Pérez-Peña, E., Vega-Domínguez, F. y Vega-Castro, D. (2025). Sentido estructural en la reproducción algebraica de estructuras numéricas. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 8*(1), 37-52

ISSN: 2603-9982

SENTIDO ESTRUCTURAL EN LA REPRODUCCIÓN ALGEBRAICA DE ESTRUCTURAS NUMÉRICAS

Elías Pérez-Peña, Universidad de Panamá, Panamá

Félix Vega-Domínguez, Universidad de Panamá, Panamá

Danellys Vega-Castro, Universidad de Panamá, Panamá

Resumen

Existen variadas investigaciones realizadas con estudiantes de Educación Secundaria que señalan una diversidad de dificultades confrontadas por estos en lo que refiere al dominio y comprensión de las matemáticas. Esta situación conllevó a investigar si el origen de estas dificultades presentadas en estudiantes de séptimo grado proviene específicamente del manejo de las estructuras inmersas, tanto en expresiones numéricas como algebraicas. En este sentido, el objetivo propuesto consistió en analizar el enfoque estructural adoptado por estudiantes de de educación secundaria al reproducir expresiones aritméticas equivalentes que involucran propiedades de suma y producto, siguiendo un patrón determinado. Dada su relación con el constructo Sentido Estructural se siguió como metodología el enfoque de trabajos realizados por Vega-Castro, Molina y Castro (2010-2013).
La investigación realizada permitió observar cierto número de debilidades en el manejo de estructuras tanto aritméticas como algebraicas, situación que conlleva a la búsqueda del fortalecimiento de los distintos elementos subyacentes en dichas estructuras.

Palabras clave: *Estructura, relaciones internas, propiedades, patrones, generalización.*

Structural sense in the algebraic reproduction of numerical structures

Abstract

Various studies conducted with secondary school students point to a variety of difficulties they face in mastering and understanding mathematics. This situation led to an investigation into whether the origin of these difficulties presented by seventh-

Recibido: 13/12/2024; Aceptado: 30/04/2025

grade students stems specifically from the handling of embedded structures, both in numerical and algebraic expressions. In this regard, the proposed objective was to analyze the structural approach adopted by secondary school students when reproducing equivalent arithmetic expressions involving sum and product properties, following a specific pattern. Given its relationship with the construct of Structural Sense, the methodology followed was the approach of work conducted by Vega-Castro, Molina, and Castro (2010-2013).
The research conducted revealed several weaknesses in the handling of both arithmetic and algebraic structures, a situation that leads to the search for ways to strengthen the various elements underlying these structures.

Keywords*: Structure, internal relationships, properties, patterns, generalization.*

INTRODUCCIÓN

Los fundamentos básicos de matemática adquiridos por los estudiantes en el primer nivel de educación secundaria son de vital importancia para su dominio y comprensión en los consecuentes años de estudio. Sin embargo, cada día se observa un aumento en las necesidades de estos dos factores en los estudiantes, situación que ha motivado a investigar si la procedencia de las dificultades en el dominio y comprensión de las matemáticas se origina en el manejo de las estructuras inmersas, tanto en expresiones numéricas como algebraicas. Para el logro de esta investigación se propuso como objetivo analizar el enfoque estructural adoptado por estudiantes de séptimo grado de educación secundaria al reproducir expresiones aritméticas equivalentes que involucran propiedades de suma y producto, siguiendo un patrón determinado. Con este objetivo se propuso investigar la forma de cómo los estudiantes conciben las expresiones aritméticas y algebraicas y la forma que utilizan para reproducirlas de acuerdo con un patrón dado.

De acuerdo con planteamientos curriculares de NCTM (2003) en el estándar para la educación matemática para la etapa 6 – 8, que se corresponde con los niveles VI, VII y VIII grado en nuestro país, se sugiere que los programas de enseñanza deberían capacitar a todos los estudiantes para comprender patrones, relaciones y funciones, así como representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos. Una de las expectativas que se destaca en los planteamientos que señalan es analizar y generalizar una serie de patrones mediante reglas simbólicas. También, se señala que los estudiantes de estos niveles deberían "relacionar y comparar distintas formas de representación de una relación e iniciar la comprensión conceptual de los diferentes usos de las variables" (NCTM, 2003, p.226). Se sugiere que los estudiantes deben mostrar capacidad para reconocer patrones y estructuras con el propósito de determinar regularidades en las expresiones, así como proponer generalizaciones y conjeturas acerca de las regularidades observadas.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Motivados por investigar el origen de las dificultades de nuestros estudiantes en el dominio y la comprensión de expresiones matemáticas, y luego de una extensa revisión de la literatura en Educación Matemática se consideró seguir el enfoque presentado en trabajos realizados por Vega-Castro, Molina y Castro (2010-2013), que tratan acerca del constructo Sentido Estructural. Una de las interrogantes que surge, atendiendo al enfoque estructural, expresa ¿qué tipo de enfoque estructural poseen los estudiantes de séptimo grado cuando analizan expresiones aritméticas equivalentes y las reproducen de acuerdo con un patrón determinado?

MARCO TEÓRICO

La revisión de la literatura expresa que el prestar atención a las características particulares de las expresiones implica atender las estructuras, y cuando esta última se utiliza para abordar la resolución de una actividad propuesta, se dice que se ha utilizado un enfoque estructural (Molina, 2010), mientras que cuando el estudiante activa en su mente algunos procedimientos aprendidos, sin atender a las características particulares de las expresiones involucradas en la expresión o igualdad propuesta se dice que ha utilizado el enfoque procedimental.

