Matemáticas, Educación y Sociedad

ISSN: 2603-9982
Matemáticas, Educación y Sociedad
http://mesjournal.es/
editor@mesjournal.es

Vol 1 No 1 (2018):

Matemáticas, Educación y Sociedad

Almaraz, C., López, C. (2018). La metodología Context-Based Approach en STEM: Modelización de datos meteorológicos. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1*(1), 1-10.

ISSN: 2603-9982

LA METODOLOGÍA CONTEXT-BASED APPROACH EN STEM: MODELIZACIÓN DE DATOS METEOROLÓGICOS

Cristina Almaraz, Universidad de Oviedo, España

Carmen López, Universidad de Salamanca, España

Resumen

GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. Este estudio se centra en cómo este recurso puede usarse para mejorar la enseñanza en STEM, mediante una propuesta didáctica que sigue una metodología de Context-Based Approach, donde el contexto es una necesidad real de una empresa que se puede llevar al aula de Ingeniería para implementar buenas prácticas en la enseñanza STEM. El propósito concreto es que, a partir de las observaciones puntuales, necesitamos mostrar información sobre la densidad y altura de las nubes. Para ello debemos calcular los puntos que definen una zona de nubes y encontrar una representación poligonal de la superficie que ocupa.

Palabras clave*: STEM, GeoGebra, Representación, Polígonos.*

The Context-Based Approach methodology in STEM: meteorological data modeling

Abstract

GeoGebra is a dynamic math software for all educational levels that brings together geometry, algebra, spreadsheet, graphs, statistics and calculus into one easy to use program. This study focuses on how this resource can be used to improve the teaching of STEM in Engineering training, through a didactic proposal that follows a Context-Based Approach methodology, where the context is a real need for a company that can be translated to the Engineering classroom to implement good practices in STEM teaching. The specific purpose is that, based on specific observations, we need to show information about the density and height of clouds. For this we must calculate the points that define an area of clouds and find a polygonal representation of the surface that it occupies.

Keywords: *STEM, GeoGebra, Polygons, Representation.*

Recibido: 11/03/2018; Aceptado: 05/04/2018

INTRODUCCIÓN

El objetivo del proyecto es mejorar los conocimientos y habilidades de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM, de sus siglas en inglés Science, Technology, Engineering and Mathematics) y promover actitudes positivas hacia estas disciplinas. Investigadores de la educación centraron su atención para promover el cambio en las prácticas de enseñanza para la educación de grado (Hederson, 2011). La búsqueda de "mejores prácticas" en métodos de enseñanza es debida a la necesidad bien documentada (Fraser, Tobin y McRobbie, 2012) de incrementar el conocimiento de STEM de los alumnos. Se ha observado (Ritz y Fan, 2015) que muchos estudiantes están perdiendo su potencial competitividad para las empresas basadas en conocimientos debido a sus bajas actuaciones y su aversión a temas STEM. En este trabajo consideraremos, al igual que López (2011), que las TIC ayudan al docente de Matemáticas siendo unas inestimables aliadas para conseguir alimentar la pasión por las matemáticas en los estudiantes y desarrollar las necesarias habilidades de resolución de problemas.

Trabajos Relacionados

A pesar del reconocido potencial de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje, su integración en la educación en matemáticas está siendo más lenta que las expectativas que muchos investigadores y educadores tenían hace algunas décadas (Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche, 2003). El papel del profesor ha sido reconocido como un factor crítico y problemático en este proceso integrador (Artigue, Drijvers, Lagrange, Mariotti y Ruthven, 2009; Doerr y Zangor, 2000; Lagrange y Ozdemir Erdogan, 2009; Monaghan, 2004). Se ha reconocido que la forma en que los profesores abordan el uso de la tecnología tiene importantes consecuencias para los efectos de su uso en el aula (Kendal y Stacey, 2002). Además, los profesores a menudo experimentan dificultades para adaptar sus técnicas de enseñanza a situaciones que requieran el uso la tecnología (Monaghan, 2004).

Además, los tecnólogos educativos se han replanteado la conceptualización del campo como una ciencia. Tecnología educativa es ante todo un campo de diseño (Reeves, 2007; Kelly, Lesh, y Baek, 2018) que debe derivar a experimentos para el uso posterior por los profesores y estudiantes en el modelado iterativo de situaciones de aprendizaje (Hirsch y McDuffie, 2016). Estas investigaciones han demostrado que las herramientas tecnológicas pueden involucrar a los estudiantes en aprendizajes auténticos que favorezcan el desarrollo de habilidades básicas y superiores, pero las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Pant, 2012) advierte que el éxito para integrar efectivamente la tecnología en lecciones de aula radica en la capacidad del profesor. La importancia de utilizar la tecnología en educación matemática ha sido destacada por el Consejo Nacional de profesores de matemáticas (NCTM, de sus siglas en inglés National Council of Teachers of Mathematics) ya que la tecnología puede tener un papel crucial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: “entornos digitales permiten a los profesores adaptar sus métodos de instrucción y enseñanza y ser más eficaces a las necesidades de sus estudiantes” (NCTM, 2000, p. 24). El NCTM ha comprobado que los conceptos geométricos requieren consideraciones especiales para que los estudiantes entiendan los conceptos, y recomiendan para mejorar la comprensión y el aprendizaje los Software de Geometría Dinámica (DGS, de sus siglas en inglés Digital Geometry Software) que ofrecen nuevas herramientas que van más allá de los métodos tradicionales, proporcionado acceso construcciones geométricas y soluciones (Straesser, 2001).

La perspectiva teórica principal que asumimos en este trabajo es el enfoque instrumental (Artigue, 2002), que reconoce la complejidad de la tecnología en educación matemática. Según este enfoque, el uso de una herramienta tecnológica implica un proceso de la génesis instrumental, durante el cual el objeto o artefacto se convierte en un instrumento. Este instrumento es un constructo psicológico, que combina el artefacto y los esquemas para resolver tareas específicas.

En este sentido se han desarrollado software para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como GeoGebra (Hohenwarter et al., 2017), que se ha convertido en una herramienta que puede ayudar a los profesores para diseñar lecciones de instrucción efectivas. Se han realizado estudios para estudiar diversos aspectos del aprendizaje con GeoGebra que han demostrado la mejora de la eficacia del aprendizaje. Li (2007) cita que más de 73% de los alumnos encuentran GeoGebra una tecnología muy útil para el aprendizaje.

GeoGebra

GeoGebra es una aplicación escrita como software libre, GNU General Public License, y ha sido desarrollada desde 2001 por Markus Hohenwarter, de la Universidad de Salzburg (Austria). GeoGebra es también una comunidad en rápida expansión, está traducido a cincuenta y cuatro idiomas y el número de usuarios ha crecido hasta alcanzar los veinte millones en casi todos los países. GeoGebra se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo. En su corta historia ya ha obtenido una serie de prestigiosos premios. La última versión se puede descargar desde el sitio web del programa: http://www.geogebra.org

Pertenece a los llamados Sistemas de Geometría Dinámica (DGS). La gran ventaja de GeoGebra (Losada, 2007) reside en que abarca características de dos tipos de programas matemáticos; es decir, se trata, al mismo tiempo, de un DGS y de un CAS (Sistema de Álgebra Computacional, entre los que se encuentran Derive, Mathematica y Matlab). Esto significa que los comandos pueden ser introducidos de dos maneras, mediante el ratón (igual que hacemos en los DGS) o mediante el teclado (método utilizado en los CAS). Por ejemplo, podemos dibujar una recta que pasa por dos puntos. Para ello, utilizamos la herramienta punto y, pinchando con el ratón sobre la gráfica, buscamos el recurso para crear una recta. Otra manera de mostrar su representación sería a través de la introducción de su ecuación en el campo de entrada. Los objetos de GeoGebra se consideran dinámicamente bajo estos dos aspectos: representación gráfica y definición analítica.

En sus inicios, GeoGebra se creó con la intención de obtener un programa que combinara la visión geométrica con la algebraica. Comenzó en 2001 como un simple proyecto para un trabajo de investigación en el campo de la enseñanza de las matemáticas. La intención de Hohenwarter era desarrollar un programa que le ayudara a la hora de impartir clase, ya que quería ser profesor de Matemáticas. De hecho, actualmente, es docente de esta asignatura en la Universidad de Linz. Al principio, el software presentaba varias limitaciones debido a la imposibilidad de guardar los archivos o de no poder cambiar el color de las figuras, entre otras dificultades de diseño. Sin embargo, ya se encontraba bien delimitada la diferencia entre la vista algebraica y la geométrica, cuya principal ventaja reside en el cambio automático de una de ellas si se realizan modificaciones en la otra. En versiones posteriores se añadió la hoja de cálculo, de manera que, a partir de ese momento, GeoGebra tenía los tres tipos principales de herramientas matemáticas de posible aplicación en el ámbito docente.

Una de las grandes ventajas de GeoGebra se halla en que su código es abierto (desde 2003), es decir, lo encontramos disponible para su descarga y modificación gratuitamente. Gracias a esto, Hohenwarter y su equipo de desarrolladores sigue actualizando y agregando funciones al programa a petición de los usuarios. El código abierto permite utilizar otros de la misma índole en la aplicación del software y, así, poder implementarlo de manera más rápida y eficiente.

También cuenta con un foro, conocido como la Comunidad GeoGebra o GeoGebraTube, en el que los internautas exponen sus dudas y les pueden responder en el momento. GeoGebraTube cuenta, en la actualidad, con setenta mil materiales en línea y tiene millones de visitas. Esta herramienta es de gran utilidad ya que, si surgen dificultades ante la utilización del programa, los consejos y las directrices de otros usuarios permiten resolverlas prácticamente de forma inmediata. Asimismo, el foro permite crear grupos privados para mandar archivos que solo puedan ver los miembros del mismo. Esto puede beneficiar notablemente el trabajo en el aula, ya que los profesores podrían crear una clase en línea donde subir los archivos que necesiten sus alumnos. Otra gran ventaja de este programa es que, gracias a las últimas actualizaciones, se encuentra disponible para otros sistemas operativos como Android, entre otros. Así, los alumnos pueden acceder fácilmente al software, de manera gratuita y utilizarlo en sus dispositivos móviles cuando y donde quieran.

En la última versión GeoGebra, se ha añadido una visión 3D. Además, se ha perfeccionado la versión para web y Tablets y la posibilidad de uso de GeoGebra en Modo Examen. La pantalla inicial de GeoGebra presenta el aspecto que se muestra a continuación:

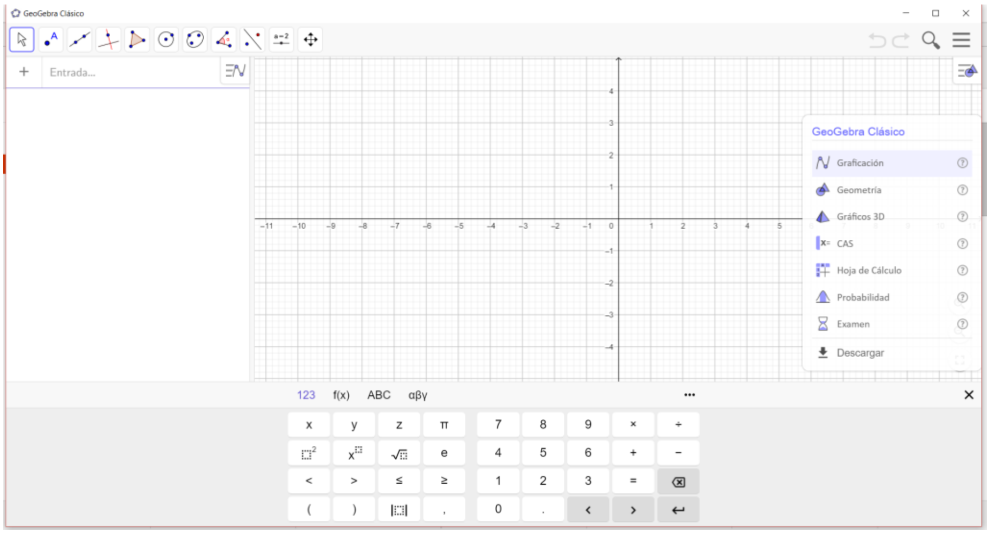


Figura 1. Pantalla inicial de GeoGebra

Permite introducir expresiones matemáticas, además de las órdenes para seleccionar distintas funciones, caracteres o comandos. Estos se podrán escoger en los menús desplegables que aparecen a la derecha. Los funcionamientos básicos necesarios para su uso se pueden ver en Hohenwarter y Hohenwarter (2009).

METODOLOGÍA

El principal objetivo es promover actitudes positivas y mejorar la motivación hacia asignaturas STEM, ya que estas afectan positivamente a procesos de aprendizaje complejo con efectos a largo plazo sobre la persistencia del interses del estudiante en estudio de STEM (Savelsbergh, Prins, Rietbergen, Fechner, Vaessen, Draijer y Bakker, 2016). Desde esta perspectiva han sido desarrollados varios enfoques pedagógicos (Henderson, Beach y Finkelstein, 2011)

- Context-Based Approach: el foco está en el uso de contextos y aplicaciones científicas/tecnológicas/de ingeniería y matemáticas, los estudiantes pueden experimentar la pertinencia y la aplicabilidad de los contenidos de la ciencia;
- Inquiry Based Learning: es decir, presentación de preguntas o problemas;
- Computer-Based Learning: enseñanza basada en computadora, juegos, simulación;
- Collaborative Learning: por ejemplo, un trabajo basado en el proyecto o una discusión sobre un objeto específico;

- Extra-Curricular Activities: actividades fuera del aula ligadas al programa de escuela, por ejemplo, prácticas de campo, viajes, conferencias.

Sin embargo, estas investigaciones no proporcionan evidencias de un método de enseñanza más eficaz que otro; las conclusiones de estos trabajos son que la innovación representa una línea a seguir y que un enfoque innovador, por sí, es suficiente para elevar el rendimiento de los estudiantes y generar actitudes positivas e interés hacia STEM (Bronfenbrenner, 1979).

En concreto, la propuesta que ahora presentamos se centra una metodología de Context-Based Approach, donde el contexto es un gran proyecto para desarrollar software dedicado al routing y guiado de aeronaves, que está siendo desarrollado por Indra SW Lab-Gijón para Indra Navia, filial noruega de Indra anteriormente conocida como Park Air Systems y adquirida por Indra en 2012; por lo que este puede considerarse como un proyecto interno de Indra. Esta situación real de una empresa se puede llevar al aula de Ingeniería para implementar buenas prácticas en la enseñanza STEM.

El propósito concreto es el guiado de las aeronaves en el aeropuerto, y tiene como objetivo ayudar a los pilotos con estos movimientos mediante datos y ayudas proporcionadas por los controladores. El objetivo final es:

Proporcionar a los pilotos la representación gráfica de los datos meteorológicos, interpolándolos de las mediciones puntuales recibidas online para tener datos suficientes y necesarios para el modelado de toda el área a representar.

Diferentes fenómenos meteorológicos conllevarán representaciones gráficas distintas, que se abordarán de forma sucesiva. Además de representar datos relativos a la velocidad y la dirección del viento, se abordará la representación de datos relativos a la nubosidad. Se representará la superficie de las nubes mediante polígonos. La aplicación consta de dos partes independientes, pero complementarias entre sí. Por un lado, la propia aplicación gráfica de representación de los datos meteorológicos y por otro un simulador que generará dichos datos y los inyectará para su posterior visualización. A partir de las observaciones puntuales, necesitamos mostrar información sobre la densidad y altura de las nubes. Para ello debemos calcular los puntos que definen una zona de nubes y encontrar una representación poligonal de la superficie que ocupa.

