido numérico bien diseñadas de forma adecuada y eficaz, con un buen entorno de aprendizaje. Para ello, la figura del profesor es primordial. Esto ha llevado a que distintas investigaciones hayan puesto el foco en profesores en formación y activo, siendo estas últimas menos frecuentes.

Respecto al profesorado en formación, se ha evidenciado que estos, a pesar de que en algunos casos tienen un conocimiento matemático elevado, prefieren utilizar reglas y algoritmos, intentando calcular de forma exacta en lugar de seguir con habilidades como la estimación o conocimiento matemático intuitivo, incluso cuando la indicación es explícita en cuanto a no utilizar algoritmos (Kaminski, 1997; Sengül (2013); Courtney-Clarke y Wessels, 2014; Almeida et al., 2014; Yaman, 2015). En cuanto a profesores activos, Noviyanti y Suryadi (2018) realizaron un estudio con tres profesores de educación infantil, implementando una entrevista y una observación de clases, enfocándose en el conocimiento matemático para la enseñanza. Los autores identificaron a un solo profesor de los investigados con conocimiento sobre sentido numérico y concluyeron que cuando un profesor tiene más preparación también tiene más confianza, plantea objetivos más apropiados y logra un mayor aprendizaje sobre sentido numérico en sus estudiantes. Por otra parte, Orrill y Brown (2012) realizaron un estudio a un grupo de 6 profesores en activo entre educación infantil y secundaria acerca del conocimiento específico que tenían sobre proporciones. Los autores apuntan a que es poco probable que un profesor que no puede organizar sus conocimientos sobre sentido numérico logre ayudar a los estudiantes a generar conexiones matemáticas. El estudio incluyó un proceso de acompañamiento a los profesores durante 14 semanas y concluyó que se necesita más información para comprender lo que los profesores saben y cómo utilizan el conocimiento sobre sentido numérico. En este sentido, Faulkner (2009) explica que la debilidad que tienen los profesores en activo es que, aunque tengan el conocimiento conceptual, no son capaces de explicar el razonamiento detrás de una respuesta, pues entienden las matemáticas tal como se las enseñaron, es decir, a través de procedimientos algorítmicos.

## Componentes del Sentido Numérico

Algunos autores han estudiado el uso de las componentes del sentido numérico en profesores en formación. Por ejemplo, Courtney-Clarke y Wessels (2014) utilizan componentes de la competencia matemática, haciendo una relación entre ellas y las del sentido numérico. Entre sus resultados se puede mencionar que los profesores en formación tuvieron dificultades para moverse entre diferentes representaciones, reconocer valores absolutos y relativos de los números, realizar operaciones con números racionales; además no tenían estrategias flexibles para resolver problemas, realizar cálculos mentales flexibles o estimar y, por último, prestaron poca atención a los resultados poco razonables. Algo similar concluye Kaminski (1997) quien estudia la composición y descomposición de números naturales, la comparación de expresiones numéricas y el cálculo mental, mencionando que los profesores en formación rara vez recurrieron a las relaciones entre números y operaciones, también comenta que dentro de los profesores en formación había varios que aparentemente ignoraban o desconocían las propiedades de la multiplicación.

Almeida et al. (2014) aplican un instrumento, con diferentes tareas en las que podrían utilizarse componentes del sentido numérico que efectivamente aparecieron en las respuestas de los estudiantes. También se encontraron con respuestas diferentes y de nivel superior. Una conclusión a la que llegaron es que a mayor formación matemática más estrategias de sentido numérico tienen para enfrentarse a estas situaciones. Almeida y Bruno (2014) estudian las componentes del sentido numérico *utilización de puntos de referencia, utilización de representaciones de los números y las operaciones* y *reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable*. Sus conclusiones afirman que las primeras dos aparecen en algunas de las tareas esperadas, también observan que la tercera componente se utilizó escasamente. Cabe destacar que frente a una tarea matemática pueden surgir distintos tipos de estrategias y estas, a su vez, se pueden categorizar de acuerdo con distintas componentes del sentido numérico (Almeida y Bruno, 2016). Es importante enfatizar que en su estudio "destacan los estudiantes que escogen un procedimiento propio del sentido numérico, pero la falta de dominio de conceptos les lleva a una respuesta incorrecta." (p.135). Yang et al. (2008) concluye que el bajo porcentaje de futuros docentes que utilizaron componentes del sentido numérico, como *puntos de referencia y estimación*, plantea la interrogante de si los futuros profesores de primaria tendrán la capacidad de promover el sentido numérico cuando enseñan matemática. Además, hace notar que como los profesores son los guías de sus estudiantes, es razonable que demuestren un dominio de las nociones básicas del sentido numérico.

En esta investigación, asumimos la propuesta de Almeida et al. (2014), quienes presentan siete componentes**:** *1. Comprender el significado de los números; 2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números; 3. Usar puntos de referencia; 4. Utilizar la composición y descomposición de los números; 5. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones; 6. Comprender el efecto relativo de las operaciones y 7. Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta.* A partir de estas componentes se definen las categorías de análisis que se presentan en el apartado de metodología.

## METODOLOGÍA

La investigación se sustentó en un estudio de casos múltiples que busca repetir un experimento para determinar si los resultados son similares o se pueden contrastar por razones previsibles (Yin, 2014). Además, es de tipo instrumental, pues de acuerdo con Stake (1999) "nos encontraremos con una cuestión que se debe investigar, una situación paradójica, una necesidad de comprensión general, y consideraremos que podemos entender la cuestión mediante el estudio de un caso particular." (p.16). Para este estudio, cada caso fue el desempeño de un profesor y se espera que los resultados se puedan contrastar de acuerdo con la literatura consultada.

## Participantes

En Chile la docencia en el sistema escolar la ejercen profesores con especialidad diferente según el nivel de enseñanza. Un profesor generalista es formado para atender estudiantes de hasta 12 años (6° básico). Un profesor generalista con mención puede hacer clases hasta 7° y 8° básico, incluso con un permiso Ministerial, podrían llegar a realizar clases hasta 2° año de Enseñanza Media, es decir, estudiantes de 16 años (Decreto 352, 2004). Un profesor de Enseñanza Media es formado específicamente para realizar clases en el nivel de enseñanza media, 7° básico a 4° de Enseñanza Media, es decir, entre 13 y 17 años (Ley 20.370, 2005). Actualmente, para poder ser profesor de Matemáticas en Chile, se debe estudiar Pedagógica General Básica – PGB (profesor generalista) o Pedagogía en Matemática (profesor para enseñanza media), en universidades acreditadas por un organismo estatal denominado Comisión Nacional de Acreditación, donde las carreras mencionadas también se encuentren habilitadas. Algunas universidades ofrecen la carrera de PGB con mención (especialidad en alguna asignatura) o está la posibilidad de realizar un postítulo que la otorgue, también en universidades habilitadas para dicho propósito. Además, en Chile, la formación de profesores se rige por estándares disciplinarios-didácticos y pedagógicos (Ley, 20.903). En el caso de los profesores de educación básica, estos estándares (CPEIP, 2022) comprenden a todas las disciplinas del currículum escolar de educación básica y, por lo tanto, la matemática conforma sólo una parte del proceso formativo. En el caso del profesor de educación media, los estándares disciplinarios abordan 5 ejes, y todos ellos refieren exclusivamente a la Matemática y su didáctica (CPEIP, 2021).

Si bien es cierto, la formación de cada profesional docente es distinta, de acuerdo con las tareas que deben realizar y el nivel educativo que deben atender, todos tendrán que ser capaces de desarrollar las mismas habilidades transversales en sus estudiantes, según lo establece el currículum escolar (Ministerio de Educación, 2015; Ministerio de Educación, 2018; Ministerio de Educación, 2019). Por lo tanto, es interesante estudiar qué componentes del sentido numérico activan y si existen diferencias entre profesores en activo de distintos niveles. Por ello, para esta investigación, se consideró un profesor de cada nivel educativo.