Estos dos enfoques están estrechamente ligados al conocimiento conceptual y conocimiento procedimental estudiados desde hace varias décadas por investigadores interesados en la cognición matemática (Hiebert y Wearne, 1986; Hiebert y Lefevre, 1986; Rittle-Johnson y Siegler, 1998) quienes han intentado entender cómo los escolares usan su conocimiento conceptual y procedimental para responder a preguntas de matemáticas, partiendo de la consideración de que no pueden ser totalmente competentes en matemáticas si son deficientes en alguno de estos dos tipos de conocimiento o si han adquirido ambos pero los mantienen como entidades separadas. Hiebert y y Lefevre (1986), indican que los escolares con rico conocimiento conceptual serán más flexibles en su elección de procedimientos para resolver problemas, ya que poseerán mayor comprensión de las relaciones entre las subestructuras de las expresiones.

Diferencias y dificultades del álgebra con la aritmética

Por otro lado, muchas de las investigaciones referidas al sentido estructural tratan de ver la relación que puede haber entre las dificultades del álgebra y las de la aritmética, enfocando su atención en las estructuras de las expresiones. El factor influyente en estas dificultades se debe a la transición de la aritmética al álgebra. Molina (2006) y Kieran (2006), a partir de la consulta de estudios previos, destacan importantes diferencias entre estas dos subáreas:

- En la aritmética se manipulan números fijos y se razona con cantidades conocidas, mientras que en el álgebra pueden ser variables o cantidades desconocidas.
- En la aritmética los símbolos corresponden a etiquetas o abreviaturas de un objeto mientras que en el álgebra representan variables, incógnitas o parámetros.
- En la aritmética predomina un significado operacional del signo igual (anunciando un resultado) mientras que en el álgebra se asume un significado relacional de este signo para representar equivalencia.
- Los problemas aritméticos son de tipo lineal con una incógnita mientras que los algebraicos pueden ser de grados superiores e implicar múltiples incógnitas.
- En el álgebra se aceptan expresiones no cerradas como representaciones apropiadas de resultados de operaciones.

En este sentido, Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2008) indican que los estudiantes, desde estudios primarios, han tenido acceso al uso de las letras en matemática cuando resuelven problemas con fórmulas geométricas, luego no se suele dar las letras con una interpretación algebraica, sino que se acostumbra a los alumnos a que las consideren como etiquetas que hacen referencia a entidades específicas o a la inicial de una palabra. Por ejemplo, se suele usar la letra b para referirse a la base; la A para el área; la h para la altura, etc. Posteriormente, en los estudios básicos de educación secundaria, las letras surgen con mayor frecuencia, en contextos no geométricos, y las expectativas del docente es que los alumnos ya no las consideren como etiquetas o iniciales de palabras, sino que las interpreten, en función de la expresión en la que aparecen, como incógnitas o números indeterminados. Ramos-Franco y Aké-Tec (2024) en estudio realizado expresan que los estudiantes que tienen mayor familiaridad con las letras se les facilita la articulación de la aritmética con el álgebra y por ende la generalización de patrones. El álgebra se describe como el estudio de patrones y relaciones funcionales entre cantidades, como un método para pensar sobre lo desconocido y para generalizar y representar relaciones usando un lenguaje simbólico (Hoch y Dreyfus, 2007). En esta misma línea Castro (2012) expresa que, en el aprendizaje del álgebra, surgen dificultades. Por ejemplo, la limitada interpretación del signo igual, las concepciones erróneas de los alumnos sobre el significado de las letras utilizadas como variables, el rechazo de expresiones no numéricas como respuestas a un problema y la no aceptación de la falta de clausura, generalmente atribuidas a la abstracción del álgebra.

Estructura de una expresión algebraica
De acuerdo con los teóricos, comprender puede interpretarse como ser capaz de percibir orden y estructura (Sfard, 2001). Esta autora afirma que, si ver la estructura es útil en cualquier dominio del conocimiento, en matemáticas puede ser la esencia misma del aprendizaje. Desde un punto de vista amplio, se puede decir que el término estructura se refiere a la forma en que una entidad se compone de partes, existiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen dicha entidad (Hoch y Dreyfus, 2004). En el nivel más global, la estructura se puede considerar como un tejido que contiene unido todo el conocimiento matemático. En un contexto más local, la palabra estructura hace referencia a su relación con la generalización y la abstracción, tornándose como sinónimo de patrón (Mamona-Downs y Downs, 2008).
Por su parte Hoch (2003) utiliza los términos forma y orden para referirse a las estructuras. Vega-Castro (2013) distingue dos tipos de estructuras de una expresión: la estructura externa e interna de una expresión algebraica. Según Hoch y Dreyfus (2004) la forma (estructura externa) está relacionada con la apariencia externa de una expresión algebraica y el orden (estructura interna) con las relaciones que mantienen los componentes de dichas expresiones entre sí y con otras estructuras. La estructura externa hace referencia a los términos que componen la expresión, los signos que los relacionan y el orden de los diferentes elementos. Por otra parte, la estructura interna se refiere al valor de la expresión y las relaciones entre los componentes de la expresión con el mismo. Dos expresiones que comparten estructura interna son equivalentes, y viceversa. Mediante el proceso de simplificación o transformación de una expresión, el cual implica un cambio de estructura externa, puede revelarse la estructura interna de la misma (Castro, 2012). Por ejemplo, de entre las siguientes expresiones, podemos decir que la a), b) y d) tienen la misma estructura interna y diferente estructura externa, mientras que la a) y c) tienen la misma estructura externa pero no interna, al no ser equivalentes.