RESULTADOS

A continuación, se expondrá el algoritmo utilizado para el cálculo de las nubes a representar en un momento determinado. Una nube estará definida por una serie de coordenadas geográficas que determinarán el polígono cuya área será la superficie de la nube, la altitud de la nube y su cantidad. Para un momento en el tiempo se tendrán almacenadas un con-junto de observaciones, leídas desde mensajes METAR. Para cada una de ellas se tendrán hasta cuatro capas de nubes, cada una con una altitud y cantidad que la caracterice. Por otro lado, las nubes también tendrán una representación textual, la cual se podrá ver, para cada nube representada gráficamente sobre el mapa mediante polígonos, definidos mediante una serie de puntos geográficos que determinarán los vértices del polígono. La problemática aparece al calcular estos vértices mediante el método expuesto anteriormente, ya que el orden de la lista resultante de vértices puede ser cualquiera. Si para la representación del polígono se unen los vértices en el orden en el que estén en esta lista, los lados del polígono representado puede que se corten entre sí. Por lo tanto, deben ordenarse adecuadamente los vértices. No importa si el orden es horario o antihorario y tampoco importa cuál sea el primer vértice de la lista, el polígono resultante debe el mismo, en cualquier caso.

Por ejemplo, en la figura 2 tenemos la lista de vértices sin ordenar adecuadamente y se observa cómo el polígono resultante tiene lados que se cortan entre sí. Sin embargo, si la lista se ordena en sentido horario, el polígono resultante es correcto.

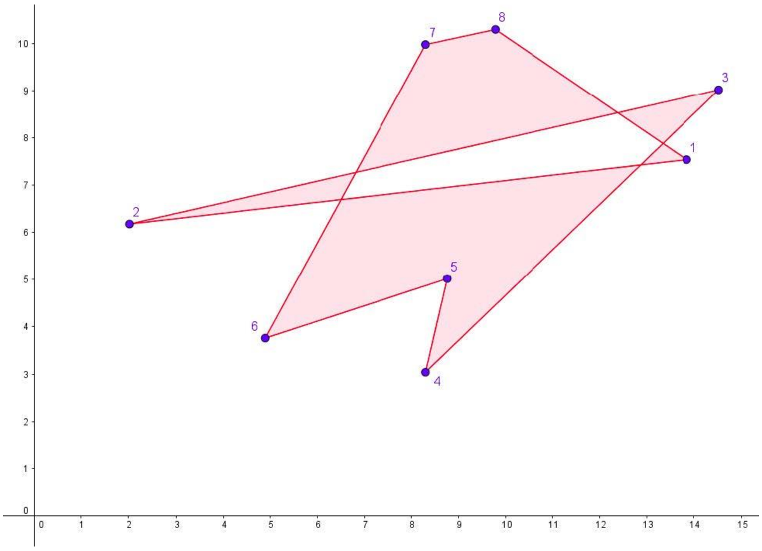


Figura 2. Polígono con los vértices sin ordenar adecuadamente

Para la ordenación adecuada de los vértices se propone utilizar como punto auxiliar el centro de masas o centroide del polígono, que es el punto de una figura donde toda la masa actúa como si estuviera concentrada. Dicho de otra forma, es el punto en el cuál podríamos balancear a la figura si la sostuviéramos con un dedo. El centro de masas no necesariamente coincide con el centro geométrico de la figura e incluso puede ubicarse fuera del objeto.

El centroide, también conocido en física como centro de gravedad y en geometría como baricentro, es el caso especial del centro de masas en el que el objeto tiene su peso uniformemente distribuido.

$$c_x = \frac{1}{6A}\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$
$$c_y = \frac{1}{6A}\sum_{i=1}^{n}(y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

Figura 3. Ecuación del centroide de un polígono cuyo peso está distribuido uniformemente

Donde el polígono se define mediante un número n ($n \leq 100$), que indica la cantidad de puntos del polígono, seguido por n pares únicos de enteros, que son las componentes x e y de las coordenadas de cada punto. A es el área del polígono.

Hemos seleccionado un código abierto y libre, escrito en lenguaje Pascal y C, que implementa el algoritmo del cálculo del centroide o centro de masas del polígono, redondeado a tres dígitos decimales (Centroide, 2017) y lo hemos traducido del código en C a C++ para usarlo en nuestro programa.

Una vez obtenido el centroide del polígono, calcularemos el ángulo entre la recta que forman cada vértice y el centroide con la recta paralela al eje de coordenadas horizontal que pasa por el centroide. Para ello utilizaremos la función arcotangente, como se puede ver en la figura más abajo. El dominio del arco tangente está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ radianes, o lo que es lo mismo, entre -90º y 90º. En el primer cuadrante, arctg (b/a) nos dará el ángulo que buscamos. Para el cuarto cuadrante nos dará el ángulo negativo por lo que le sumaremos 360º (o 2 π radianes) para tener su valor dentro del rango de 0º a 360º (de 0 a 2 π radianes). El valor de la función arcotangente para un ángulo en el segundo cuadrante es el mismo que para su simétrico respecto al centro en el cuarto cuadrante. Pasa lo mismo con los ángulos en el tercer cuadrante, donde el arcotangente es el mismo que el ángulo simétrico en el primero. Por lo tanto, en ambos casos para conseguir el valor real del ángulo entre 0º y 360º tendremos que sumarle 180º (o π radianes) al resultado de la función arcotangente. Este cálculo del ángulo está ilustrado en la Figura 4:

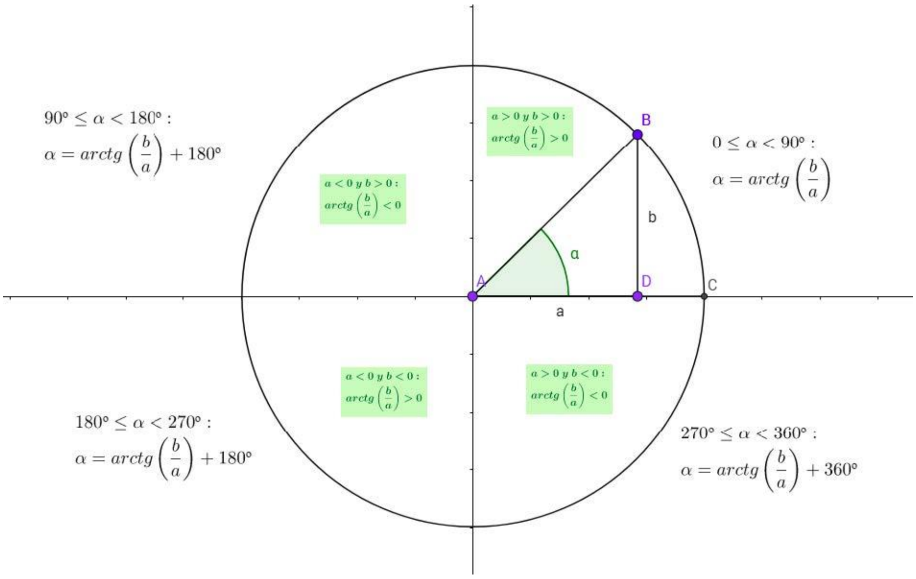


Figura 4. Cálculo del ángulo entre tres puntos

Finalmente, el orden de los vértices del polígono corresponderá al orden de menor a mayor de los ángulos correspondientes a cada vértice, como se muestra en la Figura 5:

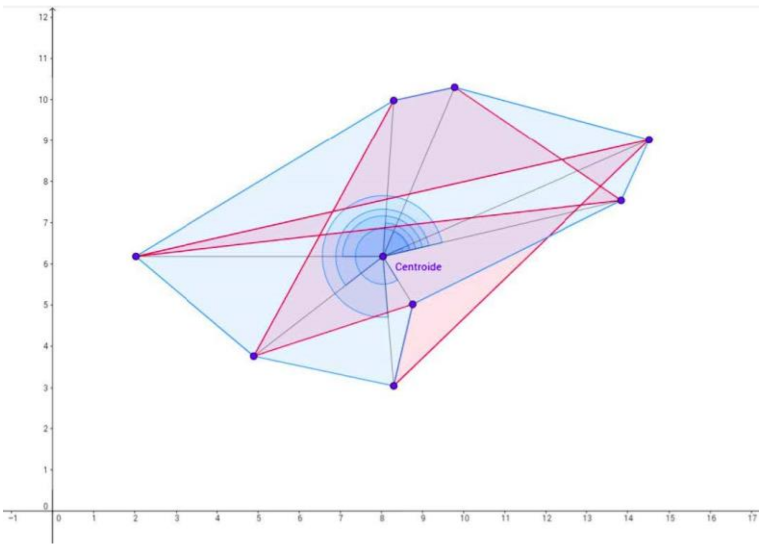


Figura 5. Ordenación de los vértices de un polígono

En Almaraz (2017) se muestra una representación dinámica propia de la construcción del polígono correcto con el programa matemático GeoGebra.

CONCLUSIONES

Una de las grandes ventajas de este proyecto es que puede ampliarse para otras situaciones de aprendizaje. Asimismo, las virtudes de GeoGebra lo hacen válido para la enseñanza de las matemáticas en todos sus aspectos, especialmente para los conceptos geométricos como apoyo visual. Con este proyecto de innovación hemos podido establecer relaciones interdisciplinares a través de GeoGebra:

- Dibujo técnico. Se realizan polígonos regulares, líneas paralelas y perpendiculares, ángulos... cuya representación gráfica a través de este programa puede ser de gran ayuda para la comprensión y representación de los conceptos.
- Física. El programa resulta muy útil para representar las funciones y para que los alumnos puedan observar la gráfica de cada una.

En este trabajo hemos realizado una breve presentación del programa GeoGebra y tratando las ventajas del mismo en su aplicación a la enseñanza. Por extensión, también incluimos información acerca del uso de las TIC en los centros, ya que están cobrando verdadera importancia en las nuevas metodologías docentes. Consideramos que estas son herramientas imprescindibles en la educación actual y lo serán, aún más, en la del futuro.

La modesta investigación realizada sobre los orígenes de GeoGebra, nos convencieron aún más de la importancia de su inclusión dentro del aula, especialmente como soporte y recurso para docentes de las enseñanzas técnicas. No es de extrañar, por tanto, que desde su creación, el programa no haya dejado de difundirse por todo el mundo.

Asimismo, la gran cantidad y diversidad de recursos existentes lo convierten en una herramienta especialmente útil en los cursos ya mencionados. El uso del foro, con que cuenta la página oficial del software, GeoGebraTube, permite la difusión de todos estos contenidos de forma gratuita. En nuestra opinión, la existencia de un programa con código abierto, cuyos usuarios desarrollan numerosos materiales, constituye un elemento con altas expectativas dentro de la educación.

REFERENCIAS

Almaraz, C. (2017). Centroide con Geogebra, GeoGebra, 24-may-2017. [En línea]. Disponible en: https://www.geogebra.org/m/HXY4ndp2. [Accedido: 14-jun-2017].

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 245–274.

Artigue, M., Drijvers, P., Lagrange, Jb, Mariotti, M. A., y Ruthven, K. (2009). Technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques, où en eston dans les recherches et dans leur intégration? En C. Ouvrier-Buffet y M.J. Perrin-Glorian (Eds.), *Approches plurielles en didactique des mathématiques; Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur: quoi de neuf?* (pp. 185–207). Paris: Université Paris Diderot Paris 7.

Bronfenbrenner, U. (1979). *The ecology of Human Development*. Cambridge: Harvard University Press. (Trad. Cast.: La ecología del desarrollo humano. Barcelona: Ediciones Paidós, 1987).

Centroide. (2017) [En línea]. Disponible en: http://pier.guillen.com.mx/algorithms/07-geometricos/07.8-centroide.htm. [Accedido: 14-jun-2017].

Doerr, H. M., y Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 143–163.

Fraser, B. J., Tobin, K., y McRobbie, C. J. (Eds.) (2012). *Second international handbook on science* *education*. New York: Springer.

Henderson, C., Beach, A., y Finkelstein, N. (2011). Facilitating change in undergraduate STEM instructional practices: An analytic review of the literatura. *Journal of research in science teaching 48*(8), 952–984.

Hirsch, C.R. and McDuffie, A.R. (Ed.) (2016) Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: *Mathematical Modeling and Modeling Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics Editors

Hohenwarter, M., Borcherds, M., Ancsin, G., Bencze, B., Blossier, M., Delobelle, A., . . . Sturr, G. (2017). GeoGebra (Version 5.0.352.0-3D) [Programa informático]. Linz, Austria: International GeoGebra Institute. Recuperado de http://www.geogebra.org/

Hohenwarter, M., y Hohenwarter, J. (18 de septiembre de 2009). Geogebra. Obtenido de: www.geogebra.org

Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (Eds.). (2008). *Handbook of design research methods in education innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching.* New York: Lawrence Erlbaum Associates. Disponible en http://www.routledgeeducation.com/books/Handbook-of-DesignResearch-Methods-in-Education-isbn9780805860597

Kendal, M., y Stacey, K. (2002). Teachers in transition: Moving towards CAS-supported classrooms. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 34*(5), 196–203.

Lagrange, J.-B., y Ozdemir Erdogan, E. (2009). Teachers' emergent goals in spreadsheet based lessons: analyzing the complexity of technology integration. *Educational Studies in Mathematics, 71*(1), 65–84.

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., y Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: A multidimensional study of the evolution of research and innovation. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y F. K. S. Leung (Eds.*), Second international handbook of mathematics education* (pp. 237–269). Dordrecht: Kluwer.

Li, Q. (2007) Student and teacher views about technology: A tale of two cities? *Journal of research on Technology in Education, 39*(4), 377–397.

López; C.(2011). Mejores Prácticas en la Enseñanza de las Matemáticas: La integración de las TICs. *Revista: SCOPEO, El Observatorio de la Formación en Red. Boletín SCOPEO* nº 34,. pp. 1. En línea: http://scopeo.usal.es/index.php?option=com_content&view=article&id=915&Itemid=7314/01/2011.

Losada, R. (2007). GeoGebra: la eficiencia de la intuición. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 10*(1), 223–239

Monaghan, J. (2004). Teachers' activities in technology-based mathematics lessons. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 327–357.

NCTM (Ed.). (2000). Principles and standards for school mathematics. National Council of Teachers of Mathematics: Reston, Virginia.

Pant, T. (2012, January). UNESCO supports ICT in education master plan. Kathmandu UNESCO Newsletter, 3(3).Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0021/002126/212608e.pdf

Reeves, T. (2007) Design research from a technology perspective. En J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenneymy N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 86–109). London: Routledge.

Ritz, J. M., y Fan, S. C. (2015). STEM and technology education: international state of the art. *International Journal of Technology and Design Education, 25*(4), 429–451.

Savelsbergh, E. R., Prins, G. T., Rietbergen, C., Fechner, S., Vaessen, B. E., Draijer, J. M., y Bakker, A. (2016). Effects of innovative science and mathematics teaching on student attitudes and achievement: A meta-analytic study. *Educational Research Review 19*, 158–172.