Para distinguirlos llamamos P1 al profesor que se desempeña en la enseñanza media, profesor de Matemática y Computación, P2 a la profesora que se desempeña en enseñanza básica (con estudiantes entre los 10 y 11 años), profesora de Educación General Básica con mención en Matemática y P3 a la profesora de primer ciclo básico (estudiantes de 7 años), profesora de Educación General Básica, sin mención en matemática.

## Instrumentos

Para el análisis de las componentes del sentido numérico que activaron estos profesores, se elaboró una prueba escrita (PE) de 10 ítems (Anexo), con 4 ítems seleccionados desde el instrumento propuesto por Almeida et al. (2014) (ítems del 1 al 4) y 6 ítem diseñados por los investigadores para abordar las habilidades de estimación, en el ámbito de los datos, a través del uso de tecnologías. La selección de los ítems desde el instrumento de Almeida et al. (2014) obedeció a que el contenido matemático y el carácter transversal de estos permitiría un adecuado abordaje por parte de los tres profesores participantes.

Los ítems, diseñados por los investigadores, pretenden explorar componentes del sentido numérico en un ámbito poco abordado en investigaciones anteriores: el análisis de datos estadísticos. Para ello se propone una secuencia de preguntas que abordan similares desempeños, pero con cambios en algunas variables didácticas, como el tipo de escala en los ejes y el rango de visualización. Cuatro de estos ítems fueron presentados a los profesores participantes mediante una prueba online (PO), alojada en una plataforma Moodle con el software Wiris y dos fueron presentados en papel. Esto último debido a que no fue posible programar la tarea para que los profesores dibujaran a mano alzada una línea de tendencia en la interface que permite el software. Los ítems 7, 8, 9 y 10 fueron programados usando parámetros aleatorios para generar distintas variaciones de las preguntas. Por ello, lo que se comparte en el instrumento (Anexo) es un ejemplo de las posibles preguntas. Las instrucciones de la prueba en formato papel explicaban que cada problema debía ser resuelto sin aplicar algoritmos o reglas, explicitando la solicitud de argumentación de cada respuesta, con un tiempo máximo de 3 minutos para su resolución. Cada ítem se presentó de forma separada.

Además, se les solicitó una vez terminada la evaluación, responder los ítems con las estrategias que les hubiese gustado utilizar, es decir, se les brindó la oportunidad de rehacer el problema usando una estrategia distinta a la usada originalmente, pudiendo recurrir incluso al uso de algoritmos si así lo estimaban conveniente.

En el caso de la prueba a través de la plataforma, se presentaron dos problemas por pantalla, con un espacio para ingresar texto que permitiera argumentar cada respuesta, bajo la instrucción de no usar cálculos algorítmicos. Además, los profesores fueron grabados, así como también se grabaron las acciones del usuario en la pantalla para recoger toda la información posible asociada a los argumentos de su respuesta. Al terminar de responder a un problema, se les preguntó cuál había sido la estrategia utilizada para formalizar su respuesta. Para estas preguntas no se les dio tiempo límite.

A continuación, se enuncian los nombres de cada ítem y su relación con el área temática (para visualizar el instrumento completo consulte los anexos): 1. Botellas de agua (números);2. Cajas (geometría); 3. Cinta de colores (números); 4. Área del suelo de una sala (geometría); 5. Nube de puntos (datos); 6. Nube de puntos heterogénea (datos); 7. Punto visible en una nube (datos); 8. Punto no visible en una nube (datos); 9. Punto visible en una nube heterogénea (datos); 10. Punto no visible en una nube de puntos heterogénea (datos).

Para reconocer qué componente activó cada docente se cuenta con indicadores por categoría en función de los ítems propuestos en este estudio, siguiendo las orientaciones de Almeida et al. (2014), los que se pueden ver en la Tabla 1.

Tabla 1. *Indicadores de cada componente de sentido numérico (elaboración propia)*

| N° | Componente | Indicadores |
|---|---|---|
| 1 | Comprender el significado de los números | - Manifiestan distinguir entre la noción de fracción y razón.<br>- Reconocen valores entre números enteros en una recta graduada. |
| 2 | Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números | - Plantean estrategias para comparar números racionales.<br>- Estiman las medidas de un espacio cerrado, como una habitación o sala.<br>- Estiman el área de un espacio cerrado, como una habitación o sala.<br>- Identifican coordenadas de puntos que no están ubicados en coordenadas enteras. |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | Usar puntos de referencia | - Eligen números cercanos a los datos que tienen, para resolver el problema basándose en estimaciones.<br>- Utilizan una recta como referente mental.<br>- Utilizan coordenadas de puntos conocidos para estimar coordenadas de puntos no visibles bajo ciertas condiciones dadas. |
| 4 | Utilizar la composición y descomposición de los números | - Descomponen arbitrariamente cantidades con el fin de visualizar o simplificar el problema. |
| 5 | Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones | - Usan más de una representación pictórica para resolver el problema, cambiando la forma de visualización. |
| 6 | Comprender el efecto relativo de las operaciones | - Aplican el doble de un número para comparar.<br>- Aplican propiedades de las operaciones para obtener una respuesta numérica estimada. |
| 7 | Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta | - Emplean y explican estrategias de estimación con argumentos claros y explícitos para resolver el problema.<br>- Evalúan si su respuesta es razonable. |

Además, en la Tabla 2 se muestra la relación entre cada ítem del instrumento y las componentes del sentido numérico prevista según el análisis *a priori.*

Tabla 2. *Relación de cada ítem con las componentes del sentido numérico (elaboración propia)*

| | Pregunta | Componente del SN |
|---|---|---|
| 1. | Botellas de Agua (PE) | 6 y 7 |
| 2. | Cajas (PE) | 6 y 7 |
| 3. | Cinta de colores (PE) | 2, 3, 4, 6 y 7 |
| 4. | Área del suelo de una sala (PE) | 2, 3 y 7 |
| 5. | Nube de puntos (PE) | 3 y 7 |
| 6. | Nube de puntos heterogénea (PE) | 3 y 7 |
| 7. | Punto visible en una nube (PO) | 1, 2, 3 y 7 |
| 8. | Punto no visible en una nube (PO) | 1, 2, 3 y 7 |
| 9. | Punto visible en una nube heterogénea (PO) | 1, 2, 3 y 7 |
| 10. | Punto no visible en una nube de puntos heterogénea (PO) | 1, 2, 3 y 7 |

Para observar cómo se activaban las componentes del sentido numérico, se utilizó el siguiente criterio: 1) Activa Componente (AC): Resuelve el problema activando una componente del sentido numérico; 2) Activa Componente parcialmente (ACE): Resuelve el problema activando componentes, pero falla, confunde o resuelve con una concepción errónea de conceptos y/o propiedades; 3) Uso de algoritmos (UA): Resuelve el problema sólo utilizando algoritmos; 4) Estrategia no clara (ENC): Resuelve el problema, pero no es clara la estrategia que utiliza.

En particular, en la componente 7 "Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta" el análisis se realiza asumiendo el conector en términos lógicos, es decir, se observa la activación de esta componente cuando están presentes ambos aspectos. Si sólo se presenta el primer aspecto, pero no el segundo entonces se clasifica como ACE.

## RESULTADOS

En primer lugar, observamos si los profesores resolvieron de forma correcta los problemas planteados, sin importar la estrategia utilizada. De esta forma se tabularon el éxito (E) o fracaso (F) por cada profesor y para cada ítem.

Tabla 3. *Éxito o fracaso en la resolución del problema (Elaboración propia)*

| | Prueba Escrita | | | | | Prueba Online | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Profesor | I 1 | I 2 | I 3 | I 4 | I 5 | I 6 | I 7 | I 8 | I 9 | I 10 | Total Correctas | Total Incorrectas |
| P1 | E | E | E | E | E | E | E | E | E | F | 9 | 1 |
| P2 | E | E | F | F | E | E | E | E | E | E | 8 | 2 |
| P3 | E | E | F | F | E | E | E | E | E | F | 7 | 3 |

Las componentes activadas por cada profesor, si utilizó algoritmos o su estrategia no fue clara, se muestran en gráficos radiales, donde cada sector circular representa una componente. El pintar todo el sector indica que activó la componente completamente, y medianamente pintado indica que se activó la componente de manera parcial.