a) $(x+3)^2$; b) x^2+9+6x; c) $(3x+6)^2$; d) $x^2+9x-3x+10-1$

Sentido estructural algebraico
Este término fue introducido por Linchevski y Livneh (1999) como reacción a la definición presentada por Kieran (1988) acerca del conocimiento estructural: capacidad de identificar todas las formas equivalentes de una expresión. Más tarde Hoch y Dreyfus (2004), elaboran progresivas definiciones de sentido estructural limitándose al contexto del álgebra escolar. La primera definición tentativa fue presentada por Hoch (2003) “reconocer la estructura algebraica y utilizar las características apropiadas de una estructura en un contexto dado como guía para elegir las operaciones a realizar” (p. 2). Hoch sugirió que un estudiante que se inclina por un método efectivo y minucioso en la transformación de una expresión algebraica está demostrando poseer buen sentido estructural.

Posteriormente Vega-Castro (2013) lo define como “*una competencia cognitiva o un conjunto de capacidades necesarias para el trabajo flexible con las expresiones algebraicas, más allá de la aplicación mecánica de procedimientos de transformación de las mismas*” (p. 83). Este conjunto de habilidades requiere el uso combinado de conocimiento conceptual (por ejemplo, el concepto de equivalencia) y procedimental (por ejemplo, la jerarquía de las operaciones). El no comprender las leyes de operaciones puede conllevar a obstáculos conceptuales y dificultar la generalización y el reconocimiento de patrones entre los números (Molina, 2006).

Relaciones, patrones y generalización

Las relaciones entre estructuras no implican un contenido a ser aprendido o memorizado (Hoch y Dreyfus, 2007). Los estudiantes deben comprender las relaciones entre los elementos antes de operar, y no seguir reglas sin razonamientos, las cuales no permiten fijar el conocimiento (Cancec-Murillo et al., 2024). Ligado a las relaciones entre estructuras, estudios han llevado a la conjetura de que los niños pequeños que han aprendido a buscar similitudes y diferencias matemáticas haciendo uso de patrones tienen la tendencia a desarrollar mayor comprensión de las estructuras tratadas (Mulligan y Mitchelmore, 2009), de esta forma habilidades de reconocimiento de patrón y estructura se correlacionan de forma muy positiva con el rendimiento matemático (Arcavi, 2003).
Cuando se detecta un patrón en el que algunas cosas están cambiando y otras se conservan igual, se da la oportunidad para expresar una generalización (Mason et al., 2005). La generalización es considerada una de las funciones principales del álgebra y para generalizar es necesario explorar situaciones, reconocer relaciones, organizar datos sistemáticamente, y generar patrones. Cañadas, Castro y Castro (2008) indican que la generalización depende, tanto de la detección, como de la identificación de un patrón adecuado y que la mayor parte de los alumnos que generalizan trabajan previamente en el sistema de representación numérico. Según señalamientos de Radford (2008), la generalización consiste en pasar de lo particular a lo general y en percibir lo general en lo particular. Señala que la generalización de patrones implica la toma de conciencia de una propiedad común; generalizar esta propiedad a todos los términos de la secuencia, y usar esa propiedad común para encontrar una regla que permita calcular directamente cualquier término de una determinada secuencia.

MARCO METODOLÓGICO

Bajo la consideración del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, se utilizó el enfoque de Sentido Estructural presentado en trabajos realizados por Vega-Castro, Molina y Castro (2010, 2012, 2013). Para tal efecto, la investigación propuesta se consideró de tipo mixta con carácter exploratorio, cuyo diseño es no experimental y se utilizó el método de muestreo por conglomerados para la selección de la muestra.

Siguiendo el enfoque propuesto por los autores, arriba indicados, el estudio consistió en analizar e interpretar el nivel de sentido estructural utilizado por estudiantes de séptimo grado al desarrollar estructuras numéricas y algebraicas. Se buscaba comprender cómo los estudiantes analizan matemáticamente una expresión numérica equivalente al momento de trabajarla. Esta acción se realizó con el propósito de intentar la búsqueda de estrategias que permitan mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática a nivel de séptimo grado y niveles superiores. El análisis de los datos se realizó mediante codificación cualitativa con ayuda del programa Maxqda 18 Analitic Profetional, de gran utilidad en el manejo de los datos cualitativos y cuantitativos.

La población muestreada estuvo conformada por ciento veinte estudiantes de educación secundaria procedentes de tres provincias del país. En torno a cada una de estas provincias se seleccionaron dos colegios, uno de ellos del sector oficial y otro del sector particular. Y en torno a cada colegio se escogió de entre varios grupos el grupo muestra que correspondía el horario de atención por un docente de matemática a la hora seleccionada para la aplicación del instrumento. Los grupos de clases en su mayoría estaban compuestos por aproximadamente veinte estudiantes, en los casos que el grupo contaba con más de veinte estudiantes la selección se realizó al azar, y dos de los grupos seleccionados solo contaban con diecinueve estudiantes. Se consideró estudiantes de séptimo grado en esta investigación, con el objetivo de observar el nivel de sentido estructural que poseen los estudiantes que llegan a las aulas de colegios de educación secundaria a nivel básico. Se contó con el apoyo del personal directivo de los colegios donde se aplicó los instrumentos. Ellos proporcionaron los planes de estudio de matemática de séptimo grado, los cuales fueron utilizados para el diseño de los problemas planteados en el instrumento, el cual a su vez fue validado por docente especialista internacional en esta área.