Straesser, R. (2001). Cabri-Geometry: Does Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its teaching and learning. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*, 319 -333.

Cristina Almaraz López
Universidad de Oviedo, España
calmarazlopez@hotmail.com

Carmen López Esteban
Universidad de Salamanca, España
lopezc@usal.es

Gómez, B. (2018). El uso de la historia en la educación matemática: El caso de los gemelos póstumos. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1*(1), 11-21.

ISSN: 2603-9982

EL USO DE LA HISTORIA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: EL CASO DE LOS GEMELOS PÓSTUMOS

Bernardo Gómez, Universitat de València, España

Resumen

Se presenta un estudio exploratorio sobre un tipo particular de problemas verbales descriptivos de larga tradición e importancia en el desarrollo del pensamiento matemático: el problema de los gemelos póstumos.

La metodología que sustenta el estudio tiene dos vertientes complementarias: el análisis histórico epistemológico y el análisis didáctico en los libros de texto y manuales escolares. Con énfasis en la resolución de problemas, se resalta la importancia de integrar la historia y epistemología de las ideas matemáticas en la investigación educativa, para provecho de estudiantes y profesores.

Palabras clave*: Didáctica de la matemática, Historia y Educación Matemática, Problemas descriptivos aritmético algebraicos.*

The use of history in mathematics education: The case of posthumous twins

Abstract

An exploratory study is presented on a particular type of descriptive word problems of long tradition and importance in the development of mathematical thought: the problem of posthumous twins.

The methodology that supports the study has two complementary aspects: the historical epistemological analysis and the didactic analysis in textbooks and school textbooks. With emphasis on problem solving, the importance of integrating the history and epistemology of mathematical ideas into educational research is emphasized, for the benefit of students and teachers.

Keywords*: Didactics of Mathematics, History and Mathematical Education, Descriptive problems algebraic arithmetic.*

Recibido: 20/03/2018; Aceptado: 04/04/2018

LOS PROBLEMAS DESCRITIVOS

En la actualidad, la resolución de problemas emerge con renovado interés en las propuestas curriculares debido a que es considerada una competencia básica en el desarrollo del pensamiento aritmético y algebraico. Ejemplo de ello es que aparece explícitamente en el currículo básico de la Educación Primaria española (MEC 2014).

Aceptar la importancia de la resolución de problemas en la educación escolar matemática implica que los profesores han de tener ideas claras acerca de con qué problemas, con qué métodos y con qué fin deben enseñarlos.

Una manera de contribuir a clarificar estas ideas es mediante el análisis didáctico e histórico epistemológico de los problemas que la tradición escolar nos ha legado. Con este objetivo y. metodología abordamos en este trabajo el estudio de un caso particular de los problemas verbales descriptivos: el de los gemelos póstumos.

Se entiende por problemas verbales descriptivos, aquellos que nos ha legado la tradición de enseñanza de las matemáticas escolares, que en su enunciado se describe una situación o se narra una historieta pseudorealista que no pretende dar respuesta a ninguna cuestión práctica, sino ejercitar el ingenio, el razonamiento y la curiosidad matemática. Tal vez por eso a menudo se les ha llamado problemas de matemáticas recreativas.

Los antecedentes de estos problemas se remontan a las antiguas culturas matemáticas y desde entonces han sido parte esencial del contenido de los libros de texto y manuales escolares.

METODOLOGÍA

El estudio, es exploratorio, ya que no pretende confirmar ningún supuesto o hipótesis sino describir cómo se ha configurado un determinado contenido de enseñanza.

La metodología, se estructura por medio de dos vertientes complementarias: el Análisis Histórico y Epistemológico (Gómez, 2003, 2011 a y b) y el Análisis Didáctico (Rico y Fernández, 2013). El primero, porque permite conocer cómo se ha presentado un contenido de enseñanza en diferentes libros de texto y/o manuales escolares en diferentes momentos de la historia; y, el segundo, porque permite delimitar unidades de análisis que den cuenta de esa presentación.

Para el primer análisis se recurre a un enfoque de aproximación global[1], y para el segundo se hace uso de un enfoque "a priori" propio del análisis de textos (Dormolen, 19862)[2]

Las unidades de análisis escogidas para el estudio del problema descriptivo particular seleccionado: el de los gemelos póstumos son el análisis estructural y conceptual, y el análisis procedimental (métodos) y lecturas analíticas de los enunciados que se encuentran recogidas en la literatura (Gómez, 2002; Maz, 2009)

La lectura analítica de un problema, que por su origen suele vincularse al método cartesiano, no debe entenderse como la traducción del enunciado del problema al lenguaje simbólico algebraico; sino, más bien, la reducción del enunciado a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades, transformándolas para dar lugar a partir de esas cantidades y relaciones a una ecuación, a una fórmula o incluso a una regla (Gómez y Puig, 2018).

Fuentes de los problemas descriptivos

Los problemas descriptivos se pueden encontrar en los textos de las antiguas culturas matemáticas china e hindú, y en las primeras colecciones de la Europa medieval como la Antología griega (s. V.) o las *Propositiones ad acuendos juvenes* de Alcuino (735-804 d. C.).

En Occidente, estos problemas comenzaron a conocerse gracias a la matemática islámica a través de textos como el *Liber abaci* de Fibonacci (1202). Más adelante, tras la introducción de la imprenta, se produjo una eclosión de aritméticas y álgebras impresas que incorporaron problemas descriptivos, a menudo a modo de miscelánea. Es el caso, entre otros, de Pérez de Moya (1562) y Aurel (1552).

A mediados del siglo XVII, estos problemas se incorporan a los primeros textos de matemáticas recreativas, como por ejemplo las *Récreations Mathématiques* de Ozanam (1692)

En el siglo XX, varios de estos problemas aparecen resueltos en los libros "para el maestro", editados como "Solucionarios" de las "Aritméticas razonadas", de las editoriales Dalmau y Bruño, múltiples veces reeditadas a lo largo del siglo XX. Actualmente se les puede hallar, aunque de modo disperso en los manuales escolares.

ESTEREOTIPOS

Los enunciados de los problemas descriptivos han evolucionado a lo largo del tiempo, adaptándose a los cambios sociales y a diferentes niveles de complejidad, pero al conservar su estructura y métodos, se han estandarizando bajo una determinada forma que sirve de problema tipo, estereotipo o modelo.

Para referirse a estos estereotipos se han usado denominaciones tomadas de aspectos superficiales del enunciado: contexto, agentes, acciones, etc. El ejemplo escogido a los efectos de ilustrar el presente trabajo, es el que aparece en la cronología de los problemas recreativos de Singmaster (1996) bajo el nombre de los gemelos póstumos. Este problema se encuentra en Alcuino (735-804 d. C.), según la traducción de Burkholder (1993), con el siguiente enunciado:

> *Los gemelos póstumos*. Al morir un padre dejó una esposa embarazada y 960 bezantes de su hacienda. Dispuso que si la mujer tuviera un hijo éste debería recibir tres cuartos de la herencia - es decir, nueve doceavos, y la madre un cuarto, es decir, tres doceavos. Sin embargo, si naciera una hija, ella debería recibir siete doceavos, y la madre, cinco doceavos. Pero como ocurrió que dio a luz a gemelos - ambos un niño y una chica. Hubo que solucionar el reparto como se pudo. ¿Cuánto debería recibir la madre, el hijo y la hija? (ALC, Burkholder, 1993, proposición 35, p. 27).

Smith en su Historia de las matemáticas (1929, vol. II) dice que este problema deriva de la *lex Falcidia* romana (40 a. C.), y que aparece en uno de los textos legislativos escritos por el jurista Juventius Celcus, c .75.

Análisis estructural y conceptual

El término "estructura" es ampliamente usado y la mayoría de las veces sin necesidad de explicar qué se quiere decir con eso. En contextos diferentes el término estructura puede querer decir cosas diferentes para diferentes personas. En este trabajo se usa el término "estructura", en el sentido de Hoch y Dreyfus (2010), que al aplicarlo a un problema se refiere a dos componentes, una interna y otra externa. Interna por su aspecto o apariencia y externa por las relaciones y conexiones entre cantidades y operaciones.

En el problema de los gemelos la componente externa es la de un reparto no equitativo, esto es en partes desiguales, unas múltiplo o fracción de otras. La componente interna es la del reparto proporcional, que consiste en dividir un número *a*, en tres partes *x*, *y*, *z*, que guarden entre sí la misma razón que tres números dados, *p, q, r*.

> Repartir un número en partes proporcionales a otros números dados, es dividir dicho número en tantas partes como números dan; de modo que la razón de la primera parte a la segunda sea igual a la razón del primer número al segundo; que la razón de la parte segunda a la tercera sea igual a la razón del segundo número al tercero, y así sucesivamente (Dalmau, 1943, p. 193).

Análisis procedimental del reparto proporcional

Las relaciones entre cantidades de esta estructura son las siguientes:

$$x+y+z=a; \quad \frac{x}{y}=\frac{p}{q} \; ; \; \frac{x}{z}=\frac{p}{r}.$$

El procedimiento estándar recogido en los libros de texto para hallar el valor de x, y, z, consiste en alternar los medios en cada una de las dos proporciones del párrafo anterior para obtener tres razones iguales, a las que se aplica la propiedad aditiva de las razones para transformarlas en una cadena de igualdades que se desglosan en tres reglas de tres:

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r} \; ; \; \frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}=\frac{x+y+z=a}{p+q+r},$$

Este proceso, que se conoce como método de las proporciones, es el resultado de una determinada lectura analítica. La lectura comienza siempre con la identificación de las relaciones entre cantidades y sigue con la transformación de esas relaciones hasta llegar al resultado.

Las lecturas analíticas del problema de los gemelos póstumos

En el caso particular de los gemelos póstumos el procedimiento de solución que da Alcuino es el siguiente:

> Solución. 9 y 3 hacen 12 y 12 onzas hacen una libra. Igualmente 7 y 5 también hacen 12; y dos veces 12 son 24. 24 onzas hacen dos libras, que son 40 chelines. Divide 960 bezantes en 24 partes; que es 40. Toma nueve de esas partes de 960; o sea nueve 40s, o 18 libras, o 360 bezantes, que recibe el hijo. Por comparación con el hijo y la hija, la madre toma tres partes de lo que toma el hijo y cinco de lo de la hija, y 3 y 5 hacen 8. Entonces, la madre recibe ocho 40s, o 16 libras, o 320 bezantes. Lo que queda, que son siete 40s, o 14 libras o 280 bezantes, es lo que recibe la hija. Suma 360, 320 y 280, que son 960 bezantes, o 48 libras (traducción libre del texto en inglés de Hadley & Singmaster, 1992, p. 118 y 119).

Para entender el texto conviene tener en cuenta que, según Pérez de Moya (1562/1998), a las herencias se les llamaba *As, libra o pondu*, y que por comodidad los antiguos legislaron dividirlas en 12 partes, porque este número es pequeño y tiene muchas partes alícuotas, lo que facilita las divisiones.

Cada una de las 12 partes de As o libra tenía nombre propio y su equivalencia en onzas:

> Sescuns: onza y media de las 12; sextans, o sexta parte de 12, que son 2 onzas; quadrans, o cuarta parte de 12, que son 3 onzas; triens, o tercio de 12, que son 4 onzas; quincus, que son 5 onzas; semis sis, o semi is, mitad o 6 onzas; septuns, que son 7 onzas; bessis sis o bes sis, o 2 tercios de 12, que son 8 onzas; dodrans, que vale 9 onzas; dextans, que es 10 onzas; deunx, que es por once onzas; As, en que comprehenden todas 12 (Pérez de Moya, 1562/1998, pgs. 240).

De ahí que, como una onza es la doceava parte de una libra, se tiene que 9/12+ 3/12+ 5/12+ 7/12=24/12, son 24 onzas, que hacen 2 libras. Y que un bezante, moneda de la época, valía 1/20 de libra; o sea, 1 libra = 20 bezantes.

La solución que da Alcuino ha sido fruto de controversia ya que la solución: 18, 16 y 14 libras para el hijo, la madre y la hija respectivamente, no cumple con las exigencias del testador; que era que el hijo recibiera el triple que la madre y que la madre recibiera 5/7 de lo de la hija.

La siguiente tabla sintetiza la lectura analítica de los gemelos póstumos que explica la solución de Alcuino

Hijo	Madre	Hija	Total: 960 bezantes
9/12	3/12, un tercio de lo del hijo		
	5/12	7/12	
9 onzas	8 (=5+3) onzas	7 onzas	Suma onzas de la herencia (24=9+8+7)
$\frac{960}{24} \times 9 = 18$ =360 bezantes	$\frac{960}{24} \times 8 = 16$ =320 bezantes	$\frac{960}{24} \times 7 = 14$ =280 bezantes	Los 960 bezantes se han dividir en 24 partes, de las cuales el hijo se lleva 9, la madre 8, y la hija 7

Alcuino suma los números (numeradores) del testamento que son 24=9+8= 5+3+7 y toma ese valor como el número de partes en que se han de dividir los 960 bezantes, para dar al hijo 9 de esas partes, 8 a la madre 8 y 7 la hija. El apoyo tabular permite describir en síntesis la lectura analítica de Alcuino

Este problema aparece muchas veces en las matemáticas medievales, por ejemplo, en Siliceo (1514) se encuentra con el siguiente enunciado:

> Un hombre agonizante, que tenía su esposa embarazada y con un capital que cifraba en 2.000 escudos, dejó este testamento: «Si mi mujer da a luz un niño, para él serán los tres quintos de mis bienes, para mi mujer un quinto, y para la iglesia el resto, es decir un quinto. Pero si da a luz una niña, ésta recibirá dos quintos, mi mujer otros dos y la iglesia el resto». Pero al llegar el momento la mujer dio a luz las dos cosas, es decir, un niño y una niña. Pregunta: cómo se distribuirán los bienes.

La solución de Siliceo sigue la misma pauta que Alcuino

> Respuesta: escríbanse todos los números formulados en el testamento, es decir, 3 del hijo, 2 de la hija, 2 de la madre, y 1 de la Iglesia; súmense y tendremos 8, que es el divisor; el número de escudos 2.000, es el multiplicador por el cual se multiplica cada una de las partes; el producto se divide por 8; y el cociente dará la solución. Esta será: 750 escudos para el hijo; 500 para la hija; 500 para la mujer; y 250 para la Iglesia. De igual forma se operará si la mujer da a luz dos hijos o dos hijas o dos hijos y una hija (Sánchez y Cobos, 1996, p. 265)

La tabla muestra sintetiza la lectura analítica de Síliceo

Hijo	Madre	Hija	Iglesia	Total: 2.000 ducados
3/5	1/5, un tercio de lo del hijo		1/5	
	2/5	2/5	1/5	.
3	2	2	1	Total 8
$\frac{2000}{8} \times 3 = 750$	$\frac{2000}{8} \times 2 = 500$	$\frac{2000}{8} \times 2 = 500$	250	Los 2000 escudos se han de dividir en 8 partes, de las cuales el hijo lleva 2, la madre 2, la hija 2 y la Iglesia 1

Al igual que Alcuino la solución de Siliceo no respeta los deseos del testador, ya que los 750 escudos que se lleva el hijo no son el triple de los 500 que se lleva la madre. Sin embargo, a diferencia de Alcuino no suma todos los numeradores: 3+1+2+2+1=9, y tampoco evita las fracciones. Porque usa “quintos”, en vez de doceavos, que son onzas.