### Resultados por Ítem

### Ítem 1: Botellas de Agua

En la Figura 1 se observan las componentes activadas por los profesores.

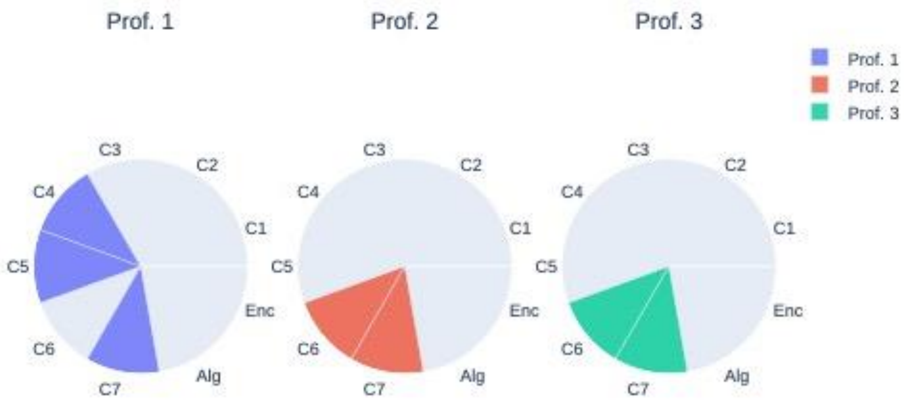


*Figura 1*. Componentes activadas por los profesores ítem 1

Para este caso las profesoras P2 y P3 presentaron la solución basada en la estimación, activando las componentes 6 y 7, por ejemplo, P3 argumenta que:

> "La segunda botella tiene 300 ml más que la primera, el valor de la segunda botella es el doble de lo que cuesta la primera, pero con más contenido, por lo tanto, la segunda es más conveniente."

Sin embargo, el profesor P1 propone una solución activando las componentes 4, 5 y 7. Utiliza la descomposición al comparar la cantidad de vasos que se podrían servir con el contenido de cada botella y cuál es el precio de cada uno, representando de forma pictórica (Figura 2).

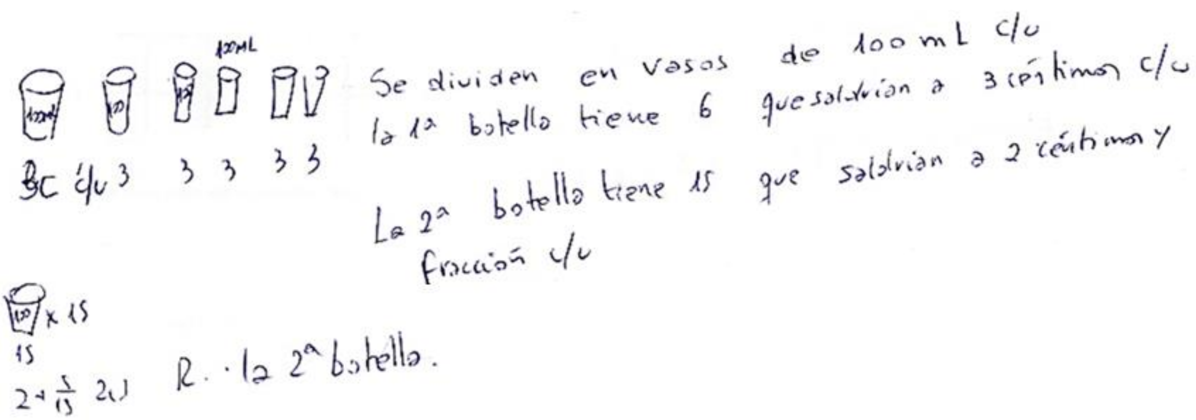


*Figura 2.* Resolución de P1 para ítem 1

**Ítem 2: Cajas**

Los profesores activaron en este problema las componentes que se ven en la Figura 3.

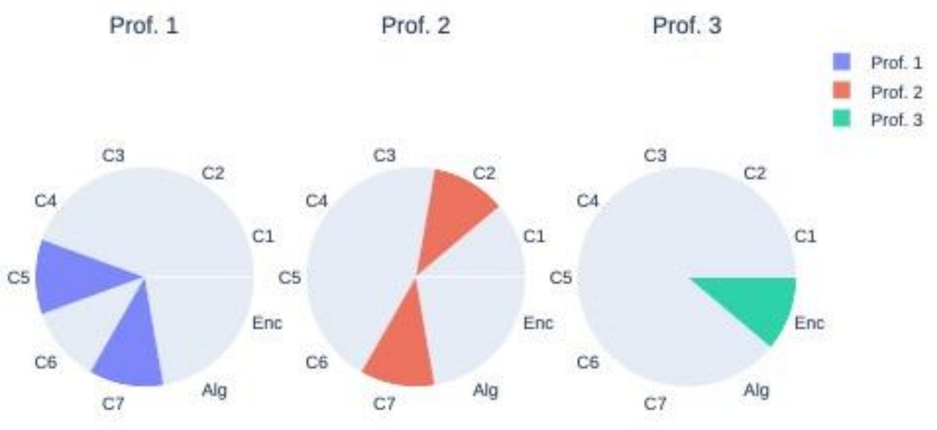


*Figura 3.* Componentes activadas por los profesores ítem 2

En este caso surgieron distintas estrategias. El profesor P1 imagina que introduce la caja cilíndrica dentro de la cúbica concluyendo que la caja cúbica utiliza más cinta, por su forma cuadrada (figura 4). Por lo tanto, activa las componentes 5 y 7, al utilizar una representación pictórica diferente a la entregada, mostrar una estrategia y reconocer que su respuesta es satisfactoria. P2 pensó algo similar al concluir que la caja A necesitaba más cinta pues "al ser un cuerpo plano debe llegar a los bordes (aristas) para seguir rodeándolo". En este caso activó las componentes 2 y 7 al resolver el problema, estimando que la medida del contorno del cuadrado interior es mayor que la medida del contorno de la circunferencia interior del cilindro, por tener "bordes", por lo que plantea una estrategia y su respuesta es satisfactoria. Por otro lado, P3, resolvió el problema calculando la cantidad total de cinta que se necesitaría para la caja cúbica, pero al calcular la cantidad de cinta que utilizará para la caja cilíndrica argumenta que sumó el diámetro 4 veces con la altura y el contorno, y que con eso obtiene que necesitará más cinta para la primera caja. Si bien la respuesta es correcta, su estrategia no fue clara al comparar el contorno y, por lo tanto, no es posible determinar qué componente se activó. Cabe destacar que, para esta pregunta, P2 explicita no recordar la fórmula para calcular el perímetro de una circunferencia, por lo que su respuesta es fiel al sentido numérico que posee.

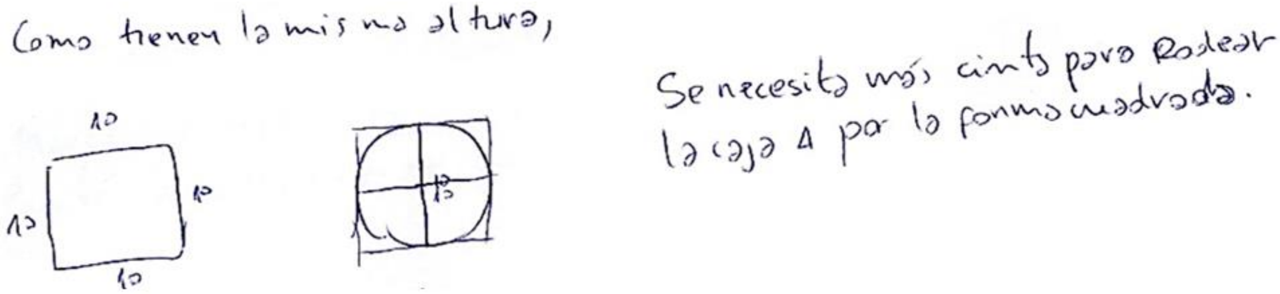


*Figura 4*. Resolución de P1 para ítem 2

**Ítem 3: Cinta de colores**

Los resultados de las componentes activadas se muestran en la Figura 5.