Descripción del instrumento propuesto

El instrumento aplicado a los estudiantes estuvo compuesto de dos actividades. En la primera el propósito considerado consistió en que el estudiante hiciera uso de la generalización y en la segunda, la actividad hacía referencia a completar espacios en blanco. Cada actividad constaba de cuatro ítems. En este reporte se presenta los resultados del trabajo realizado en la primera actividad del instrumento. Las expresiones de esta primera parte del instrumento se presentaban en forma simple o sencilla, no involucraban términos con grados de complejidad. La indicación propuesta en los cuatro primeros ítems quedó redactada de la siguiente forma:

Reproduce en forma numérica y algebraica la expresión presentada.

La Figura 1 muestra las expresiones numéricas que se presentaba a los estudiantes en la primera actividad y que los estudiantes tenían que reproducir dos veces, primeramente “Con números”, luego “Con letras” y finalmente sugería: “*Explica por qué crees que tu respuesta es correcta*”.

$$(5+3)\times(5-3)$$
$$(7+4)\times(7-4)$$
$$(23+19)\times(23-19)$$

Ítem 1

$$5\times 7 + 5\times 14 = 5\times(7+14)$$
$$7\times 10 + 7\times 20 = 7\times(10+20)$$
$$10\times 6 + 10\times 12 = 10\times(6+12)$$

Ítem 2

$$12\times(10-5) = 12\times 10 - 12\times 5$$
$$24\times(20-10) = 24\times 20 - 24\times 10$$
$$36\times(30-15) = 36\times 30 - 36\times 15$$

Ítem 3

$$12+(5+15) = (12+5)+15$$
$$20+(3+9) = (20+3)+9$$
$$18+(6+18) = (18+6)+18$$

Ítem 4

Figura 1. Ítems asignados en la primera actividad del instrumento diseñado.

Análisis de Datos

Se describe en esta sección el desempeño de los estudiantes en las categorías establecidas para los cuatro ítems propuestos. Se utilizó la escala numérica (Tabla No.1) establecida por Vega-Castro (2013). Esta escala atiende al grado en que el estudiante hace uso de la estructura para atender a la resolución de tareas propuestas.

Tabla 1. *Código numérico en la denominación de categorías para el análisis*

Código numérico	Descripción general
1	Corresponde a casos en los que el estudiante utiliza las relaciones internas de la expresión para resolver la tarea propuesta haciendo uso de la estructura de esta.
2	Corresponde a casos en los que el estudiante utiliza algunas de las relaciones internas de la expresión dada para resolver la tarea propuesta.
3	Corresponde a casos en que el estudiante no utiliza ninguna de las relaciones internas de la expresión dada en la resolución de la tarea.

En función de esta escala numérica se elaboró una categoría para el análisis del desempeño de los estudiantes al completar esta actividad del instrumento. Esta categoría hace referencia a los descriptores del sentido estructural propuestos por Vega-Castro (2013, pp. 88-90).

Categoría establecida en función de los ítems que se enuncian

La Tabla 2 presenta las características de una de las categorías establecidas "RE: Reproduce la estructura numérica y algebraica de la expresión presentada", y que a su vez fue dividida en subcategorías: RE-1, RE-2a, RE-2b y RE- 3.

Tabla 2. *Características de la primera categoría*

Categoría: RE: Reproduce la estructura numérica y algebraica de la expresión presentada.			
RE - 1	RE - 2a	RE - 2b	RE - 3
Reproduce la estructura numérica y algebraica de la expresión presentada.	Reproduce la estructura numérica, pero no la estructura algebraica de la expresión presentada.	No reproduce la estructura numérica, pero sí la estructura algebraica de la expresión presentada.	No reproduce la estructura numérica ni algebraica de la expresión presentada.
Nota: Se asignó las letras BC para codificar las respuestas donde los estudiantes no completaron el ítem, lo dejaron en blanco o fue considerado no codificable.			

Análisis y descripción del desempeño de los estudiantes.

La Figura 2 muestra el desempeño de los 118 estudiantes en el desarrollo del ítem 3 del instrumento asignado, elegido este ítem como modelo representativo de los ítems propuestos en la primera actividad del instrumento.

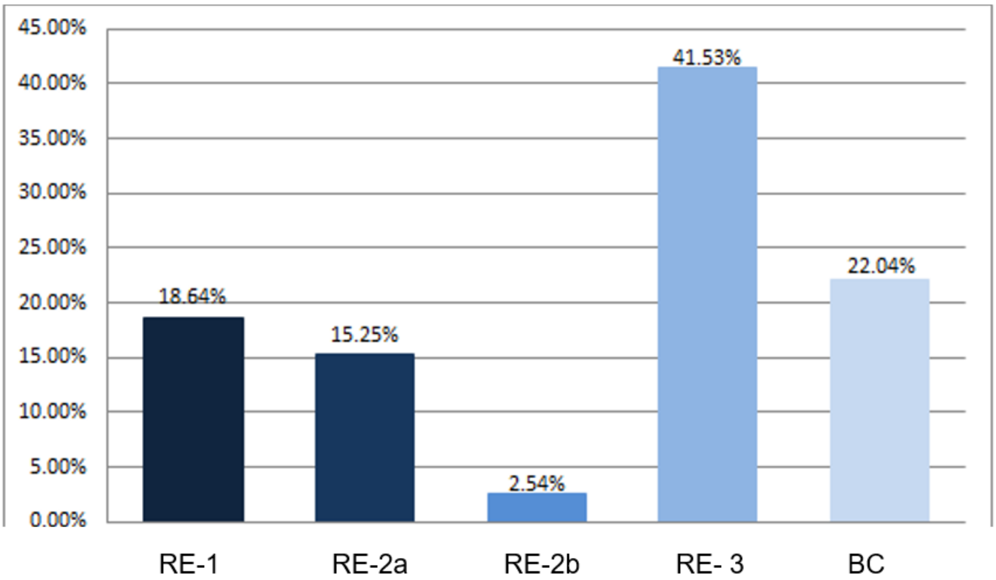

Figura 2. Desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

Primera Subcategoría (RE-1)