También en la Aritmética de Pérez de Moya (1562) aparece el mismo problema, pero ahí con una solución que sí que satisface lo que prescribe el testador. El enunciado dice así:

> Un testador, dejando su mujer en días de parir, mandó que si pariese hijo que tuviese las 8 onzas de su herencia, y del restante hizo heredera a su mujer; quiso más, que si hija le naciese heredase el triente [nombre del tercio de la herencia] (que son las 4 onzas) y la mujer fuese heredera en lo demás. Parió la mujer hijo e hija, pídese: ¿de 1400 ducados que se estima la herencia, cuánto vendrá a la madre y a cada uno de los hijos, según lo que el testador mandó? (Op. cit. p. 240).

Pérez de Moya resuelve el problema de dos formas, la primera por la regla de compañías:

> Para hacer esta cuenta pondrás 3 números cualesquiera que te pareciere que se excedan en dupla proporción, como 1, 2, 4, o 2, 4, 8, y así, por razón que la voluntad del testador (como se colige del jurisconsulto) fue que la madre oviese de la herencia doblado que la hija y el hijo doblado que la madre. Y porque he dicho que los menores números serán menos embarazosos para tratar con ellos, por tanto toma 1 y 2 y 4 y ordena una regla diciendo: tres hacen compañía, el primero puso 1, el segundo 2, el tercero 4, han de partir 1400, que es la herencia, pido: ¿Qué viene a cada uno? Sigue la regla de compañía sin tiempo que más te agradare, y vendrá a la hija 200, y a la madre 400 y al hijo 800 (Op. cit. pp. 240-241).

Esto es:

Hijo	Madre	Hija	Total: 1400 ducados
$\frac{8}{12}$ doble que la madre	$\frac{4}{12}$		
	$\frac{2}{3}$ doble que la hija	$\frac{1}{3}$	
8 onzas	4	2	14 partes
4	2	1	7 partes
$\frac{x}{4}=\frac{1400}{7}$	$\frac{y}{2}=\frac{1400}{7}$	$\frac{z}{1}=\frac{1400}{7}$	$(x, y, z)=\frac{1400}{7}\times(4, 2, 1)=$ (800, 400, 200)

Dice Pérez de Moya que como quiera que este método de las proporciones o de compañía, se desglosa en muchas reglas de tres, hay una alternativa más breve, que consiste en dividir la herencia en las 7 partes que resultan de sumar los números 4, 2 y 1, que vienen de la razón entre las herencias, para dar a los herederos 4, 2 y 1 de esas 7 partes, que es la proporción que manda el testador.

> Y porque para la regla de compañías por los cuatro modos primeros de los 5 que puse en el segundo c. de este tercero libro requieren muchas reglas, los jurisconsultos, procurando toda brevedad, mandaron dividir o hacer la herencia en 7 partes iguales, porque los números de que se sirven el hijo, y madre e hija montan 7, y después de hechas 7 partes dan las cuatro al hijo, y las dos a la madre y la una a la hija (…). Pues divide los 1400 ducados (que es la estimación de la herencia) en 7 partes (lo cual se hace partiendo por 7) y vendrá a valer cada parte 200 ducados. Ahora, porque al hijo le pusiste un 4, toma 4 partes, que son 800, y a la madre porque tiene un 2 dale 2 partes, que son 400, y a la hija porque tiene una dale una parte (que son 200), que es lo mismo que puede salir por cualquiera regla de compañía (pp. 240 y 241).

En síntesis la lectura analítica del método alternativo de Pérez de Moya es:

Hijo	Madre	Hija	Total: 1400 ducados
$\frac{8}{12}$ doble que la madre	$\frac{4}{12}$		
	$\frac{2}{3}$ doble que la hija	$\frac{1}{3}$	
8 onzas	4	2	14 partes
4	2	1	7 partes
$\frac{1400}{7} \times 4 = 800$	$\frac{1400}{7} \times 2 = 400$	$\frac{1400}{7} \times 1 = 200$	1400 escudos en 7 partes, 4 para el hijo, 2 la madre 2, y 1 la hija.

El método breve, o método “del número de las partes”, usado por Pérez de Moya, es de origen desconocido, ya se aplicaba desde tiempos remotos a otros problemas de repartos diversos, y se proyecta hasta nuestros días. El siguiente ejemplo tomado de Bruño, da buena prueba de ello.

> En la puerta de una iglesia se encuentran habitualmente dos mendigos, a saber: un pobre todos los días y alternando un ciego y un cojo. Una persona caritativa manda a su criada con 52 céntimos y le dice: «Si encuentras a la pobre y al ciego, darás a éste los $\frac{3}{4}$ de la suma y $\frac{1}{4}$ a la mujer; pero si está allí el cojo, no le darás más que el $\frac{1}{4}$ de la suma y los $\frac{3}{4}$ a la mujer.» Por casualidad aquel día están los tres mendigos a la puerta de la iglesia. ¿Cuánto dará a cada uno según la mente de su señora? (Bruño, sf., p. 308, nº 1180).
>
> Según la intención de la señora, el cojo ha de recibir el $\frac{1}{3}$ de lo que reciba la mujer, y ésta la $\frac{1}{3}$ parte de lo que reciba el ciego. Por tanto, si el cojo recibe 1 céntimo, a la mujer corresponden 3 céntimos, y al ciego 9 céntimos. Soluc. – Al cojo corresponden $\frac{52}{13} = 4$ céntimos; a la mujer, 12 céntimos, y al ciego, 36 céntimos (p. 308).

La tabla sintetiza la lectura analítica

Ciego	Mujer pobre	Cojo	Total: 52 céntimos
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$ tercio que ciego		
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$ tercio que mujer	
9	3	1	13 partes
$\frac{52}{13} \times 9=36$	$\frac{52}{13} \times 3 = 12$	$\frac{52}{13} \times 1 = 4$	

Aurel (1552), resuelve el problema por medio del álgebra.

> Un hombre enfermo, hace su testamento de esta manera, que si su mujer (que está preñada) pariese un hijo, el cual hubiese, de 3000 ducados que dejo, los 2000 ducados; y la madre 1000 ducados. Y pariendo hija hubiese 1000 ducados, y la madre 2000 ducados. Muerto el marido, parió la mujer 2 hijas y un hijo. Demando, ¿qué viene a cada una hija, e hijos y madre? (Op. cit., fo. 91 dcha.)
>
> La intención del padre fue, que el hijo haya 2 veces tantos ducados como la hija. Por lo cuál pongo que a la una hija venga x ducados, a la otra hija, otro tanto, que es x ducados, a la madre 2 veces tanto como a una hija, y serán 2x ducados, al hijo 2 veces tanto que a la madre, y serán 4x ducados. Súmalo todo junto, y vendrán 8x iguales a 3000 ducados. Parte, y vendrán x a valer 375. Tantos ducados vinieron a una hija, otros tantos 375 ducados a la otra hija, a la madre 2x valen 750 ducados, al hijo 4x que valen 1500 ducados. Serán todos 3000 ducados (Op. Cit., fo. 91 dcha.).

Nota: Aurel no usa "x", sino el signo de "la cosa".

La lectura analítica con apoyo tabular es la siguiente:

Hijo	Mujer	Hija	Hija	Total
2000	1000			
	2000	1000		
4x	2x	x	x	8x=3000;
$375 \times 4=1500$	$375 \times 2 = 750$	$375 \times 1 = 375$	$375 \times 1 = 375$	$x=\frac{3000}{8} = 375$

Otro método, utilizado para resolver problemas con la misma estructura interna que el de los gemelos póstumos es el de igualación, que en el conocido problema de la mula, el caballo y el burro, se puede encontrar con apoyo gráfico en varias páginas "web":

> Un arriero tiene en su cuadra una mula, un caballo y un burro. Cuando lleva a trabajar a la mula y el caballo, pone 3/5 de la carga en la mula y 2/5 en el caballo. Sin embargo, cuando lleva el caballo y el burro, entonces pone 3/5 de la carga en el caballo y 2/5 en el burro. ¿Cómo distribuirá la carga hoy si lleva a los tres animales y tiene que transportar una carga de 190 kg.

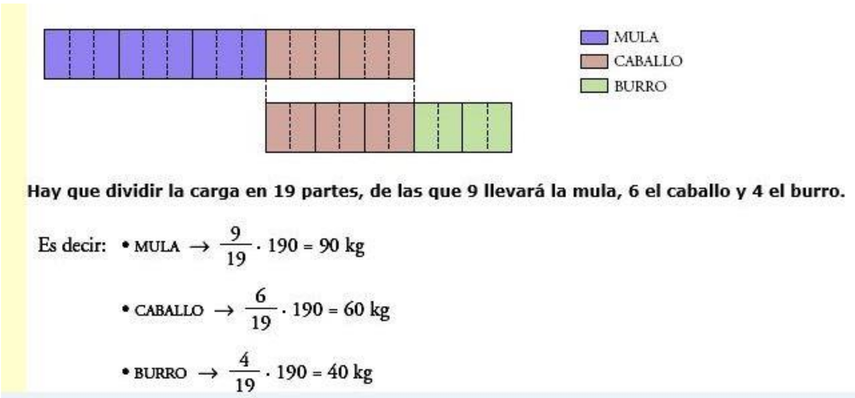


Figura 1. Resolución del problema de la mula, el caballo y el burro (Curso de matemáticas on-line, 2018)

La lectura analítica es la siguiente:

mula	Caballo	Burro		Total
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$		Multiplicando por 3 esta fila se obtienen $\frac{9}{10}$ y $\frac{6}{10}$	
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	Multiplicando por 2 esta fila se obtienen $\frac{6}{10}$ y $\frac{4}{10}$	
$\frac{9}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	De modo que cuando el caballo carga 6 partes, el burro carga 4 y la mula 9	9+6+4=19 partes
$\frac{190}{19} \times 9=90$ kg	$\frac{190}{19} \times 6 =60$ kg	$\frac{190}{19} \times 4 =40$ kg		190 kg

SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

Hay una tradición de enseñanza de los problemas aritmético - algebraicos en la que éstos se han usado al estilo de ejercicio y práctica, para consolidar o aplicar los conocimientos adquiridos previamente. Sin embargo, esto no ha sido siempre así, como es el caso de los problemas descriptivos, que se han usado más bien para favorecer la reflexión y el razonamiento matemático.

En el presente trabajo se ha puesto énfasis en este enfoque de la resolución de problemas, mostrando los razonamientos que los grandes matemáticos del pasado y cómo éstos se han transmitido y proyectado en los libros de texto y manuales escolares.

En particular se ha estudiado el caso de uno de los estereotipos de los problemas descriptivos más conocidos: los gemelos póstumos, mostrando sus lecturas analíticas y sus métodos de resolución: proporción o compañías, partes, algebraico e igualación, tal y como han quedado reflejados en los libros de texto que los que autores de diversas épocas han legado.

La metodología utilizada permite ilustrar la importancia de integrar la historia y epistemología en la educación matemática para aportar conocimiento útil para la enseñanza, el aprendizaje y para la investigación educativa. Útil para el alumnado, porque promueve la reflexión y el razonamiento sobre los problemas descriptivos y sus procesos de resolución; y, útil para el profesorado porque permite orientar su enseñanza en un enfoque significativo de resolución de problemas.

En definitiva, es útil para el investigador, porque ofrece conocimientos para dar fundamento racional a los estudios empíricos de tipo cognitivo, en particular para estudiar la relación e influencia de los modelos de enseñanza y aprendizaje de los problemas aritmético - algebraicos en el desempeño de los estudiantes.

Agradecimientos

Este trabajo ha contado con el apoyo de los proyectos concedidos por el Ministerio de Educación de España (EDU2017-84377-R MINECO/FEDER) y la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana (GVPROMETEO2016-143).

Notas

[1] La metodología tradicional de estudiar textos aisladamente, o comparar varios textos entre sí, es insuficiente, en la medida que tiende a desconsiderar las raíces y fuentes de las concepciones vertidas en el texto, su contexto social y cultural, las particularidades propias del sistema educativo (curriculares) o las del estatus profesional de los profesores que los usan (Schubring, 1987).

[2] Dormolen (1986) señala que se pueden hacer tres tipos de análisis en los libros de texto: a priori que consiste en el análisis del texto como medio de instrucción; a posteriori, que es el análisis para comparar el texto con los resultados del aprendizaje; y a tempo, que es el análisis para conocer cómo los estudiantes y profesores usan los libros de texto

REFERENCIAS

Aurel, M. (1552). *Libro primero, de arithmetica algebratica***.** Valencia: En casa de Ioan de Mey.

Bruño (s.f.). *Tratado teórico práctico de aritmética razonada. Curso superior. Segunda edición. Solucionario*. Madrid, Barcelona, Valladolid: Ediciones Bruño.

Burkholder, P. J. (Trad.) (1993). Alcuin of York's Propositiones Doctoris Caroli Magni Imperatoris ad acuendos juvenes: Introduction and commentary; Translation. *HOST: An Electronic Bulletin* *for the History and Philosophy of Science and Technology 1, nº. 2* Recuperado de http://www.math.muni.cz/~sisma/alcuin/anglicky1.pdf

Curso de matemáticas on-line (2018). *Problemas de ejercitación con fracciones*. Recuperado de http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas141.htm

Dalmau, J. (1943). *Soluciones analíticas. Nueva edición corregida y aumentada. Libro del maestro*. Gerona: Dalmau Carles Pla, S. A.

Dormolen, J. Van (1986). Chapter 4. Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson, and M. Otte (eds.), *Perspectives on Mathematics Educatio*n (pp. 141-171). D. Reidel Publishing Company

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, *7*(3), 251-292.

Gómez, B. (2003) La investigación histórica en didáctica de las matemáticas. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, & A. Vallecillos A. (eds.). *Proc. VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM): Investigación en Educación Matemática* (pp. 79-85). Granada: U. de Granada.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA, 5(2),* 49-65.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon 28(1),* 77, pp.9-22.

Gómez, B. (2016). Problemas descriptivos y pensamiento numérico: el caso de las cien aves de corral. *PNA, 10(3),* 218-241.

Gómez, B. y Puig, L. (2017). Los problemas descriptivos de fracciones en los "Solucionarios" de Bruño y Dalmau. *Actas de las IV-CIHEM (IV Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática)*. Murcia 15-17/11/2017. Murcia: Centro de estudios sobre la memoria educativa de la universidad de Murcia (En prensa)

Hadley, J. & Singmaster, D. (1992) Problems to Sharpen the Young. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 102-126 Recuperado de http://www.jstor.org/stable/3620384.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2010). Developing Katy's algebraic structure sense. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics* – CERME 6 (pp. 529-538). Lyon, Francia: CERME. www.inrp.fr/editions/cerme6

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En Gonzalez, M., González, M. y Murillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación matemática XIII* , pp. 5-20. Santander: SEIEM

M.E.C. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria. *BOE, 126,* p. 19386.

Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometría*. León: en casa de Maestro Nicolau de Benedictis: por Joannnes Trinxer librero de Barcelona.

Pérez de Moya, J. (1562/1998). *Arithmetica práctica y speculativa*. Salamanca. Biblioteca Castro. Madrid. Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro.

Rico, L. y Fernández, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Granada: Comares.