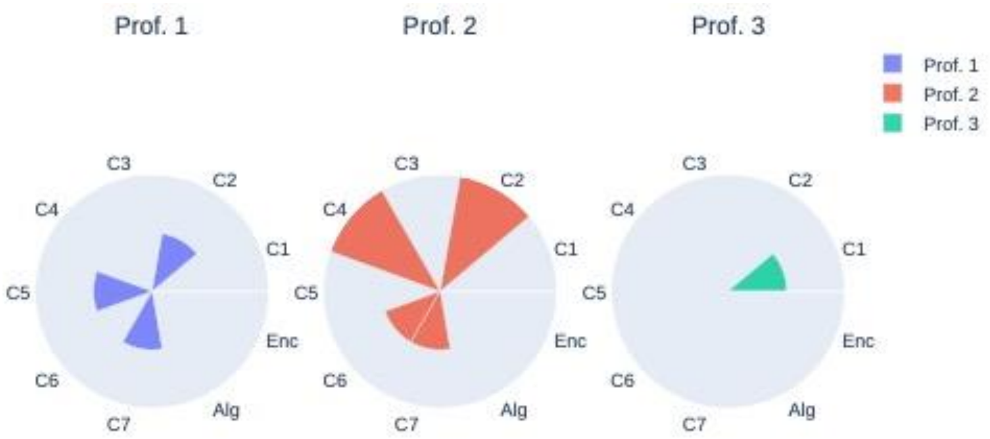


*Figura 5*. Componentes activadas por los profesores ítem 3.

Para los profesores fue un problema difícil de resolver, en el caso de P1 el primer impulso fue igualar denominadores, pero eligió recurrir a otra estrategia para no aplicar al algoritmo de la multiplicación (Figura 6). Responde bien al problema, sin embargo, con la estrategia utilizada confunde el concepto de fracción, pues considera unidades de referencia de distintos tamaños. Su argumento consiste en que Victoria utiliza 30 cuadraditos de 31 y María utiliza 36 cuadraditos de 37, pero asume todos los cuadraditos de igual medida. Así, P1 activa la componente 5 al realizar la representación gráfica, pero con error. Además, dado que la forma gráfica es una buena estrategia para comparar números racionales, activa las componentes 2 y 7, también con error.

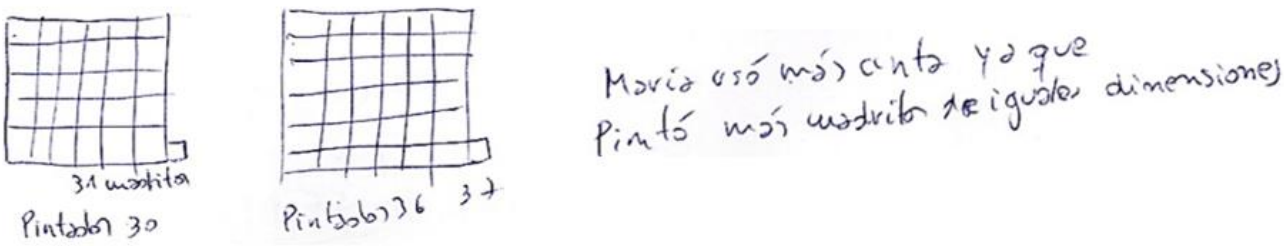


*Figura 6*. Resolución de P1 para ítem 3

En el caso de P2, recurre a la multiplicación cruzada como forma de mostrar que 30·37 es más o menos lo mismo que 31·36, asumiendo que aumentar una unidad en uno de los factores es lo mismo que disminuir una unidad en el otro, pero falla al confundir la igualdad con aproximación.

Al aplicar la propiedad fundamental de las proporciones, sin utilizar directamente el algoritmo de la multiplicación, P2 activa la componente 6. Además, debido a que usa la descomposición de los factores e intenta desarrollar una estrategia para comparar fracciones, activa las componentes 2 y 4. Por otra parte, si bien desarrolla una estrategia apropiada para obtener una estimación, no evalúa la pertinencia del resultado, activando parcialmente la componente 7.

En el caso de P3, su argumento se puede ver en la Figura 7.

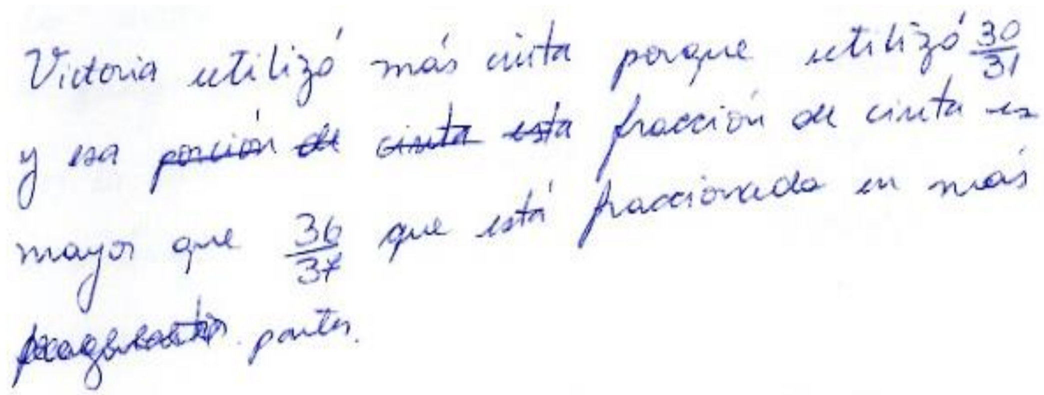


*Figura 7.* Resolución de P3 para ítem 3

En este caso P3 activa la componente 1, al usar el denominador de la fracción para identificar la cantidad total de partes, sin embargo, falla al no considerar en la comparación la cantidad de partes usadas, que indica el denominador.

### Ítem 4: Área de una sala

Para este problema, debían recurrir a puntos de referencia que les permitieran estimar las medidas de la sala. Los resultados obtenidos se pueden ver en la Figura 8.


*Figura 8.* Componentes activadas por los profesores ítem 4

En este caso P1 y P3 utilizaron de referencia la medida de las baldosas, consideraron que cada una de ellas era de 30 cm por 30 cm, hicieron la cuenta de 16 baldosas de largo por 13 o 14 de ancho. P1 utiliza el algoritmo de la multiplicación para poder calcular el área y P3 utiliza simple estimación. De esta forma P1 estima un área de $19m^2$ y P3 de $16m^2$, sin embargo, no es claro cómo P3 llega a esa estimación. Por otro lado, P2 utiliza como referencia pasos de 1m de largo, obteniendo que la sala tiene dimensiones de 6 m por 7 m y, por lo tanto, un área de $42m^2$, lo que se aleja bastante de la realidad ($25{,}4584m^2$).

En este caso, los tres profesores activaron las componentes 2 y 3, claro que la estimación de P2 es bastante lejana a la original, por lo que su resolución se considera con error. Cabe destacar que P3 elige primeramente la estrategia de medir con pasos, pero el resultado excede lo que cree que mide la sala, por lo que cambia a la estrategia de las baldosas (Figura 9), de esta manera, P1 y P3 también activan exitosamente la componente 7.