La primera columna de la gráfica No.1 corresponde a la subcategoría denominada: *Reproduce la estructura numérica y algebraica de la expresión presentada.* Se observa que el 18.64% (22 de 118) de los estudiantes reprodujeron correctamente la estructura numérica y algebraica (ver Imagen 3).

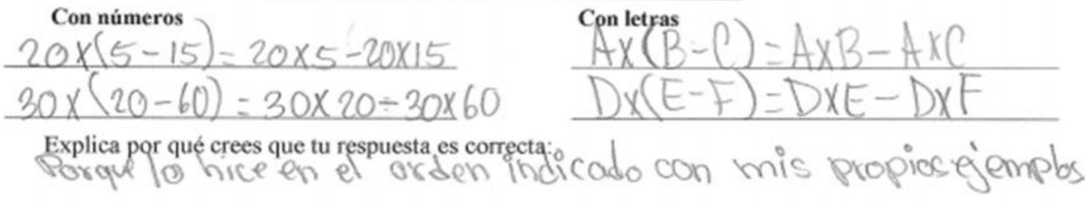

Figura 3. Modelo de desempeño del estudiante E-114.

La Figura 3, muestra como modelo el desempeño del estudiante E-114. El estudiante percibe que hay un patrón en la igualdad presentada, puesto que al reproducir la estructura tanto numérica como algebraica conserva el valor (mismo número) del primer factor en cada uno de los binomios del miembro derecho. A su vez en el miembro izquierdo conserva como factor común este mismo valor. Reproduce correctamente las estructura numérica y algebraica, conservando los patrones que guardan las expresiones presentadas en el Ítem 3.

Segunda Subcategoría (RE-2a)

La segunda columna de la gráfica No.1 describe la subcategoría denominada: *Reproduce la estructura numérica, pero no la estructura algebraica de la expresión presentada*. Se observa que el 15.25% (18 de 118) de los estudiantes reprodujeron correctamente la estructura numérica, pero no la estructura algebraica (ver Figura 4).

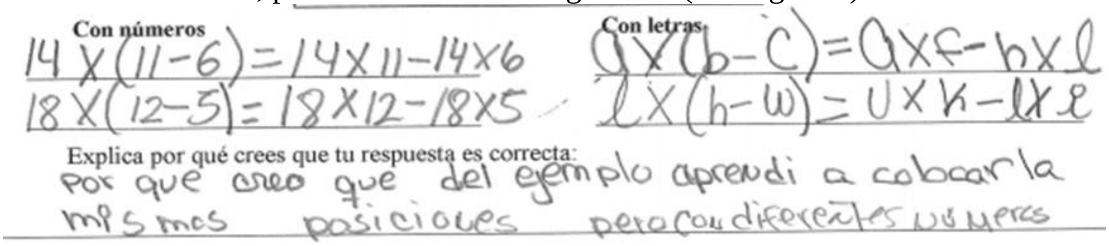

Figura 4. Modelo de desempeño del estudiante E-117.

La Figura 4 muestra como modelo el desempeño del estudiante E-117. El estudiante percibe que existe un patrón a seguir en la sección numérica y lo conserva. En su justificación, expresa "*porque creo que del ejemplo aprendí a colocar las mismas posiciones, pero con diferentes números*". No obstante, en la sección algebraica muestra no haber percibido la existencia de un patrón a seguir. Este caso permite ver la necesidad de fortalecer la parte conceptual de las propiedades en este nivel de escolaridad.

Tercera Subcategoría (RE-2b)

La tercera columna de la Figura 1 corresponde a la subcategoría: *No reproduce la estructura numérica, pero sí la estructura algebraica de la expresión presentada*. Sólo un 2.54% (3 de 118) de los estudiantes no reprodujeron correctamente la estructura numérica, pero sí la estructura algebraica (ver Imagen 5).

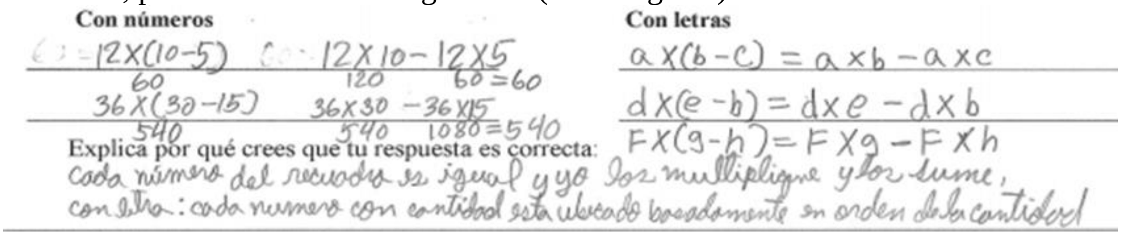

Figura 5: Modelo de desempeño del estudiante E-034.