Sánchez, E. y Cobos, J.M. (Trad. y notas) (1996). *Juan Martínez Silíceo. Ars Arithmética***.** Madrid: Editora Regional de Extremadura y Servicio de Publicaciones de la U. de Extremadura (Original, 1514).

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics, 7(3),* 41-51.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation***.** New York: Springer.

Singmaster, D, (1996). Chronology of recreational mathematics. Recuperado de http://www.eldar.org/~problemi/singmast/recchron.html

Singmaster, D. (1998). Chronology of recreational mathematics. Recuperado de http://utenti.quipo.it/base5/introduz/singchro.htm

Smith, D.E. (1958). *History of mathematics*. New York: Dover (1ª ed. 1929)

Bernardo Gómez
Universitat de València, España
bernardo.gomez@uv.es

Del Rosal, A., Gutiérrez, M.P. y Maz-Machado, A. (2018). Errores en la resolución de problemas aritméticos de cambio y combinación en alumnos de 2º de primaria. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1*(1), 22-31.

ISSN: 2603-9982

ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE CAMBIO Y COMBINACIÓN EN ALUMNOS DE 2º DE PRIMARIA

Aránzazu Del Rosal Pedrajas, CEIP Torre Malmuerta, Córdoba, España

Mª Pilar Gutiérrez Arenas, Universidad de Córdoba, España

Alexander Maz-Machado, Universidad de Córdoba, España

Resumen

Se presenta una investigación orientada a identificar las dificultades encontradas en la resolución de los problemas matemáticos de cambio y combinación, más concretamente en detectar los errores cometidos en tal proceso. Así mismo se busca determinar si hay relación entre el sexo y los tipos de errores. El estudio es exploratorio y aplica una batería de problemas ya validados. Se halló que los alumnos cometen más errores en los problemas de cambio que en los de combinación. Y el error más frecuente es que expresan una operación de suma o resta y operan de manera contraria.

Palabras clave*: Resolución de Problemas, Educación Primaria, Educación Matemática, errores.*

Math Problem solving errors regarding Change and Combine situations in K-7 Primary Students

Abstract

We hereby present a piece of enquiry focused on the identification of the difficulties that pupils face regarding problems solving in situations that require change and combine, and, more precisely, on the detection of the errors made in such process. Samely, we aim to determine whether there is any relation between gender and type of error. This study is exploratory in nature and applies a set of already validated problems. Findings show that pupils make more error in Change problems tan in Combine problems. The most frequent error is that they turn to mathematical operations of either addition or subtraction, choosing the corresponding opposite operation.

Keywords: *Problem Solving, Primary Education, Mathematics education, errors.*

Recibido: 20/03/2018; Aceptado: 02/04/2018

INTRODUCCIÓN

La finalidad del área de Matemáticas en Educación Primaria es el desarrollo de la Competencia matemática focalizando el interés sobre las capacidades de los sujetos para analizar y comprender las situaciones, identificar conceptos y procedimientos matemáticos aplicables, razonar sobre las mismas, generar soluciones y expresar los resultados de manera adecuada.

En el marco legislativo español (LOE, 2016; LOMCE, 2013) el Área de Matemáticas se enriquece con la creación de un nuevo bloque "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas", con este bloque se pretende que el alumnado planifique su proceso en la resolución de problemas con:

- El análisis y comprensión de su enunciado.
- Las estrategias y procedimientos puestos en práctica: hacer un dibujo, una tabla, un esquema de la situación, un ensayo y error razonado, operaciones matemáticas adecuadas, etc.
- Análisis de los resultados obtenidos: planteamiento de pequeñas investigaciones en contextos numéricos, geométricos y funcionales.

Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática.

Así, a través de ellos, podremos reflexionar sobre las experiencias de aula de los diferentes niveles educativos, sobre distintos talleres que se presentan y sobre los diferentes debates en donde se unen investigación educativa y experiencia docente.

La resolución de problemas permite también, comprobar "in situ" los problemas que surgen en la escuela en torno a las cuatro operaciones aritméticas (Puig y Cerdán, 1988), exponiendo las dificultades que encuentran los alumnos cuando van a resolverlo y, por último, se han desarrollado investigaciones que plantean sugerencias para resolver problemas de forma práctica y así ayudar al maestro en la realización de su labor como docente (Blanco y Blanco, 2009).

Es un hecho que la resolución de problemas en la Educación Primaria es un tema recurrente en la investigación en Educación Matemática. Gagne (1979) y Lester (1983) reflexionaron acerca de lo que se entiende por un problema. Carrillo (1998) intenta indagar acerca del sentido que tienen los problemas matemáticos para el profesor a través de sus concepciones.

Algunas de las investigaciones sobre adición y sustracción han recurrido a la resolución de problemas en diferentes situaciones, elaborando clasificaciones de tipos de situaciones problema según el procesamiento semántico: cambio, combinación, comparación (Heller y Greeno, 1978) y de igualación (Carpeter y Moser, 1983). Durante las décadas de los años ochenta y noventa muchos estudios han demostrado convincentemente que estos tipos de problemas distintos difieren significativamente en términos de nivel de dificultad, el tipo de estrategias que utilizan los niños para resolver estos problemas y la naturaleza de sus errores (Fucson, 1992; Verschaffel y De Corte, 1993; Verschaffel y De Corte, 1996).

A nivel español, son muchos los autores que identifican y plantean diferentes variables para realizar estudios relacionados con los problemas aritméticos. Por ejemplo, Puig y Cerdan (1998) señalan las variables de contenido y de componente semántico, mientras que Castro, Rico y Gil (1992) enfatizan la información proporcionada y la secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta.

Castro (1995) no sólo trabajó con los problemas de comparación multiplicativa sino que ha revisado las ideas y tendencias sobre este tema en España (Castro, 2008). En esta línea Casajús (2005) diseño una batería de problemas aritmético-verbales adecuados al nivel de primar ciclo de la educación primaria con la incógnita en diferentes lugares del enunciado, los cuales aplicó en Cataluña. Uno de nuestros propósitos es adecuar tales problemas al castellano y aplicarlo a una muestra de alumnos andaluces con miras a establecer comparaciones con sus resultados.

METODOLOGÍA

El presente estudio se trata de una investigación de tipo descriptiva. Tiene como aspecto central el estudio de las dificultades encontradas en la resolución de los problemas matemáticos y más concretamente en detectar los errores cometidos en tal proceso en problemas de cambio y combinación.

Objetivos

1. Comprobar si existen diferencias significativas en cuanto al sexo a la hora de resolver problemas matemáticos aritmético-verbales de cambio y de combinación.

2. Identificar los tipos de errores más frecuentes en los que incurren los alumnos en este tipo de problemas.

Para el objetivo 1, definimos las siguientes hipótesis:

- H_0= El tipo de error cometido en la resolución de problemas es independiente del sexo del alumnado.
- H_a= El tipo de error cometido en la resolución de problemas depende del sexo del alumnado.

El instrumento de recogida de datos ha sido una batería de problemas aritmético-verbales adecuados al nivel de primer ciclo de la Educación Primaria y que se han traducido del catalán al castellano (Anexo 1). Se trata de un instrumento cuya validez y fiabilidad ya ha sido comprobada por (Casajús, 2005).

En dicho instrumento, para facilitar el análisis posterior, se realizó una agrupación de los problemas de la prueba. Los grupos de problemas son los siguientes:

- Problemas aditivos de cambio (1 al 6).
- Problemas aditivos de combinación (7 y 8).

Población y muestra

En la primera fase del estudio que aquí presentamos se aplicaron únicamente los problemas de Cambio y combinación, en total 8 problemas. La muestra fue un grupo de 25 alumnos de 2º de Educación Primaria de un Centro de Educación Infantil y Primaria de la Ciudad de Córdoba, de los cuales 9 son niños y 16 son niñas, habiendo contado con su totalidad en la realización de este trabajo. El rango de edad de este 2º curso de Educación Primaria está entre 7 y 8 años, habiendo alumnado que ya tienen los 8 años cumplidos, y otros, que aún tienen 7 años.

Criterios de análisis

Para los criterios de análisis en la corrección de los errores, se tomó la lista de tipificación que recoge el conjunto de todos los errores (Tabla 1) que aparecieron originalmente en el estudio de Casajús (2005).

Se recogieron y contabilizaron todos los errores cometidos y el tipo de error según la clasificación referida. Si el planteamiento era incorrecto, se seguía corrigiendo para comprobar si existían errores en la ejecución del problema. De la misma manera, en un planteamiento correcto, no se acababa de corregir hasta recoger todos los errores cometidos.

Tabla 1. *Tipos de errores en la resolución de problemas de matemáticas en Primaria*

Tipificación de los errores en los problemas			
Aspecto a categorizar			Código error
Problema correcto			99
Problema sin contestar			0
Problema incorrecto	Planteamiento incorrecto	Error debido a "llevadas"	3
		Traslación incorrecta de la cifra del dato (cambia algunas cifras por otras diferentes). Alteración de los dígitos.	9
		En una resta siempre resta los números mayores menos los pequeños (tanto estén en el minuendo como en el substraendo)	15
		Aunque expresa explícitamente de manera clara la operación en la ejecución del problema, (en el cálculo de la suma o resta) alterna las dos operaciones para la resolución de tal operación.	16
		Coloca mal los miembros de la resta (minuendo por substraendo) tanto si ha acertado en la elección del algoritmo como si no.	17
		Se deja o añade algún dígito de algún nº que aparece como dato en el enunciado.	18
		No hay errores en la ejecución de las operaciones	19
		En una operación se deja números sin operar	20
		Expresa una operación (de suma o resta) y opera en toda ella contrariamente a lo propuesto.	21
		Utiliza como datos del problema otros números que aparecen en el enunciado en letra.	23
	Planteamiento Correcto	En una operación se deja números sin operar	40
		Error en las "llevadas".	43

RESULTADOS

En relación con los problemas de Cambio, el tipo de error que ha destacado sobre los demás es Expresa una operación y opera contrariamente a los propuestos, hasta tal punto que todos los demás errores juntos suman poco más de la mitad que este error solo (Figura 1).

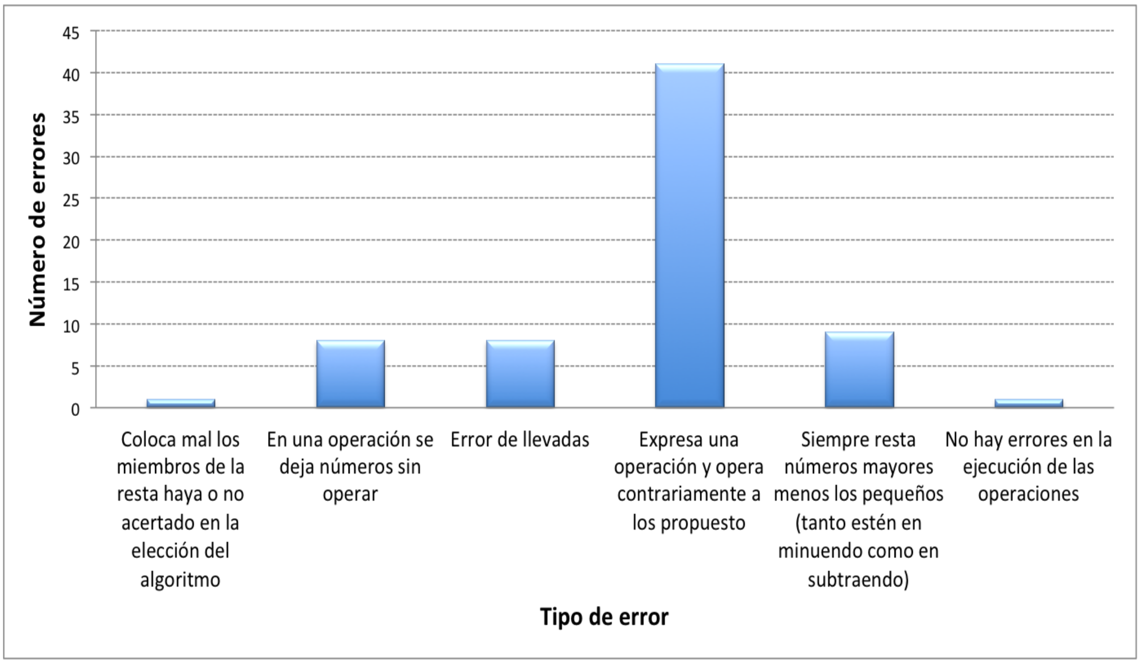


Figura 1. Tipo de error en problemas de Cambio.

Respecto a los problemas de Combinación, el tipo de error más cometido ha sido nuevamente *Expresa una operación y opera contrariamente a los propuestos*, con mucha diferencia respecto a su frecuencia comparándolo con el resto: *Coloca mal los miembros…* y *Siempre resta números mayores*…. (Figura 2).

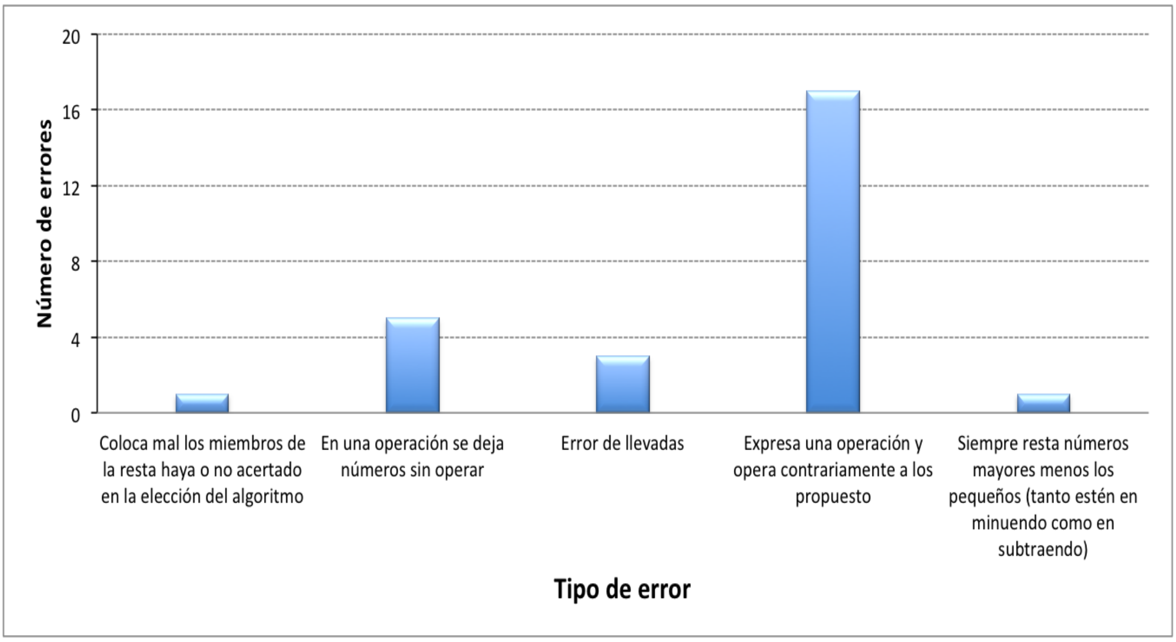


Figura 2. Tipo de error en problemas de Combinación.