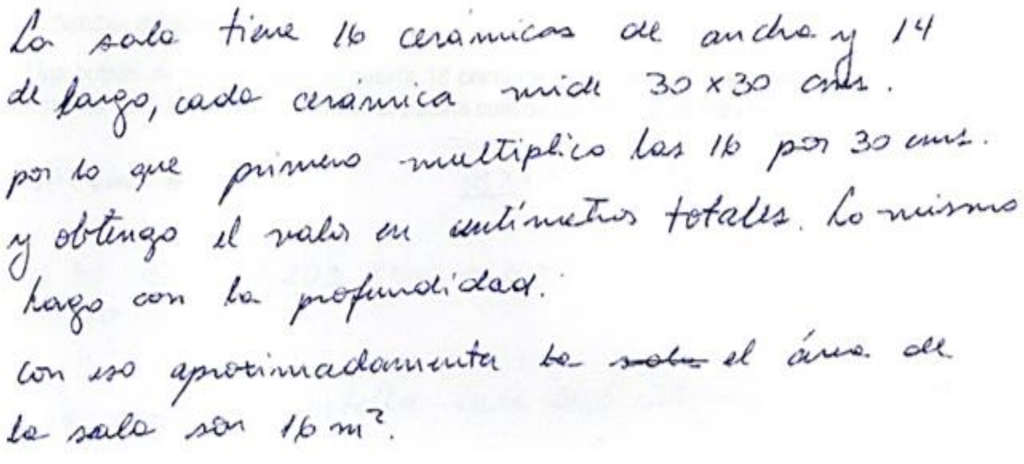
La sala tiene 16 cerámicas de ancho y 14 de largo, cada cerámica mide 30 x 30 cms. por lo que primero multiplico las 16 por 30 cms. y obtengo el valor en centímetros totales. Lo mismo hago con la profundidad. Con eso aproximadamente ~~la sala~~ el área de la sala son 16 m².

*Figura 9.* Resolución de P3 para ítem 4

**Ítem 5 y 6: Nube de puntos**

Los 3 profesores activaron las mismas componentes para estos 2 ítems, las que se muestran en la Figura 10.


*Figura 10.* Componentes activadas por los profesores ítems 5 y 6.

Los tres profesores lograron dar una buena aproximación de la línea de tendencia de la nube de puntos. Las estrategias utilizadas para escoger cada recta fueron las siguientes: P1 propuso unir la mayor cantidad de puntos en el plano sólo considerando la posición física de ellos; P2 trazó la recta pensando que era la más cercana al promedio entre la distancia de cada punto y la recta; y P3 la elige pues esa recta "pasa por los puntos promedio, abarca aproximadamente la misma ubicación central en cada coordenada, los puntos por los que pasa no varían respecto a coordenadas similares y permite marcar una tendencia al alza sin tanta fluctuación". Como se esperaba los tres profesores activaron la componente 3 y 7 al utilizar una regla mediante inspección visual y probar distintas rectas hasta elegir la que más se ajustara.

En el caso del ítem 6, los profesores utilizaron las mismas estrategias, a ninguno le complicó que el gráfico tuviera distintas graduaciones en los ejes, pues seguían pensando que eran sólo puntos y la posición de todos ellos marcaba por dónde pasaría la recta, sin la necesidad de observar las coordenadas en las que se encontraban, por lo tanto, las componentes activadas en este caso fueron las mismas (Figura 11). La mejor aproximación la realizó P3. Para el análisis se compararon las rectas estimadas (línea continua) con la recta entregada por el programa *Geogebra* que ajusta la nube de puntos (línea segmentada).

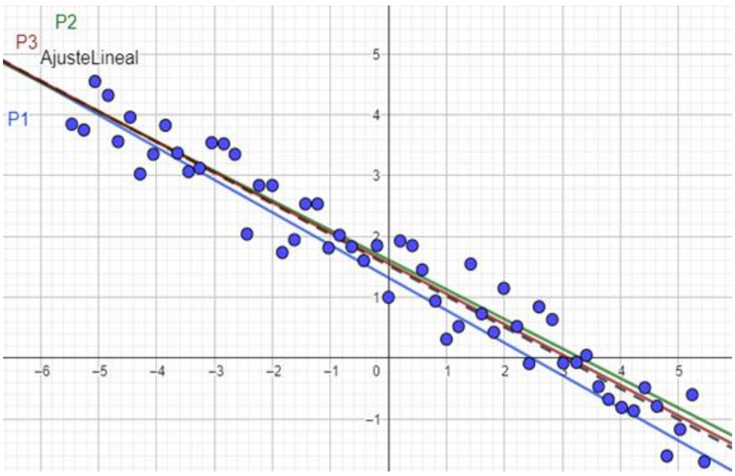


*Figura 11*. Líneas de tendencias realizadas por los profesores para el ítem 6

**Ítem 7: Punto visible en una nube**

Recordamos que, a partir de esta pregunta, los ítems se entregaron a través de la plataforma Moodle y, por lo tanto, no tenían la posibilidad de poder dibujar una recta con lápiz y papel. Para este problema el sentido numérico se activaría al elegir coordenadas de puntos como referencia y la dificultad radica en que los puntos de la nube no están en coordenadas enteras. Destacamos además que para los 3 profesores todas las nubes de puntos fueron diferentes.

A continuación, en la Figura 12 se muestran las componentes activadas por cada profesor:

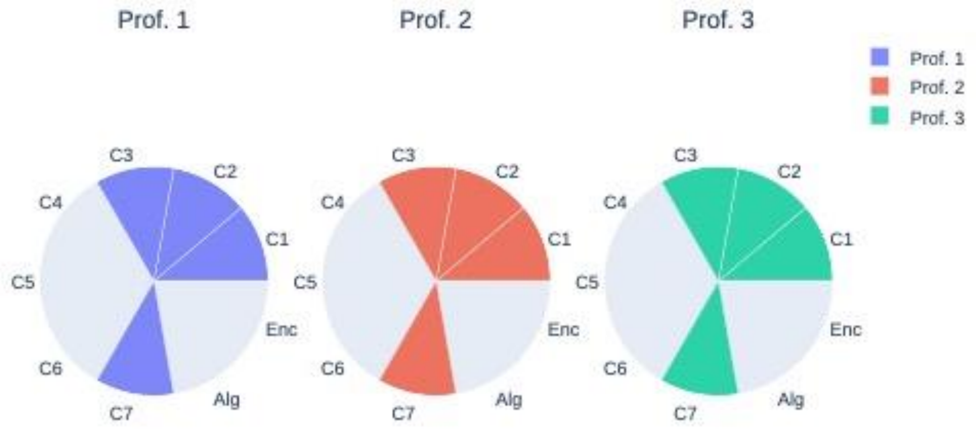


Figura 12. *Componentes activadas por los profesores ítem 7*

Para este ítem los profesores activaron las componentes 1, 2, 3 y 7, pues buscaron puntos de referencia para imaginarse la recta, determinaron cuál era la graduación de las líneas auxiliares del plano, para luego indicar las coordenadas de los puntos. Cabe destacar que todos los profesores eligieron puntos que estaban dentro de la tendencia de la nube, las estrategias utilizadas fueron las siguientes:

> P1: “Elegí el punto de coordenadas (2,8; 2) el criterio ocupado es que corresponde a un punto de valores intermedios a los pedidos y que además gráficamente pertenece a una línea recta que contiene una muestra de puntos representativa a la nube de puntos.”
>
> P2: “Elegí el punto (4, 4.5) porque según mi razonamiento o mi extensión visual que yo imagino, es la misma recta que yo dibujé, entonces estaría como pasando lo más cercano a todos los puntos”.

Destaca el punto escogido por P2, pues se encuentra bastante cerca de la línea de tendencia de la nube, y se ajusta con el razonamiento que utilizó. Además, cuando se le preguntó a P2 qué elementos del gráfico le ayudaron a darse cuenta, respondió:

> “Los puntos, todos porque yo tracé mi línea en el papel (refiriéndose a la pregunta anterior) fijándome en todos los puntos, tratando de que la recta fuera como un promedio de la distancia de los puntos”

Por último, P3 elige el punto (-0.25,-3), argumentando: “el entero está partido en 4” y “los otros eran más difíciles de ubicar al no estar exactos, todos iban a estar en cuartos”.