La Figura 5 muestra el desempeño del estudiante E-034. Este estudiante percibe que hay un patrón en la expresión presentada. Ha conservado los patrones que guardan las expresiones del Ítem 3 en la reproducción de la estructura algebraica, sin embargo, en la reproducción de la estructura numérica, ha omitido colocar el signo igual. Esta acción y realizar los cálculos, manifiestan que no percibe con claridad el valor de igualdad inmerso en la propiedad. El estudiante muestra buen nivel de abstracción al reproducir la estructura algebraica, no obstante, muestra inseguridad en el desarrollo aritmético.

Cuarta Subcategoría (RE–3)

La cuarta columna representa la subcategoría: *No reproduce la estructura numérica, ni la estructura algebraica de la expresión presentada*. La Figura 1 muestra que el 41.53% (49 de 118) de los estudiantes no reprodujeron correctamente la estructura numérica, ni la estructura algebraica. La Figura 6 presenta un modelo del desempeño de los estudiantes.

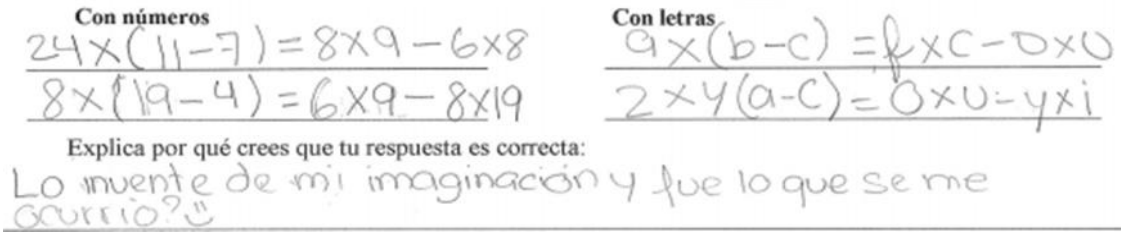

Figura 6. Modelo de desempeño del estudiante E-107.

El estudiante justifica indicando: "*lo inventé de mi imaginación y fue lo que se me ocurrió*". No percibe la presencia de una propiedad en las expresiones propuestas, ni percibe un patrón a seguir. Observación: La última columna de la Figura 1, muestra que un 22.04% (26 de 118) de los estudiantes dejaron en blanco el ítem o el mismo no fue codificable.

RESULTADOS

La Tabla 3 muestra el total de respuestas que coinciden con cada una de las subcategorías de la categoría en estudio: "*Reproduce la estructura numérica y algebraica de la expresión presentada*". En ella se presenta detalladamente el análisis cuantitativo del instrumento de investigación.

Tabla 3. Frecuencias absolutas y totales de cada subcategoría en los ítems 1, 2, 3, 4.

Expresión	RE: Categoría Reproduce la Estructura					
	RE - 1	RE - 2a	RE – 2b	RE - 3	BC	Total
Ítem 1	20	17	3	69	9	118
Ítem 2	17	19	2	62	18	118
Ítem 3	22	18	3	49	26	118
Ítem 4	18	21	3	49	27	118
Subtotal	77	75	11	229	80	472

En esta primera parte del instrumento se recibió un total de 472 respuestas. La Tabla 3 muestra que, de acuerdo con el estudio y análisis realizado, setenta y siete (77) de 472 respuestas coincidieron en la subcategoría RE-1. Esta subcategoría corresponde a casos en los que el estudiante utiliza las relaciones internas de la expresión para resolver la tarea haciendo uso de la estructura de la propiedad distributiva mediante la identificación de patrones.

Luego, setenta y cinco (75) de 472 respuestas coincidieron en la subcategoría: RE – 2ª y once (11) de 472 respuestas coincidieron en la subcategoría: RE - 2b. Estas dos subcategorías corresponden a casos en los que el estudiante utiliza *algunas* de las relaciones internas de la expresión dada para resolver la tarea haciendo uso de la estructura de la propiedad distributiva. En su mayoría, el estudiante muestra haber identificado un patrón a seguir y lo representa correctamente de forma numérica pero no algebraica.

Finalmente, doscientas veintinueve (229) respuestas de 472 coinciden en la subcategoría Re – 3, la cual corresponde a casos en que el estudiante no utiliza ninguna de las relaciones internas que caracterizan la propiedad distributiva inmersa en las igualdades propuestas. En este tipo de respuesta el estudiante muestra no percibir la presencia de patrones a seguir en las igualdades presentadas. Y ochenta (80) de 472 ítems son dejados en blanco.

El análisis realizado en esta sección de la investigación se centró en la categoría "*Reproduce la estructura numérica y algebraica de la expresión presentada*", hecho que condujo esta investigación a observar y analizar cómo los estudiantes reconocen estructuras, patrones, relaciones internas que subyacen en las propiedades y, a su vez cómo generalizan expresiones numéricas, con el objetivo de observar el enfoque estructural utilizado. El análisis de los ítems en estudio permitió percibir dificultades que presentan los estudiantes de séptimo grado al trabajar con expresiones numéricas y algebraicas, algunas de las cuales se hacían recurrentes en los distintos ítems propuestos.

Ejemplos de dificultades

1. Expresiones que no conllevan signo de igualdad: algunos estudiantes ante una expresión matemática que no conlleva signo de igualdad presentan cierto grado de dificultad y la tendencia es colocar el signo igual para el desarrollo de la expresión propuesta. Observar el modelo presentado en la Figura 7.