Teniendo en cuenta la variable sexo podemos decir que en los problemas de cambio se observan las mayores diferencias (Tabla 2): el error más frecuente cometido por el sexo femenino es el referente al número 21, (*expresa una operación (de suma o resta) y opera en toda ella contrariamente a lo propuesto*), y destaca como los errores más frecuentes cometidos por el sexo masculino los 19 y 43.

El *problema correcto* (99) se presenta más en niñas que niños, pero en un porcentaje similar al del porcentaje de cada sexo respecto el total de la muestra (hemos tenido en cuenta que la relación de alumnos por sexo no es homogénea).

Tabla 2. *Tabla de contingencia Error*Sexo alumnado*Tipo de problema Cambio*

Tipo_problema				Sexo alumnado		Total
				Femenino	Masculino	
Cambio	Error	3	Recuento	5	2	7
			% dentro de Error	71,4%	28,6%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	5,2%	3,7%	4,7%
			% del total	3,3%	1,3%	4,7%
		15	Recuento	5	4	9
			% dentro de Error	55,6%	44,4%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	5,2%	7,4%	6,0%
			% del total	3,3%	2,7%	6,0%
		17	Recuento	1	0	1
			% dentro de Error	100,0%	0,0%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	1,0%	0,0%	0,7%
			% del total	0,7%	0,0%	0,7%
		19	Recuento	0	1	1
			% dentro de Error	0,0%	100,0%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	0,0%	1,9%	0,7%
			% del total	0,0%	0,7%	0,7%
		21	Recuento	30	11	41
			% dentro de Error	73,2%	26,8%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	31,2%	20,4%	27,3%
			% del total	20,0%	7,3%	27,3%
		40	Recuento	4	4	8
			% dentro de Error	50,0%	50,0%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	4,2%	7,4%	5,3%
			% del total	2,7%	2,7%	5,3%
		43	Recuento	0	1	1
			% dentro de Error	0,0%	100,0%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	0,0%	1,9%	0,7%
			% del total	0,0%	0,7%	0,7%
		99	Recuento	51	31	82
			% dentro de Error	62,2%	37,8%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	53,1%	57,4%	54,7%
			% del total	34,0%	20,7%	54,7%
	Total		Recuento	96	54	150
			% dentro de Error	64,0%	36,0%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	100,0%	100,0%	100,0%
			% del total	64,0%	36,0%	100,0%

De la misma forma hemos procedido con los problemas de combinación (Tabla 3). Se observan las mayores diferencias, teniendo en cuenta el sexo del alumnado, en el error número 21 más cometido por el sexo femenino (*expresa una operación (de suma o resta) y opera en toda ella contrariamente a lo propuesto*), y en los errores 19 y 43 mayormente cometido por el sexo masculino. El *problema correcto* (99) lo presentan más niñas que niños, pero en un porcentaje similar al porcentaje de cada sexo respecto el total de la muestra.

Tabla 3. *Tabla de contingencia Error*Sexo alumnado*Tipo de problema Combinación*

Tipo_problema				Sexo alumnado		Total
				Femenino	Masculino	
Combinación	Error	3	Recuento	2	1	3
			% dentro de Error	66,7%	33,3%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	6,2%	5,6%	6,0%
			% del total	4,0%	2,0%	6,0%
		15	Recuento	1	0	1
			% dentro de Error	100,0%	0,0%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	3,1%	0,0%	2,0%
			% del total	2,0%	0,0%	2,0%
		17	Recuento	1	0	1
			% dentro de Error	100,0%	0,0%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	3,1%	0,0%	2,0%
			% del total	2,0%	0,0%	2,0%
		21	Recuento	13	4	17
			% dentro de Error	76,5%	23,5%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	40,6%	22,2%	34,0%
			% del total	26,0%	8,0%	34,0%
		40	Recuento	1	4	5
			% dentro de Error	20,0%	80,0%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	3,1%	22,2%	10,0%
			% del total	2,0%	8,0%	10,0%
		99	Recuento	14	9	23
			% dentro de Error	60,9%	39,1%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	43,8%	50,0%	46,0%
			% del total	28,0%	18,0%	46,0%
	Total		Recuento	32	18	50
			% dentro de Error	64,0%	36,0%	100,0%
			% dentro de Sexo alumnado	100,0%	100,0%	100,0%
			% del total	64,0%	36,0%	100,0%

El error más significativo dentro del sexo femenino ha sido el 21 (expresa una operación (de suma o resta) y opera en toda ella contrariamente a lo propuesto), aun teniendo en cuenta su porcentaje respecto el total, y dentro del sexo masculino es el error 40 (en una operación se deja números sin operar), cometido cuatro veces más por niños que por niñas. El problema correcto (99) lo presentan más niñas que niños, pero en un porcentaje aproximado del porcentaje de cada sexo respecto el total de alumnos

Después de este análisis descriptivo de las variables, a continuación, procederemos a realizar un estudio para a comprobar si existe relación entre el sexo y el error cometido a la hora de resolver los problemas aritméticos verbales. Para facilitar el cálculo utilizaremos el tipo de problema como criterio para realizar, lo que viene a llamase una tabla de contingencia segmentada.

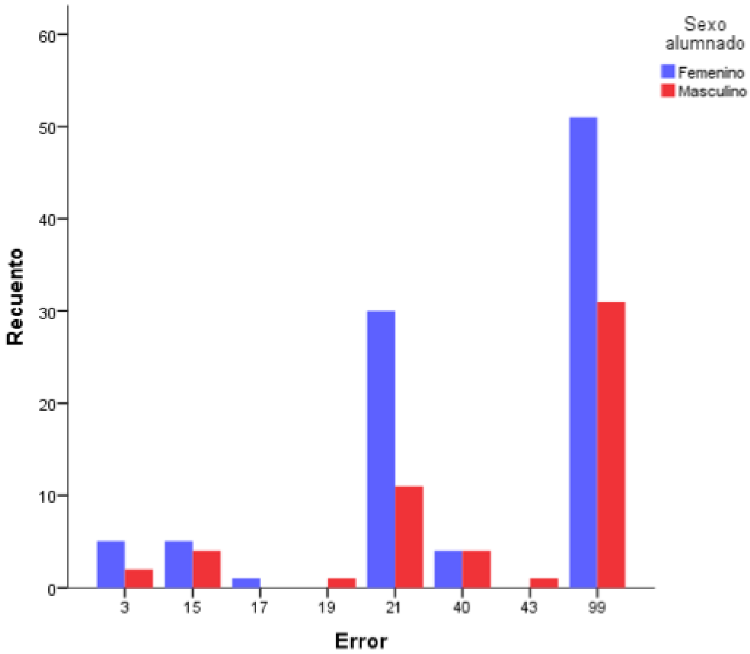


Figura 3. Error cometido en la resolución de problemas de "Cambio". Gráfico de barras agrupadas por sexo.

Teniendo en cuenta que la relación de alumnos/as por sexo no es homogénea, se observan las mayores diferencias, con más errores cometidos por el sexo femenino los referentes al número 21, *expresa una operación (de suma o resta) y opera en toda ella contrariamente a lo propuesto*, destacando más errores por el sexo masculino en los errores 19 y 43. El *problema correcto* (99) lo tienen más niñas que niños, pero en un % similar al del porcentaje de cada sexo respecto el total de la muestra.

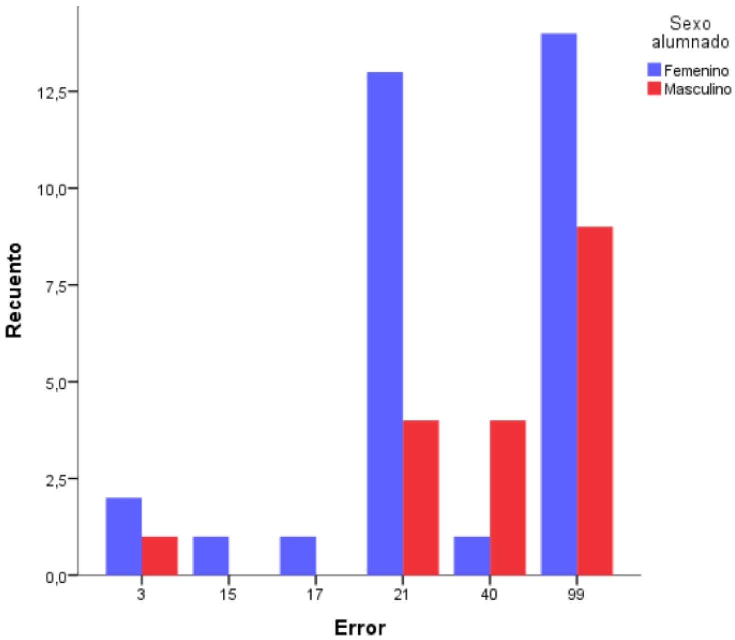


Figura 4. Error cometido en la resolución de problemas de "Combinación". Gráfico de barras agrupadas por sexo.

El error más significativo dentro del sexo femenino ha sido el 21 (*expresa una operación (de suma o resta) y opera en toda ella contrariamente a lo propuesto)*, aún teniendo en cuenta su porcentaje respecto el total, y dentro del sexo masculino es el error 40 (*en una operación se deja números sin operar*), cometido cuatro veces más por niños que por niñas. El *problema correcto* (99) lo presentan más niñas que niños, pero en un porcentaje aproximado del porcentaje de cada sexo respecto el total de alumnos.

Tabla 4. *Pruebas de chi-cuadrado (Sexo-error)*

Tipo_problema		Valor	Gl	Sig. asintótica (bilateral)	Sig. exacta (bilateral)
Cambio	Chi-cuadrado de Pearson	6,857[c]	7	,444	,456
	Razón de verosimilitudes	7,758	7	,354	,476
	Estadístico exacto de Fisher	6,768			,430
	N de casos válidos	150			
Combinación	Chi-cuadrado de Pearson	6,581[d]	5	,254	,232
	Razón de verosimilitudes	7,179	5	,208	,308
	Estadístico exacto de Fisher	6,241			,229
	N de casos válidos	50			

Como podemos comprobar (Tabla 4) en todos los casos el p-valor es mayor que 0,05 (nivel de riesgo) por lo que podemos decir que se confirma la hipótesis nula, H_0= El tipo de error cometido en la resolución de problemas es independiente del sexo del alumnado. Es decir, que la variable sexo no está relacionada con ninguno de los tipos de error en la resolución de problemas, las variables de estudio son independientes.

CONCLUSIONES

Analizando los errores cometidos por el alumnado objeto de estudio se puede comprobar que existen dos tipos de errores encontrados en los problemas que distan claramente de los demás: Expresa una operación y opera contrariamente a los propuestos.

Si nos fijamos en el texto del problema, y con los datos obtenidos en esta investigación, podemos afirmar que la dificultad para enfrentarse al problema aritmético-verbal puede encontrarse en la manera de expresarlo por escrito.

Aunque existen diferencias con respecto al sexo, en algunos casos hemos podido comprobar que estas no son significativas en ninguno de los errores analizados.

Este tipo de estudios nos da pistas importantes de dónde pueden estar las mayores dificultades del alumnado a la hora de resolver determinados tipos de problemas y, por supuesto, es fundamental hacer hincapié, desde el punto de vista metodológico, en la forma de abordar este tipo de problemas sabiendo de antemano dónde está la mayor dificultad.

Con vistas al futuro sería conveniente realizar una comparativa de los datos conseguidos en este trabajo de investigación con algún otro curso, del mismo nivel, y así cotejar resultados. Es decir, recoger un mayor número de participantes para tener en cuenta los resultados en otros contextos.

REFERENCIAS

Blanco, O. y Blanco, L. (2009). Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *Números,* 71, 75-85.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: concepts and processes* (pp. 7-44). New york: Academic Press.

Carrillo J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años* (Tesis Doctoral). Sevilla: Universidad de Sevilla.

Casajús, A. (2005). *La resolución de problemas aritmético-verbales por alumnos con Déficit de Atención con Hiperactividad (TDAH)* (Tesis Doctoral). Universidad de Barcelona.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa.* Tesis doctoral. Granada: Comares.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En *Investigación en educación matemática XII* (p. 6). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Castro, E., Rico, L. y Gil,. F. (1991). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias, 10*(3), 243-253.

Fucson, K. (1992). Research on whole number adition and subtraction. En D. A: Grows (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: MacMillan.

Gagné, R. (1979): *Las condiciones del aprendizaje*. México, Interamericana.

Heller, J. y Greeno, J. (1978). *Semantic processing of arithmetic Word problema solving.* Anual Meeting of the Midwestern Psychological Association. Chicago.

Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem solving research. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes*. London: Academy Press.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, num. 106, de 4 de mayo de 2006, pp. 17158 a 17207. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado, num. 295, de 10 de diciembre de 2013, pp. 97858 a 97921. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf

Puig, L. y Cerdan, F. (1988). Problemas aritméticos escolares. Madrid. Síntesis.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: Theoretical, methodological, and practical outcomes. *Educational Psychology Review*, *5*(3), 239-256.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. En *International handbook of mathematics education* (pp. 99-137). Dordrecht: Springer.

Aránzazu Del Rosal Pedrajas
CEIP Torre Malmuerta, Córdoba, España
txasagi@gmail.com

Mª Pilar Gutiérrez Arenas
Universidad de Córdoba, España
ue2guarp@uco.es

Alexander Maz-Machado
Universidad de Córdoba, España
ma1mamaa@uco.es

Gutiérrez-Rubio, D. y Madrid, M.J. (2018). *Geometría Selecta Theorica, y Práctica* del Matemático Cordobés Gonzalo Antonio Serrano. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1*(1), 32-39.

ISSN: 2603-9982

GEOMETRÍA SELECTA THEORICA, Y PRÁCTICA DEL MATEMÁTICO CORDOBÉS GONZALO ANTONIO SERRANO

David Gutiérrez-Rubio, Universidad de Córdoba, España

María José Madrid, Universidad Pontificia de Salamanca, España

Resumen

Gonzalo Antonio Serrano fue un médico, matemático y astrónomo cordobés del siglo XVIII con un gran volumen de publicaciones en diversas áreas científicas. En este artículo realizamos un análisis contenido de una de sus obras, un tratado de problemas de geometría plana, publicada en 1736. Mostramos una breve biografía del autor y se analiza la estructura conceptual de la obra, los sistemas de representación, estrategias didácticas utilizadas y la fenomenología de los problemas planteados.

***Palabras clave**: Historia de la Educación matemática, libros antiguos, matemáticas, biografía.*

Geometría Selecta Theorica, y Práctica of the Mathematician from Córdoba Gonzalo Antonio Serrano

Abstract

Gonzalo Antonio Serrano was a doctor, mathematician and astronomer from the eighteenth century with a large volume of publications in various scientific areas. In this article we carry out a content analysis of one of his works, a treaty of problems of plane geometry, published in 1736. We show a brief biography of the author and analyse the conceptual structure of the work, the systems of representation, didactic strategies used and phenomenology of the problems posed.

***Keywords:** History of Mathematics Education, old books, mathematics, biography.*

Recibido: 22/03/2018; Aceptado: 03/04/2018

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre Historia de la Educación matemática, tienen como objetivos de estudio fundamentales la influencia que tienen en los procesos de enseñanza de las Matemáticas determinados manuales de texto, relevantes matemáticos o educadores, los planes de estudio y legislaciones educativas de un determinado periodo.