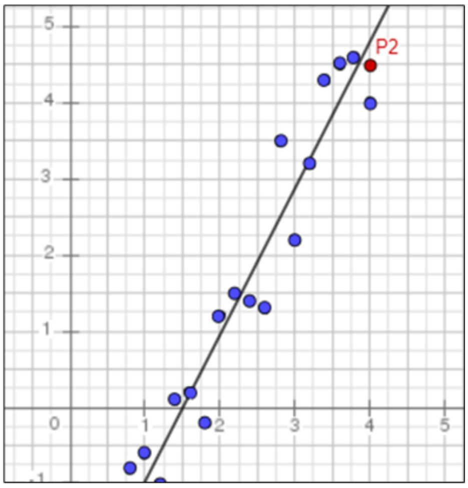


*Figura 13.* Ítem 7 para P2 con su línea de tendencia y el punto escogido.

**Ítem 8: Punto no visible en una nube**

La dificultad de este ítem radicaba en que debían proyectar el plano y con él la nube de puntos. La estrategia elegida determinaría la activación correcta de la componente 7, además se esperaba que se activaran las componentes del ítem anterior. Los resultados se muestran en la Figura 14.

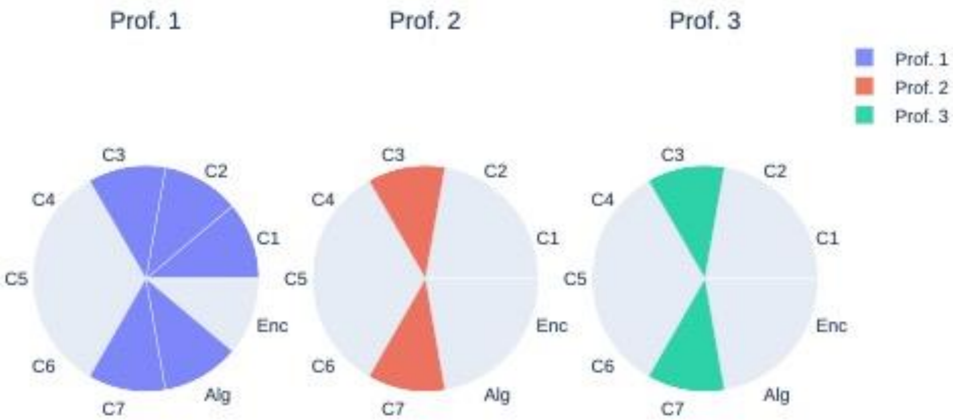


*Figura 14.* Componentes activadas por los profesores ítem 8

Para activar las componentes mostradas se identificaron distintas estrategias. En el caso de P1, argumenta su estrategia directamente en la plataforma como se muestra en la Figura 15.

> consideré 2 puntos con coordenadas conocidas estos son (-1,-5) y el punto (3; 3,2) y con ella obtuve la ecuación de una recta que pasa por los puntos, esta es y = 2,05x -2,95, con la ecuación puedo proyectar un punto fuera de los valores de la cuadrícula y en la tendencia de la nube de puntos, este punto es de coordenadas (8, 13,45).

*Figura 15.* Estrategia utilizada por P1 para el ítem 8

P1 resuelve el problema, primero activando las mismas componentes que en el problema anterior (elegir un punto en la nube) y luego aplicando el algoritmo de la ecuación de la recta dadas dos puntos. Cabe destacar que para los cálculos pidió utilizar lápiz y papel. P2: Elige el punto (-2,-6) y cuando se le pregunta por la estrategia utilizada responde:

> P2: "La misma que la anterior, o sea, como trazar una línea visual mentalmente que atraviese como entremedio a todos los puntitos, o sea no entremedio de todos los puntitos, me refiero a la nube"

Además, comenta que el que los puntos estuvieran más juntos facilitó su elección. P2 activa las componentes 3 y 7, creando una estrategia para la estimación del punto. Si bien es cierto que utiliza todos los puntos para trazar la recta, esto lo hace sin considerar las coordenadas de estos puntos, por lo que la nube pasa a ser sólo un dibujo, pero para poder dar la coordenada del punto escogido, proyecta los ejes tomando como referencia las coordenadas sobre los ejes, activando las componentes 3 y 7.

> P3: "Elegí el punto (-3,-7). Vi la tendencia de los puntos y la extendí hacia abajo y hacia la izquierda e intenté ubicarlo en un lugar promedio entre los ejes x e y negativo"

**Ítem 9 y 10: Punto visible y no visible en gráficos heterogéneos.**

Al preguntar a los tres profesores si la diferencia de la graduación de los ejes les dificultó, mencionaron que no, pues seguían trabajando con la misma estrategia, por lo que elegir puntos y obtener la ecuación de la recta, imaginarse la recta o extender la nube de puntos no fueron afectados por la escala del eje Y (Figura 16 y 17). Los profesores activan las mismas componentes de los ítems 7 y 8, sin embargo, P1 obtiene la ecuación de la recta con error (ítem 10), pues el punto escogido no pertenece a la nube de puntos. Llama la atención que no evaluó si el punto escogido pertenecía o no, ubicándolo en un cuadrante por el que notoriamente no pasaba la nube. En el mismo ítem, P3 elige el punto (6.5,-60), sin embargo, este punto se encuentra fuera de la nube de puntos. En ambos casos, P1 y P3 activan la componente 7 parcialmente, al no evaluar lo razonable de su respuesta.

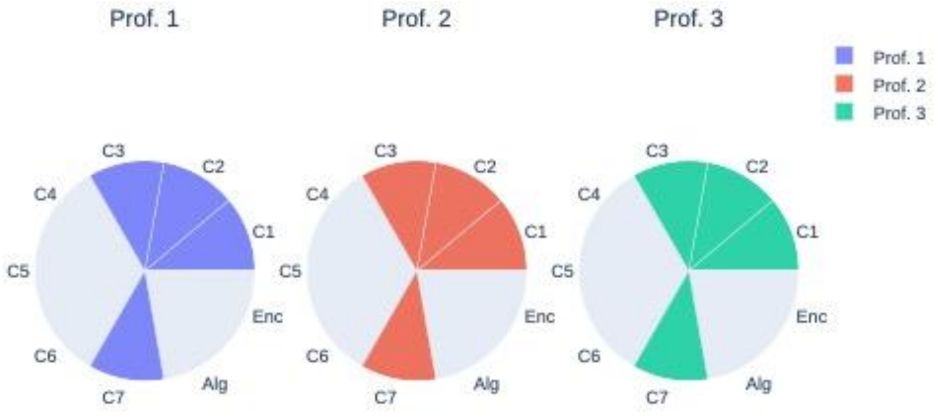


*Figura 16.* Componentes activadas por los profesores ítem 9

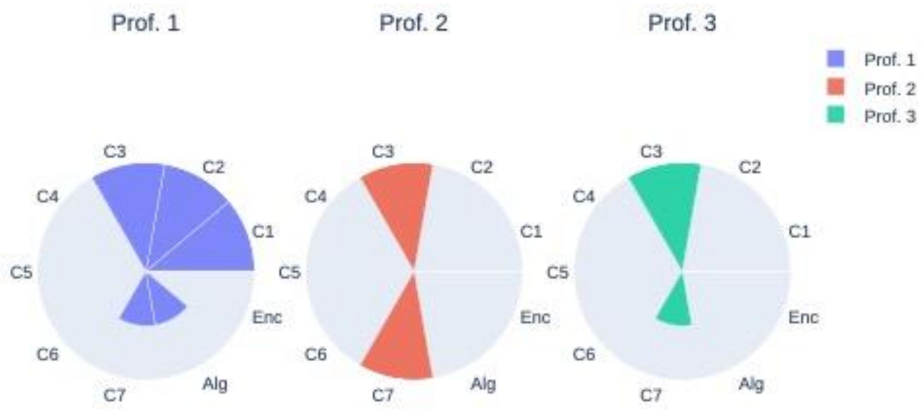


*Figura 17.* Componentes activadas por los profesores ítem 10

**Análisis por componentes del sentido numérico**

En la Tabla 4 se muestra la cantidad de veces que cada profesor activó cada componente del sentido numérico, se diferenció si la activó completamente (C) o con error o parcialmente (E).