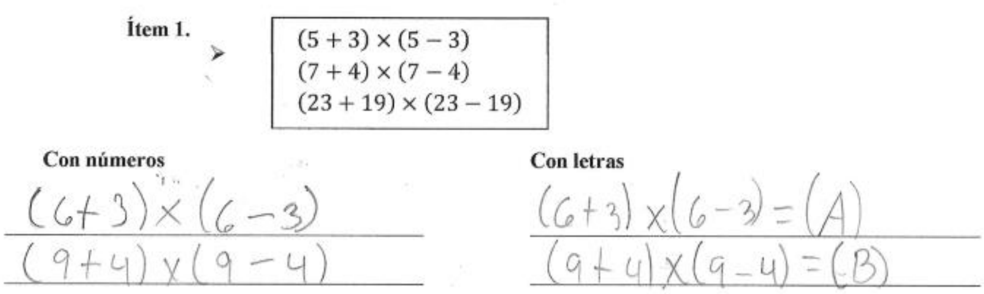

Figura 7. Estudiante E-113. Dificultad ante la falta del signo igual.

2. Expresiones que implican generalizar: cuando se requería reproducir algebraicamente la expresión presentada, algunos estudiantes confundían la reproducción algebraica con letras como escritura en palabras. Observar el modelo presentado en la Figura 8.

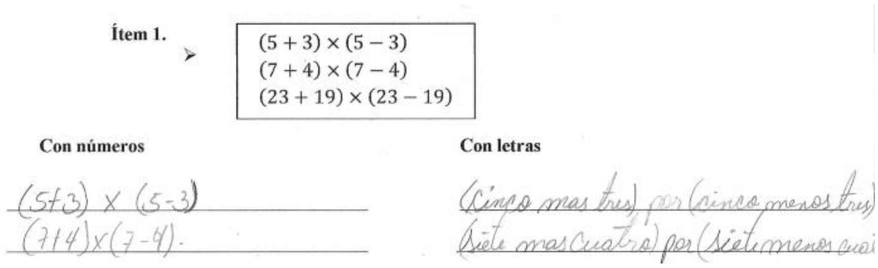

Figura 8. Estudiante E-043. Confusión en la reproducción de expresiones numéricas.

3. Expresiones que implican propiedades: algunos estudiantes al desarrollar el ítem reproducían las expresiones aritméticas y algebraicas colocando números y letras sin percibir que estaba involucrada la propiedad distributiva en la igualdad presentada. Observar el modelo presentado en la Imagen 9.

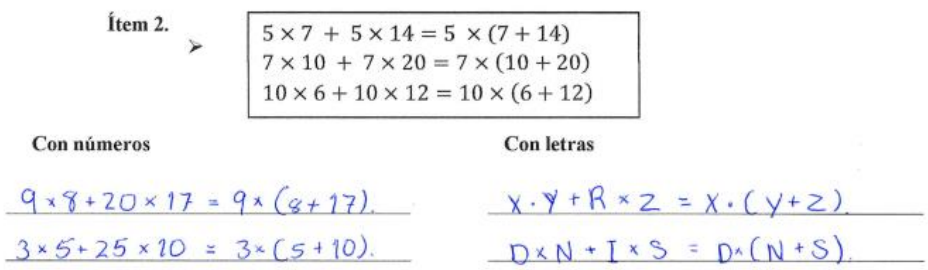

Figura 9. Estudiante E-089. Dificultad para percibir propiedades.

4. Expresiones que requieren detección de patrones: algunos estudiantes al desarrollar la propiedad distributiva no aplicaban la estructura externa (paréntesis). Esta dificultad puede estar familiarizada con la capacidad de observación y detección de patrones. Observar el modelo presentado en la Figura 10.

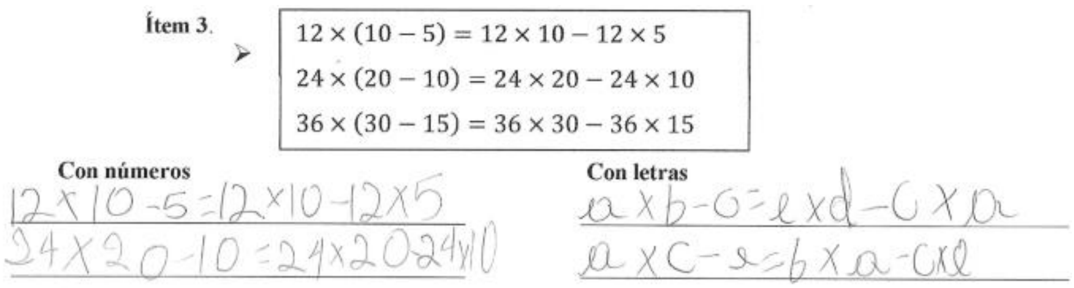

Figura 10. Estudiante E-091. Dificultad para seguir patrones.

CONCLUSIONES

Luego del estudio realizado, se observó que solamente el 16.3% de las respuestas emitidas por los estudiantes daban muestras de reconocimiento y uso de las relaciones internas (propiedad distributiva) subyacentes en la igualdad propuesta, es decir se reproducía tanto la estructura numérica como la algebraica. Según los trabajos realizados por Vega-Castro, Molina y Castro (2010-2013), el estudiante da muestras de sentido estructural cuando reconoce una estructura familiar en la expresión propuesta, permite observar en su justificación que ha identificado propiedades inmersas en la expresión o igualdad propuesta.