Wussing (1998) recalca la necesidad de la investigación histórica para poder entender el cuadro de desarrollo de la Matemática dado que toda idea o concepto matemático nace en un contexto histórico y social concreto. Por su parte, según Lizcano (1993), es en los libros de texto donde efectivamente se producen las matemáticas, con lo cual cobra una especial relevancia, desde el punto de vista epistemológico, el análisis de dichos libros.

En España, son destacables los trabajos de Sierra, Rico y Gómez (1997) que realizan los primeros estudios de libros de texto españoles de matemáticas desde un punto de vista didáctico centrándose en las formas de representación, el concepto a tratar, y las aplicaciones de dichos conceptos.

El análisis de libros de texto nos aporta información sobre situaciones, instituciones o personajes que han sido claves para la Educación matemática. Asimismo, manifiesta qué se enseñaba, cómo se enseñaba y cómo se divulgaban los conocimientos matemáticos de la época (Maz-Machado y Rico, 2015).

Este trabajo presenta el análisis de la obra *Geometría Selecta Theorica, y Practica* escrita por Gonzalo Antonio Serrano publicada en 1736 y caracterizada por la presentación de un nuevo método de enseñanza denominado *Methodo en forma silogistica*.

METODOLOGÍA

El presente estudio es de carácter descriptivo y exploratorio. Se utilizó como fuente primaria una copia digitalizada del libro objeto de estudio y fuentes secundarias para describir la vida del autor y contextualizarlo en su época.

Para el análisis de la obra se usó una metodología cualitativa de análisis de contenido de uso frecuente en el área de didáctica de las matemáticas (Gómez, 2002, Maz, 2009) Dada la estructura de la obra, las unidades de análisis elegidas fueron los problemas expuestos. Como instrumento de medida se utilizó una ficha de recogida de datos con diversos indicadores de tipo conceptual, didáctico, fenomenológico y sistemas de representación.

RESULTADOS

El autor: Gonzalo Antonio Serrano

Gonzalo Antonio Serrano (1670—1761) fue médico, astrónomo y matemático cordobés de la primera mitad del siglo XVII. De orígenes humildes, su formación autodidacta le alzó como un distinguido científico, amante de la astronomía y la medicina. Durante 10 años ostentó el cargo de Cirujano Mayor del Ejército y Reales Hospitales de Ceuta, tras lo cual volvió de nuevo a Córdoba, lugar desde el que abrió cátedra libre de Astronomía y Astrología (Entrambasaguas, 1913). Fruto de todos sus estudios, publicó gran cantidad de libros y, para poder imprimirlos, estableció en 1730 su propia imprenta en la calle Císter.

Escribió textos bajo su nombre real, pero también lo hizo bajo seudónimos, como *El Piscator Andaluz* o *El Gran Astrólogo Andaluz*. Además de otras obras manuscritas, encontramos, entre otras (Cobos & Vallejo, 2014; Entrambasaguas, 1913; Núñez, 2016; Pascual, 2013; Ramírez de

Arellano, 1873; Rodríguez, 2012): *Astronomía universal, teórica y práctica* (1735), *Geometría selecta, teórica y práctica* (1736), *Apología pacífica, médico práctico y rayos luminosos de Apolo* (1739), *Tablas Filípicas, católicas o generales de los movimientos eclipses* (1744), o *El Gran Piscator Andaluz* (1744).

La obra: Geometría Selecta Theorica, y Practica

Geometría Selecta Theorica, y Practica, publicada en 1736, está dirigida a astrónomos, cosmógrafos, geómetras, arquitectos, ingenieros pilotos y otros profesionales. Dicha obra se imprimió en la imprenta personal del autor, y no se conocen más ediciones de la presente obra. Consta de una serie de problemas, con sus respectivas resoluciones de varios ámbitos de la geometría plana. La única obra que referencia es *Los Elementos* de Euclides de donde obtiene las definiciones formales de los conceptos geométricos básicos. Aparte, en la introducción da una serie de consejos para obtener cuadrados y raíces cuadradas, en la que da una referencia incompleta de un libro *De los números Quadrados*, que probablemente sea *Liber Quadratorum* de Fibonacci (1225).

Estructura del libro

La obra consta de 56 páginas, estructurada en 6 capítulos.

Capítulo 1: Proemial geométrico de las más principales definiciones de Evclides, con vna breve,y clara exposición para facilitar la inteligencia de los principiantes en esta vtilisima facultad. Páginas 1—5. Se introducen los conceptos geométricos básicos, tomando como referencias los Elementos de Euclides a la hora de definir los objetos geométricos con los que trabajará.

Capítulo 2: De los problemas geométricos de los rectángulos, o paralelos grammos rectangulares. Páginas 5—20. Consta de 26 problemas geométricos relacionados con rectángulos, junto con los entimemas o silogismos necesarios para su resolución.

Capítulo 3: De los problemas geométricos de los cuadrados. Páginas 20—22. Consta de 9 problemas geométricos relacionados con cuadrados, siguiendo una estructura similar a la anterior.

Capítulo 4: De los problemas, y mesura de los triángulos rectángulos. Páginas 22—38. Consta de 36 problemas relacionados con triángulos rectángulos.

Capítulo 5: De los problemas, y mesura de los triángulos escalenos. Páginas 38—47. Consta de 12 problemas relacionados con triángulos escalenos.

Capítulo 6: De los problemas del círculo y su dimensión. Páginas 47—56. Consta de 26 problemas relacionados con circunferencias.

Estructura conceptual

En el capítulo 1 se recogen todas las definiciones necesarias para el tratamiento de los problemas de los capítulos posteriores. El autor utiliza las definiciones de los diferentes objetos geométricos dadas por Euclides en el libro I de los Elementos. No recoge una definición de Geometría, aunque sí explica lo que se entiende por definición de un concepto, como “una breve oración, que explica la naturaleza, o propiedades de la cosa definida” (p. 1). Define conceptos básicos de geometría plana, desde el punto hasta figuras como triángulos, rectángulos o circunferencias.

En los capítulos 2 y siguientes se plantean problemas relacionados con las diferentes figuras geométricas (rectángulo, cuadrado, triángulo rectángulo, escaleno y circunferencia respectivamente).

En el problema 18 del capítulo 2 utiliza una variante del Teorema de Pitágoras, que no referencia de ninguna otra obra. Concretamente “En cualquier rectángulo el cuadrado de la diagonal es igual al duplo del área con el cuadrado de la diferencia de los lados” (p. 14). En notación moderna:

$$d^2 = 2ab + (a - b)^2$$

Donde d es la diagonal y a, b los lados del rectángulo.

ENTIMEMA. En qualquier rectangulo el quadrado de la Diagonal es igual al duplo del area con el quadrado de la diferencia de los lados; y el quadrado de la ſuma de los lados es igual al quadrado de la diferencia de los lados con el quadruplo del area. Luego, del

Figura 1. Resultados equivalentes al Teorema de Pitágoras

A lo largo del libro utiliza dichos resultados o casos particulares de ellos (para un cuadrado por ejemplo), pero no utiliza en ningún momento la forma general del Teorema de Pitágoras. Tampoco realiza ninguna demostración formal de dichas variantes.

Asimismo, utiliza como aproximación dada por Arquímedes del valor de $\pi \simeq 22/7$ (p. 48)

Archimedes demoſtrò, que el diametro del circulo con ſu circunferencia tiene la miſma proporcion que 7. con 22. Luego,

Figura 2. Aproximación de pi como 22/7

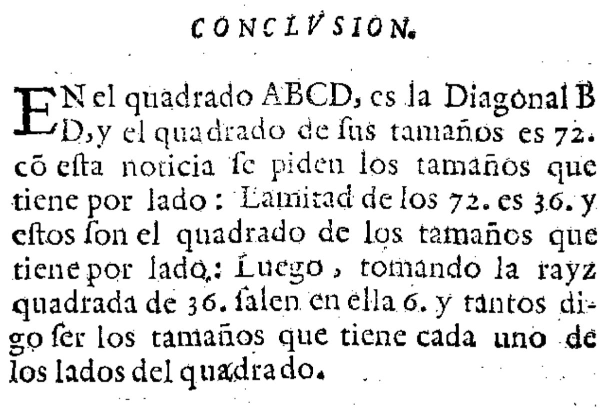
También comenta la aproximación, que atribuye a Adriano Mecio, de $\pi \simeq 355/113$ (p. 18) (Figura 3)

circunferencia en numeros pequeños, es l
de Adriano Mecio, el qual dize: que ſ
el diametro de vn circulo es 113. ſu circun-
ferencia es 355. y el Padre Joſeph Zarago-

Figura 3. Aproximación de pi como 355/113

Sistemas de representación

El autor utiliza mayoritariamente el lenguaje verbal para definir conceptos, explicar los procedimientos y los problemas. No utiliza lenguaje algebraico, salvo cuando utiliza letras para nombrar a los diferentes objetos geométricos que intervienen en el problema. Las operaciones numéricas también están representadas verbalmente. Por ejemplo, en la 4 se realizan las operaciones necesarias para resolver, con unos datos concretos, el problema 4 del capítulo 3 (p. 21), que en notación matemática moderna, correspondería a $AB = \sqrt{\frac{BD^2}{2}}$.



CONCLVSION.

EN el quadrado ABCD, es la Diagonal B D, y el quadrado de ſus tamaños es 72. cō eſta noticia ſe piden los tamaños que tiene por lado: La mitad de los 72. es 36. y eſtos ſon el quadrado de los tamaños que tiene por lado: Luego, tomando la rayz quadrada de 36. ſalen en ella 6. y tantos digo ſer los tamaños que tiene cada uno de los lados del quadrado.

Figura 4. Ejemplo de operaciones numéricas utilizando representación verbal

La mayoría de los problemas vienen acompañados de una representación gráfica del mismo como apoyo para su comprensión.

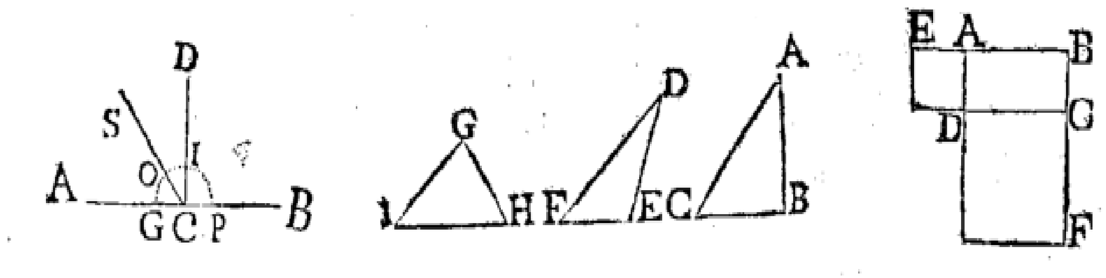


Figura 5. Ejemplos de figuras representadas en el libro

Estrategias didácticas

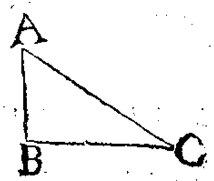
El autor presenta un método de enseñanza denominado en la obra "Método en forma silogística". Dicho método, usado en todo el libro, consiste en plantear problemas concretos de geometría plana, para los que primero se muestran el o los resultados teóricos necesarios para su resolución y posteriormente se resuelve el problema. Dichos resultados se muestran siempre en la forma de silogismos o entimemas, y no se demuestran formalmente. Finalmente, en un apartado llamado "Conclusión" se aplica la resolución del problema en un caso concreto.

En la 6 se aprecia un ejemplo del uso de dicho método. Comienza planteando una situación problemática. En este caso, se conoce el área y un cateto de un triángulo rectángulo, y hay que hallar el valor del otro lado. A continuación, expresado en forma de entimema, se plantea el razonamiento lógico para resolver dicho problema. A modo de conclusión, resuelve el problema para unos valores concretos de área y cateto (24 y 6 respectivamente).

PROBLEMA II.

Dada el Area de vn triangulo rectangulo, y el vn lado, se pide el otro.

ENTIMEMA. Multiplicando el vn lado por el otro, el producto es el duplo del Area: Luego, el duplo del Area partido por el lado dado, al quociente saldrà el valor del otro lado.



CONCLVSION.

EN el triangulo ABC. el lado AB, tiene 6. y el Area es 24. se pide el lado BC. El duplo del Area es 48. el qual partido por 6. del lado dado, el quociente es 8. y tanto digo valer el lado BC. La prueba consta del precedente Problema.

Figura 6. Ejemplo de método silogístico

En el problema 6 del capítulo 5, como excepción, se incluye un apartado llamado "Reflexión" y otro "Conclusión" donde se discute el caso de que la altura de un triángulo caiga fuera de la base.

Los problemas planteados siguen todos, el esquema "Dado el objeto geométrico X, conociendo algunos datos sobre uno o más de sus elementos, deducir cuál será la magnitud de otro de sus elementos". Los datos de los que parte pueden ser longitudes de lados o áreas de la figura, o expresiones que combinan varios elementos como la diferencia de los dos lados en un rectángulo o el cuadrado de la diagonal en un cuadrado.

Así, por ejemplo, el problema 3 del capítulo 2 "De cualquier rectángulo dada el área y un lado se pide el otro lado" (p. 6), o el problema 8 del capítulo 5 "[En un triángulo cualquiera] Dada la perpendicular, y la diferencia de los segmentos, y la diferencia de los lados, se piden los 3 lados" (p. 43).

PROBLEMA III.

De vn qualquier rectangulo dado el producto de la multiplicacion del quadrado de vn lado por el quadrado del otro lado se pide el area.

PROBLEMA VII.

Dada la perpendicular, la suma de los lados, y la diferencia de los segmentos, se piden los lados.

Figura 7. Ejemplos de la estructura de los problemas planteados

Para el cálculo de raíces cuadradas y cuadrados hace referencia a una tabla de números cuadrados, sin dar más información de la obra.

Fenomenología

Los problemas presentados se restringen al ámbito matemático, con situaciones propuestas de geometría plana. No se presentan aplicaciones a problemas concretos de la vida cotidiana.

De igual forma, la resolución de los problemas se realiza en un contexto estrictamente matemático.

CONCLUSIONES

La obra estudiada se presenta como un tratado de Geometría especialmente pensado para profesionales de la época, si bien carece de supuestos prácticos, ya que están planteados puramente en el ámbito matemático. Los problemas constan de casos concretos con una metodología específica para su resolución, y tienen un carácter puramente instrumental, fruto de la experiencia del autor, que escribió dicha obra con 66 años. Este hecho pone en evidencia la preocupación social de un erudito que vio las carencias matemáticas existentes en su ciudad y procuró brindar un manual que sirviera como herramienta y orientación en aspectos básicos de la geometría de la época que eran necesarios para el desempeño de diferentes artes y profesiones.

Hemos sacado a la luz a un autor casi desconocido en el ámbito español pero que fue un prolífico autor de textos de variadas ramas científicas. Lo que pone de manifiesto la necesidad de este tipo de estudios para poner en valor a personajes del pasado que pusieron su grano de arena en la difusión del conocimiento matemático en España.

Agradecimientos: este trabajo se ha realizado dentro del proyecto de investigación del Plan I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad (Fondos FEDER) EDU2016-78764-P.

REFERENCIAS

Cobos, J. M., & Vallejo, J. R. (2014). *Jerónimo Audije de la Fuente y Hernández. El piscator de Guadalupe*. España: Editamás.