Tabla 4. *Número de veces que se activaron las componentes del sentido numérico*

| PROFESOR | C1 | | C2 | | C3 | | C4 | | C5 | | C6 | | C7 | | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | C | E | C | E | C | E | C | E | C | E | C | E | C | E | |
| P1 | 4 | | 5 | 1 | 7 | | 1 | | 2 | 1 | | | 8 | 1 | 30 |
| P2 | 2 | | 4 | 1 | 6 | 1 | 1 | | | | 1 | 1 | 8 | | 25 |
| P3 | 2 | 1 | 3 | | 7 | | | | | | 1 | | 7 | 1 | 22 |
| TOTAL | 8 | 1 | 12 | 2 | 20 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 23 | 2 | |

De acuerdo con la tabla 4 hay dos componentes que se activaron en mayor proporción que las otras, la 7 y la 3. La componente 7 fue la más activada, lo que era esperable, pues se refiere al uso de estrategias apropiadas y a la evaluación de lo razonable de las respuestas. Esta componente, si bien debería haberse activado en cada uno de los problemas, no se activó en todas las respuestas, debido a que existían estrategias que no eran claras o bien no se evidenció en la resolución.

La componente número 3, tiene relación con la utilización de puntos de referencias, se activó en el reconocimiento de puntos en el plano fuera de la zona visible, utilizar medidas cómodas para estimar las longitudes de una sala o bien considerar algunos puntos para trazar una recta de tendencia, ítems en que era esperable su aparición. Llama la atención que esta componente se activó solo de forma concreta, geométrica y ningún profesor la activó en el ítem 3, buscando una fracción de referencia para ayudarse en la comparación.

Por otro lado, tenemos que las componentes 4, 5 y 6 fueron a las que menos recurrieron los profesores, esto se puede deber a que se utilizaron pocos ítems asociados a priori con estas componentes. Esto resulta discutible, pues a través de este estudio se evidencia que es posible activar más de una componente para resolver un mismo problema, y que la elección de la componente depende principalmente de la estrategia que utilice quién resuelve el problema. De esta manera llama la atención que la componente 5 (utilización de distintas representaciones) fuera la única componente activada sólo por un profesor.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

En esta investigación estudiamos cómo tres profesores en activo, que realizan clases en distintos niveles educativos, activan componentes del sentido numérico al resolver problemas de números, geometría y datos. De acuerdo con las respuestas obtenidas en los distintos ítems, se observó que en varios de ellos se activaron las componentes esperadas inicialmente, sin embargo, también aparecieron estrategias relacionadas con otras componentes. Esto concuerda con lo ocurrido en la investigación de Almeida et al. (2014) y demuestra que las componentes del sentido numérico son estrategias personales y, por lo tanto, dependen del resolutor de problemas y no del problema en sí. Además, en contraste con Yang et al. (2008), en esta investigación la utilización de puntos de referencia fue una de las componentes más activadas, lo cual puede deberse a la cantidad de preguntas relacionadas a identificar puntos en el plano, pues fue en esas preguntas donde tuvo su mayor activación. Si bien se observó el uso de sentido numérico, surgieron varios errores y dificultades en la resolución de los problemas por parte de los profesores, lo que coincide con los hallazgos de Courtney-Clarke y Wessels (2014). Al igual que en los resultados de Almeida et al. (2014), la utilización de distintas representaciones de números y operaciones (componente 5) fue activada sólo por un profesor, lo que podría apuntar a que los profesores de enseñanza básica del estudio se sienten más cómodos con la utilización de estrategias más narrativas.

Conforme se avanzó en el análisis se hizo evidente la transversalidad de la componente 7, pues al referirse a desarrollar estrategias adecuadas, debe activarse, al menos parcialmente. Este carácter parcial obedece a que eventualmente podría no activarse el evaluar lo razonable de la respuesta. En consecuencia, es probable que cada vez que una persona genere o diseñe estrategias pertinentes para enfrentar un problema se activará la presencia de la componente 7.

Es importante hacer notar que el profesor de enseñanza media, quien tiene una preparación matemática mayor, fue quien activó una mayor cantidad de componentes, le siguió el profesor con mención en matemática y, finalmente, quien activó menos componentes fue el profesor de PGB sin mención, lo cual es consistente con lo ocurrido en el estudio de Almeida et al. (2014) cuando mencionan que los profesores con una mayor formación matemática tienen más estrategias para enfrentarse a este tipo de problemas. Este hecho es interesante, pues se esperaba que los profesores de básica, al utilizar con menos frecuencia fórmulas algorítmicas en sus prácticas, recurrieran en mayor medida al sentido numérico o estrategias de estimación.

Como posibles proyecciones del estudio, podría aumentarse la cantidad de profesores como sujetos de estudios y utilizar con ellos las componentes propuestas por Faulner (2009), para analizar no sólo cómo los profesores despliegan sentido numérico al resolver problemas, sino que también cómo promueven el desarrollo del sentido numérico de sus estudiantes.

## AGRADECIMIENTOS

Este artículo recibió financiamiento del Proyecto Fondecyt de Iniciación Nº 11230953. Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID), Chile.

## REFERENCIAS

Almeida, R., y Bruno, A. (2014). Respuestas de estudiantes de secundaria a tareas de sentido numérico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 127-136). Salamanca: SEIEM.

Almeida, R. y Bruno, A. (2016). Uso de puntos de referencia y de representaciones gráficas para resolver tareas numéricas en secundaria. PNA, 10(3), 191-217. https://doi.org/10.30827/pna.v10i3.6088

Almeida, R., Bruno A., y Perdomo, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(2), 9-34. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.997

Blum, W., y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects. State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68. https://doi.org/10.1007/BF00302716

Berch, D. B. (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for Children With Mathematical Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 333-339. https://doi.org/10.1177/00222194050380040901

Cain, C., Faulkner, V., y Fanelli, K. (2020). Developing number sense through an exploration of subtraction. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *25*(2), 26-30.

Carlson, M. y Bloom, I. (2005). The Cyclic Nature of Problem Solving: An Emergent Multidimensional Problem-Solving Framework. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(1), 45-75. https://doi.org/10.1007/s10649-005-0808-x.

CPEIP. (2021). Estándares de la Profesión Docente Carreras de Pedagogía en Matemática Educación Media. https://hdl.handle.net/20.500.12365/17598

CPEIP. (2022). Estándares pedagógicos y disciplinarios para carreras de Pedagogía en Educación General Básica. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/educacion-general-basica/

Courtney-Clarke, M., y Wessels, H. (2014). Number sense of final year pre-service primary school teachers. *Pythagoras*, *35*(1). https://doi.org/10.4102/pythagoras.v35i1.244

DeBellis, V. A., y Goldin, G. A. (2006). Affect and Meta-Affect in Mathematical Problem Solving: a Representational Perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 131–147. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9026-4

Decreto 352 del 2004. Reglamenta ejercicio de la función docente. 9 de octubre de 2003. Obtenida de https://bcn.cl/2w0z8.

Dehaene, S. (2001). Précis of The Number Sense. *Mind & Language*, *16*(1), 16–36. Portico. https://doi.org/10.1111/1468-0017.00154

Faulkner, V. (2009). The components of number sense: An instructional model for teachers. *Teaching Exceptional Children*, *41*(5), 24-30.

https://doi.org/10.1177/004005990904100503

Gaona, J., Soledad, S. y Montoya-Delgadillo, E. (2022) Prospective mathematics teachers learning complex numbers using technology, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2133021

Ghazali, M., Othman, A. R., Alias, R., & Saleh, F. (2010). Development of teaching models for effective teaching of number sense in the Malaysian primary schools. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *8*, 344-350. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.048

Gelman, R., y Meck, B. (1992). Early principles aid initial but not later conceptions of number. In J. Bideaud, C. Meljac, & J.-P. Fischer (Eds.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (pp. 171–189). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Godino, J. D., Font, V., Konic, P., y Wilhelmi, M. R. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. *Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico*, 117-184.