El 18.2% de las respuestas dieron muestras de que los estudiantes habían utilizado algunas de las relaciones internas de la expresión propuesta para resolver la tarea haciendo uso de la estructura de la propiedad distributiva. De este porcentaje, una mayoría (15.9%) mostró habilidad para reproducir la estructura numérica, pero no la algebraica. Llama notablemente la atención que el 48.5% de las respuestas emitidas correspondió a casos en que los estudiantes no utilizaron ninguna de las relaciones internas inmersas en la igualdad propuesta, no reprodujeron la estructura numérica ni la algebraica atendiendo la propiedad distributiva. Un 16.9% de las respuestas fueron dejadas en blanco o consideradas no codificables. Estos resultados dan muestras de que los estudiantes que presentaron un bajo nivel de sentido estructural no atienden las características particulares de las expresiones, no establecen relaciones entre los términos que las componen, ni consideran las expresiones equivalentes como un todo. No identificaron la propiedad conmutativa ni asociativa, hecho que les hubiese permitido reproducir las expresiones de numéricas a algebraicas.

En referencia a la interrogante de investigación presentada, cabe mencionar que la categoría establecida permitió observar con claridad casos en los cuales los estudiantes presentaron muestras de sentido estructural y otros casos en los cuales los estudiantes no dieron muestras de utilizar este constructo. Se percibe con esta experiencia la importancia que conlleva hacer énfasis en fortalecer el reconocimiento de patrones que subyacen en el aprendizaje conceptual de las propiedades matemáticas. Esta acción permitirá al estudiante identificar las estructuras tanto aritméticas como algebraicas presentes en expresiones e igualdades matemáticas, y conducirá los estudiantes a un aprendizaje menos mecánico, menos algorítmico y más estructural, que le transportará directamente a la generalización de las expresiones.

En este sentido, se requiere retomar ideas propuestas por Bell (1995) quien refiere que para generalizar es necesario explorar una situación para detectar patrones, reconocer relaciones y expresarlas verbal y simbólicamente, de igual manera buscar explicaciones y diferentes tipos de justificaciones de acuerdo con el nivel al que se corresponde. Se requiere que el docente potencie en los estudiantes el Sentido Estructural, constructo que lleva inmersa la capacidad de apercibir el orden interno de los objetos algebraicos (Rojano, 2022). En este sentido compete como docentes investigadores proponer planes y programas de enseñanza que persigan los estándares propuestos en los planteamientos curriculares de NCTM (2003).

Agradecimiento

Este trabajo formó parte del Proyecto “Nivel de sentido estructural que manifiestan estudiantes panameños al trabajar con estructuras algebraicas. Diseño de una propuesta para desarrollar en el aula”. Realizado dentro del Programa de Fomento a la Investigación y Desarrollo (I+D), Inserción de Talento Especializado, bajo el patrocinio de la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) de la República de Panamá. Contó con la colaboración de la Dra. Encarnación Castro, profesora emérita de la Universidad de Granada-España.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52,* 215-241.

Bell, A. (1995). Purpose in School Algebra. *Journal of Mathematical Behavior 14*, 41-73.

Cancec-Murillo, G., Rojano, T., Montoro, A. B., & Flores, P. (2023). Sentido de la estructura requerido en las tareas de cálculo. En C.Jiménez-Gestal,A.A.Magreñán, E.Badillo y P.Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXVI (p.562). SEIEM.

Cancec-Murillo, G., Montoro, A. B., Flores, P. y Rojano, T. (2024). El sentido estructural en el estudiantado de carreras de ingeniería. En N. Adamuz- Povedano, E. Fernandez-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez- Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXVII (pp. 137-144). SEIEM.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, *2*(3), 137-151.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Peñalva, F. J. García y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 -94). Jaén, España: SEIM.
Hiebert J. y Lefevre P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: the case of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Hiebert, J. y Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 199-223). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Hoch, M. (2003). Structure sense. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education* (CD). Bellaria, Italia: ERME.
Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 49-56). Bergen, Noruega: Bergen University College.
Hoch, M. y Dreyfus, T. (2007). Recognising an algebraic structure. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), P*roceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics* (pp. 436-445). Larnaca, Cyprus: CERME.
Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.
Linchevski, L. y Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.
Mamona-Downs, J. y Downs, M. (2008). Advanced mathematical thinking and the role of mathematical structure. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp.154-175). New York, NY: Routledge.
Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. (pp. 2- 63). UK: Sage y The Open University.
Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.
Molina, M. (2010). Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *SUMA 65,* 7-15.
Mulligan, J., y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.
NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *Zdm, 40*(1), 83-96.
Ramos-Franco, M., & Aké-Tec, L. P. (2024). Pensamiento algebraico a través de la generalización de patrones: Un estudio de caso con estudiantes de bachillerato. *PädiUAQ, 7*(13), 1-20.
Rojano, T. (2022). *Algebra structure sense development amongst diverse learners*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003197867
Sfard, A. (2001). Equilibrar algo desequilibrado: Los estándares del NCTM a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas. *Revista EMA, 6*(2), 95-140.
Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., Trigueros, M. (2008). *Enseñanza del algebra elemental. Una propuesta alternativa.* Editorial Trillas: México.

Vega-Castro, D. (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables.* Trabajo fin de máster. Granada, España: Universidad de Granada.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(2), 233-258.

Vega-Castro, D. (2013). *Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el Sentido Estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas*. Tesis Doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Elías Pérez-Peña

Universidad de Panamá, Panamá

elias2422@gmail.com

Félix Vega-Domínguez

Universidad de Panamá, Panamá

felixvegadominguez@gmail.com

Danellys Vega-Castro

Universidad de Panamá, Panamá

danellys.vega@up.ac.pa