Goltz, S. M., Hietapelto, A. B., Reinsch, R. W., y Tyrell, S. K. (2008). Enseñar el trabajo en equipo y la resolución de problemas al mismo tiempo. *Revista de Educación Gerencial*, *32*(5), 541-562. https://doi.org/10.1177/1052562907310739

Goos, M., Galbraith, P. y Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 193–223. https://doi.org/10.1023/A:1016209010120

Greeno, J. G. (1991). Number Sense as Situated Knowing in a Conceptual Domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 170–218. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.22.3.0170

Griffin, S. (2004). Teaching Number Sense. *Educational Leadership*, *61*(5), 39-42.

Guzmán, B., Rodríguez, C., Sepúlveda, F., y Ferreira, R. A. (2019). Number sense abilities, working memory and RAN: A longitudinal approximation of typical and atypical development in Chilean children. *Revista de Psicodidáctica (English ed.)*, *24*(1), 62-70. https://doi.org/10.1016/j.psicoe.2018.11.003

Halberda, J., y Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the "number sense": The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1457–1465. https://doi.org/10.1037/a0012682

Hollebrands, K. F., Conner, A., y Smith, R. C. (2010). The Nature of Arguments Provided by College Geometry Students With Access to Technology While Solving Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(4), 324–350. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.4.0324

Jordan, N. C., Glutting, J., y Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 82–88. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.07.004

Kaminski, E. (1997). Teacher education students' number sense: initial explorations. *Mathematics Education Research Journal*, *9*(2), 225–235. https://doi.org/10.1007/bf03217312

Lewis, K. E., Sweeney, G., Thompson, G. M., y Adler, R. M. (2020). Integer number sense and notation: A case study of a student with a mathematics learning disability. *The Journal of Mathematical Behavior, 59,* 100797. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100797

Ley 20.370 del 2005 [Ministerio de Educación de Chile]. Fija texto refundido, coordinado y sistematizado de la ley nº20.370 con las normas no derogadas del decreto con fuerza de ley nº 1, de 2005. 16 de diciembre 2009. Obtenida de https://bcn.cl/2me2r

Ley 20.903 del 2016 [Ministerio de Educación de Chile]. Crea el sistema de desarrollo profesional docente y modifica otras normas. 01 de abril de 2016. https://bcn.cl/2mo48

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., y Bruder, R. (2016). Problem solving in mathematics education. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2

Louange, J.E., y Bana, J. (2010). The Relationship between the Number Sense and Problem Solving Abilities of Year 7 Students. *Mathematics Education Research Group of Australasia, 33,* 376-382.

Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Londres: Addison Wesley.

Mazzocco, M. M., Feigenson, L., y Halberda, J. (2011). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (dyscalculia). *Child development, 82*(4), 1224-1237. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2011.01608.x

McIntosh, A., Reys, B. y Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. For the Learning of Mathematics. 12. 2-8.

Ministerio de Educación (2015). Bases curriculares 7° Básico a 2° Medio.

Ministerio de Educación (2018). Bases curriculares 1° Básico a 6° Básico.

Ministerio de Educación (2019). Bases curriculares 3° y 4° Medio.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Noviyanti, M., y Suryadi, D. (2019). Conceptualizing mathematical knowledge for teaching of Indonesian teacher in teaching number sense to early childhood. *Journal of Physics: Conference Series, 1157,* 032121. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/3/032121

OECD (2014), PISA 2012 Results: Creative Problem Solving (Volume V): Students' Skills in Tackling Real-Life Problems, PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/9789264208070-en.

Orrill, C. H., y Brown, R. E. (2012). Making sense of double number lines in professional development: Exploring teachers' understandings of proportional relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15,* 381-403. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9218-z

Pólya, G. (1945). How to solve it. New Jersey: Princeton University.

Praet, M., Titeca, D., Ceulemans, A., y Desoete, A. (2013). Number Sense in Siblings of Children with Mathematical Learning Disabilities: A Longitudinal Study. *Journal of Intellectual Disability - Diagnosis and Treatment, 1*(1), 67–73.

https://doi.org/10.6000/2292-2598.2013.01.01.8

Rodríguez-Jara, M., Vergara-Gómez, A., Mondaca-Saavedra, A., y Gregori-Huerta, P. (2023). Taller de resolución de problemas no rutinarios para estudiantes de 8 a 9 años: un estudio de caso. *Uniciencia, 37*(1), 519-541. https://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.28

Rodríguez-Nieto, C. A., Font, V., Rodríguez-Vásquez, F. M., y Pino-Fan, L. R. (2023). Onto-semiotic analysis of one teacher's and university students' mathematical connections when problem-solving about launching a projectile. *Journal on Mathematics Education*, *14*(3), 563-584. https://doi.org/10.22342/jme.v14i3.pp563-584

Sanfiel, L., Díaz, J. P., y Bruno, A. (2021). Relaciones numéricas establecidas por alumnado de primaria. In *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 563-570). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Sengül, S. (2013). Identification of Number Sense Strategies used by Pre-service Elementary Teachers. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *13*(3), 1965-1974.

Sianturi, I., Ismail, Z., y Yang, D. (2023). Examining fifth graders' conceptual understanding of numbers and operations using an online three-tier test. *Mathematics Education Research Journal*, https://doi.org/10.1007/s13394-023-00452-2

Sharma, M. (2016, September 19). Working memory: Role in mathematics learning (Part one). Recuperado de: https://mathlanguage.wordpress.com/2016/09/19/working-memory-role-in-mathematics-learning/

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, *3*(29), 75-80.

Sowder, J. T., y Schappelle, B. P. (1989). Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics: Report of a Conference (San Diego, California, February 16-17, 1989).

Stake, R. E. (2020). Investigación con estudio de casos. *Investigación con estudio de casos*, 1-156.

Szabo, A., Tillnert, A.-S., y Mattsson, J. (2024). Displaying gifted students' mathematical reasoning during problem solving: Challenges and possibilities. *The Mathematics Enthusiast*, *21*(1–2), 179–202. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1623

Tsao, Y.L. (2004). Effects Of A Problem-Solving-Based Mathematics Course On Number Sense Of Preservice Teachers. *Journal of College Teaching & Learning (TLC)*, *1*(2). https://doi.org/10.19030/tlc.v1i2.1913

Whitacre, I., y Nickerson, S. D. (2014). Investigating the improvement of prospective elementary teachers' number sense in reasoning about fraction magnitude. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(1), 57–77. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9295-2

Yaman, H. (2015). The Mathematics Education I and II Courses' Effect on Teacher Candidates' Development of Number Sense. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *15*(4), 1119-1135.

Yang, D.-C., Li, M., y Lin, C.-I. (2007). A Study of the Performance of 5th Graders in Number Sense and its Relationship to Achievement in Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education,* *6*(4), 789–807. https://doi.org/10.1007/s10763-007-9100-0

Yang, D.C., y Hsu, C. J. (2009). Teaching number sense for 6th graders in Taiwan. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(2), 92-109. https://doi.org/10.29333/iejme/232

Yang, D.-C., Reys, R. E., y Reys, B. J. (2008). Number Sense Strategies Used by Pre-Service Teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(2), 383–403. https://doi.org/10.1007/s10763-007-9124-5

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (Vol. 5). Sage.

Carolina Bravo-Ávila
Universidad Católica del Maule, Talca, Chile
bravoavilacarolina@gmail.com

Andrea Vergara-Gómez
Universidad Católica del Maule, Talca, Chile
avergarag@ucm.cl

Jorge Gaona
Universidad de Playa Ancha de Ciencias de la Educación, Valparaíso, Chile
jorge.gaona@upla.cl