Entrambasaguas, J. (1913). Un memorial autobiográfico de D. Diego de Torres Villarroel. *Boletín de la Academia Española, tomo XVIII*, 395-417.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-292.

Hafter, M. Z. (1975). Toward a History of Spanish Imaginary Voyages. *Eighteenth-Century Studies, 8*(3), 265-282.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo. La construcción social del número y el infinito*. Madrid: Paidós.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En Gonzalez, M., González, M. y Murillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación matemática XIII* , pp. 5-20. Santander: SEIEM

Maz-Machado, A., & Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(1), 49-76.

Núñez, J. (2016). Algunos matemáticos andaluces nacidos entre los siglos XV y XIX. *Pensamiento*

Matemático, 6(2), 121-147. http://hdl.handle.net/11441/49016

Pascual, J. L. (2013). Un vacío por rellenar en la historia de la Meteorología. *AME Boletín, 27,* 30-33.

Ramírez de Arellano, T. (1873). *Paseos por Córdoba. Córdoba*: Rafael Arroyo.

Rodríguez, M. L. (2012). Cirujanos Novohispanos poseedores de libros (1779-1818). *Boletín del Instituto de Investigaciones Bibliográficas, XIII*(1—2), 43-64.

Rico, L., Gómez, B., & Sierra, M. (1997). El número y la forma: libros e impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En *Historia ilustrada del libro escolar en España: del Antiguo Régimen a la Segunda República* (pp. 373-398). Fundación Germán Sánchez Ruipérez.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.

David Gutiérrez Rubio
Universidad de Córdoba, España
dgrubio@uco.es

María José Madrid
Universidad Pontificia de Salamanca, España
mjmadridma@upsa.es

Salgado, M., Salinas, M.J. y Sequeiros, P.G. (2018). Aprendizaje matemático infantil a través del trabajo por proyectos. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1*(1), 40-48.

ISSN: 2603-9982

APRENDIZAJE MATEMÁTICO INFANTIL A TRAVÉS DEL TRABAJO POR PROYECTOS

María Salgado, Universidade de Santiago de Compostela, España

María Jesús Salinas, Universidade de Santiago de Compostela, España

Pablo G. Sequeiros, Universidade de Santiago de Compostela, España

Resumen

El quehacer diario de las maestras y maestros de Educación Infantil determina en buena medida las acciones matemáticas que su alumnado desarrolla en el aula, y que después traslada a contextos y situaciones cotidianos de su contorno. La forma de enseñar y programar experiencias y situaciones ricas en procesos matemáticos por parte de los docentes cobra por tanto importancia desde las primeras etapas educativas. Se trata de que las matemáticas supongan para el alumnado una herramienta útil y funcional, que permita la inclusión social, y no únicamente la segregación de los estudiantes por sus resultados. El trabajo por proyectos permite a priori crear situaciones significativas, en las que a través de la acción se abstraen y comprenden los nuevos aprendizajes. En este trabajo se presenta un estudio del análisis e implantación de los proyectos de trabajo en un aula de educación infantil, desde su programación hasta su evaluación, así como su correlación con las capacidades matemáticas del alumnado.

Palabras clave*: Educación Infantil, matemáticas, aprendizaje por proyectos.*

Mathematical learning for children through project work

Abstract

The work of Early Childhood Education teachers determines to a large extent the mathematical actions which their students develop in the classroom, and which later they transfer to daily contexts. Therefore, it is important that teachers program and develop rich mathematical experiences from the first levels. It is about made mathematics a useful and functional tool for students allowing social inclusion, but not the segregation of students by results. Project-based learning allows a priori significant situations in which the new learning are abstracted and understood through the action. This paper presents a study of the analysis and implementation of work projects in a classroom for early childhood education, from its programming to its evaluation, as well as its correlation with the mathematical abilities of the students.

Keywords: *Early Childhood Education, Mathematics, Project-based learning.*

Recibido: 22/03/2018; Aceptado: 05/04/2018

INTRODUCCIÓN

El ser humano construye a partir de una aptitud receptiva y elabora sus esquemas de conocimiento integrando elementos que mantienen entre si numerosas y complejas relaciones. Lo nuevo se relaciona de manera substantiva y no arbitraria con lo que ya sabemos, y en la medida del interés que demostramos ante el aprendizaje que se nos presenta. Las matemáticas ya no se consideran como simple memorización de hechos y ejercitación de destrezas, sino que se incluyen en el medio cultural, en los intereses y la afectividad de los niños y niñas, integrando las estructuras conceptuales con procedimientos y estrategias que favorezcan la creatividad, intuición y pensamiento divergente del alumnado (Kilpatrick et al., 1994). El pensamiento matemático se caracteriza por un deseo de hallar algo. Los alumnos no aprenden recibiendo y acumulando pasivamente información, sino a través de un proceso activo de elaboración de significados y de atribución de sentidos que se lleva a cabo mediante la interacción, la negociación y la comunicación con otras personas en contextos particulares. Las matemáticas se conciben pues como el resultado de una actividad socialmente mediada (Edo, 2005).

Educación matemática infantil y metodologías activas de enseñanza-aprendizaje

Transmitir a los alumnos que las matemáticas o la solución a un problema no se limitan a realizar correctamente una grafía o un algoritmo mecánicamente es una de las tareas más importantes que los docentes de matemáticas deberían plantearse a la hora de planificar sus actividades. El punto de partida de la enseñanza de las matemáticas debería ser "tener claro que lo que el niño necesita son oportunidades para aprender y descubrir aspectos matemáticos de la realidad por sí mismo" (Alsina, Aymerich y Barba, 2008:15), y el fin enseñar a pensar. En la práctica, es aún habitual que buena parte de la actividad matemática se reduzca a rellenar fichas para ejercitar destrezas de manera mecánica. No obstante, desde el punto de vista del conocimiento matemático infantil, el uso de actividades impresas debe reservarse siempre para una última fase (Alsina et al., 1996). Antes el alumno debe poder manipular y experimentar, modelizando situaciones y problemas. Se entiende necesario desarrollar experiencias que movilicen los conocimientos informales del alumnado (Ramírez y De Castro, 2014) y que el docente pueda disponer de preguntas y situaciones problemáticas que permitan a los alumnos encontrar la funcionalidad de las matemáticas (Sierra y Rodríguez, 2012).

En el plano curricular, desde hace ya algunos años, se mantiene la idea de plantear el trabajo en el aula de infantil a partir de un enfoque globalizado. Desde el punto de vista del aprendizaje matemático, esto implica, de acuerdo con Alsina (2011), relacionar los diferentes bloques de contenido matemático y relacionar también los contenidos y los procesos matemáticos (intradisciplinariedad), así como las matemáticas con otras áreas de conocimiento y con el entorno que nos rodea (interdisciplinariedad). Por otro lado, también a nivel curricular, se insiste en todos los niveles en que el alumnado no solo debe saber matemáticas, sino ser *matemáticamente competente*, esto es, tener capacidad para valorar su utilidad y saber emplearlas de manera flexible en las situaciones que sean precisas.

En nuestro contexto, este enfoque globalizado y competencial ha ido de la mano, durante no poco tiempo, de la tentativa de implantar los *proyectos de trabajo* como una metodología de referencia en Educación Infantil. El aprendizaje basado en proyectos tiene su base en las teorías del constructivismo social elaboradas a partir de los trabajos de autores como Piaget, Vigotsky y Bruner, para los que el aprendizaje supone un proceso constructivo que se apoya en la acción, a través de la resolución de problemas y la interacción con los demás. Hoy en día, podríamos decir que abarca toda una serie de planteamientos que ponen el acento en el sentido funcional del aprendizaje, la programación a partir de tareas motivadoras para el alumnado, la cooperación (coprogramación) entre el profesor y el alumno, el aprendizaje comprensivo, el respeto a los distintos ritmos de aprendizaje y la importancia de evaluar los procesos (Hernández y Ventura, 2008).

METODOLOGÍA

En este trabajo se recoge un estudio cuasi-experimental que se llevó a cabo entre los años 2010 y 2013 (Salgado, 2016), a través del diseño de prácticas reales probadas con escolares y basadas en la metodología de los proyectos de trabajo.

Dicho estudio constó de cinco etapas:

- En la primera, se realizó un pre-test a cada alumno individualmente a través de una entrevista con el instrumento de evaluación TEMA-3, un test normativo, fiable y válido, de la habilidad infantil (Núñez del Río y Lozano, 2007). Se compone de 72 ítems, 41 relativos a aspectos informales y 31 a aspectos formales, con el que se pretendía conocer el nivel matemático del alumnado.
- En la segunda etapa, con los resultados de la primera etapa, y tomando en consideración los referentes teóricos de partida, se diseñaron las líneas metodológicas de los proyectos de trabajo, seleccionando objetivos y contenidos de futura implantación en base al currículo.
- En la tercera etapa, se implementaron los proyectos de trabajo en el aula (uno por trimestre) y se evaluó el índice competencial de las actividades, a partir de las evidencias aportadas por filmaciones de las sesiones y el registro de transcripciones, con el instrumento de evaluación elaborado por el CREAMAT (2009). Está compuesto por diez preguntas agrupadas en dos bloques, de planteamiento y gestión de la actividad (tabla 1), que pretenden orientar cómo debería ser una práctica favorecedora del desarrollo de la competencia matemática.
- En la cuarta etapa, se realizó un post-test a los alumnos participantes, nuevamente con el instrumento de evaluación TEMA-3.
- En la quinta etapa, se comparan los resultados del pre-test y del post-test con el fin de valorar la repercusión de los proyectos implementados en el alumnado.

Participantes

La muestra estuvo compuesta por 20 niños de un colegio público de Educación Infantil y Primaria de la comarca de Santiago de Compostela, 11 niñas y 9 niños, de los que 11 habían acudido a guardería antes de su escolarización en el colegio y los 9 restantes habían sido escolarizados por primera vez el curso anterior. En cualquier caso, todos habían estado el curso anterior en el mismo colegio, mismo grupo-aula y con la misma tutora.

Tabla 1. *Indicadores competenciales (CREAMAT, 2009)*

Planteamiento de la actividad	
P1	¿Se trata de una actividad que tiene por objetivo responder a un reto? El reto puede referirse a un contexto cotidiano, puede enmarcarse en un juego, o bien puede tratar de una regularidad o hecho matemático.
P2	¿Permite aplicar conocimientos ya adquiridos y hacer nuevos aprendizajes?
P3	¿Ayuda a relacionar conocimientos diversos dentro de la matemática o con otras materias?
P4	¿Es una actividad que se puede desarrollar de diferentes formas y estimula la curiosidad y la creatividad de los niños y niñas?
P5	¿Implica el uso de instrumentos diversos como por ejemplo material que se pueda manipular, herramientas de dibujo, software, etc
Gestión de la actividad	
G1	¿Se fomenta la autonomía y la iniciativa de los niños y niñas?
G2	¿Se interviene a partir de preguntas adecuadas más que con explicaciones?
G3	¿Se pone en juego el trabajo y el esfuerzo individual pero también el trabajo en parejas o en grupos que implica conversar, argumentar, convencer, consensuar, etc.?
G4	¿Implica razonar sobre el que se ha hecho y justificar los resultados?
G5	¿Se avanza en la representación de manera cada vez más precisa y se usa progresivamente lenguaje matemático más preciso?

RESULTADOS

El resultado de la aplicación de la metodología de los proyectos de trabajo se analizó a partir del desarrollo de tres actividades: El cuerpo humano, Las abejas y Meriendas saludables. A continuación se describen a modo de ejemplo el desarrollo y evaluación de la primera de ellas.

Desarrollo de la actividad

Durante una de las sesiones anteriores se había tratado el aparato digestivo y se había llegado a la información de que el intestino estirado mide 8m. Surgió ahí la pregunta por parte de algunos alumnos: ¿cuánto son 8m? Se procuró entonces que el alumnado diese una solución al problema de modo inductivo (Salgado y Salinas, 2012), por medio del estudio de patrones numéricos (Palhares y Mamede, 2002), e intentara generalizar el proceso de resolución seguido (Barros y Palhares, 2001). La docente actuó de mediadora a través de preguntas que provocasen interés y curiosidad por descubrir y encontrar la solución, y otras que ayudasen a reconducir la situación cuando fuese necesario. Puede verse un video editado de las dos sesiones de 50 min en las que se desarrolló la actividad en: http://eucocinoticocinas.blogspot.com.es/2011/12/o-aparello-dixestivo.html

Sesión 1

La primera sesión comenzó en la asamblea, en grupo-aula, intercambiando y registrando ideas en la pizarra. A continuación, de forma individual, cada alumno trató de representar 8m en papel.

Inicio: La profesora se sienta en la zona de la asamblea y les pregunta cómo pueden saber cuánto son 8m. Un alumno plantea que midiendo y se presenta el metro.

Desarrollo: Los niños, distribuidos por el aula en sus sillas, van opinando y representando sucesivamente en la pizarra un metro, con el fin de registrar 8m. Durante el desarrollo la profesora realiza preguntas como ¿cuántos llevamos?, ¿cuántos faltan?... provocando interacciones y retroalimentación en el alumnado.

Figura 1. Construyendo 8m en la pizarra

Profe: Desde Carla hasta Manuel, ¿vale? Haz una raya. Muy bien. Eso es 1m. Pero, no son 8m, ¿verdad? ¿Y cómo pueden ser 8 m? Dime María.
Niña M: Si sigue esta raya hasta aquí, ya son 8m.
Profe. Si ponemos otra raya, ¿ya son 8 m?
Niña M: Sí.
Profe: No sé, tengo mis dudas. María dice que si estiramos una raya más ya tenemos 8 metros ¿Vosotros creéis que eso son 8 m?
Niño I: No, así es más de 8.
Profe: Ahí tenemos 2m. Y mi pregunta es, ¿cómo hacemos para tener 4?
Niña E: Hacer una raya de arriba abajo.
Profe: Tenemos un problema, aquí tenemos otro metro. Antes teníamos 2 metros más 1, ¿cuánto es?
Niños: Tres.
Profe: Pero no son 8 metros.
Niño A: Si hacemos otra, y otra ahí, podían ser por lo menos 6.
Profe: Ven Alejandro, haz tu idea. Teníamos 3, ¿medimos cuánto es eso?
Niño A: 4.
Niño A.V: A lo mejor si seguimos por ahí…
Profe: ¿Tenemos 8 m?
Niños: No.
Profe: ¿Cuánto hay?
Niño I: 5.
Profe: ¿Por qué?
Niño I: Si tenemos 1 más, y luego unos cuantos más ya son 8.
Niño F: Poner 3 líneas más.

Profe:	Ah.
Niño F:	Así ya son 8 m.
Profe:	Hugo, ¿cuál es tu idea?
Niño H:	Si ponemos dos más puede que ya sean 8.
Profe:	Teníamos 5, ¿cuántas nos faltan?
Niña E:	3.
Niña M:	3 líneas.
Profe:	¿De cuánto cada línea?
Niño I:	1 m.

Los estudiantes van añadiendo 1m sucesivamente hasta 4. En ese momento algunos alumnos comenzaron a intuir la solución, saltando de 4 a 8. El resto de los estudiantes siguen proponiendo ir aumentando de 1 en 1.

Final: La profesora le pide a los alumnos que representen en un folio en blanco 8m. Es importante resaltar que en ningún momento les pide que registren lo recogido en la pizarra.

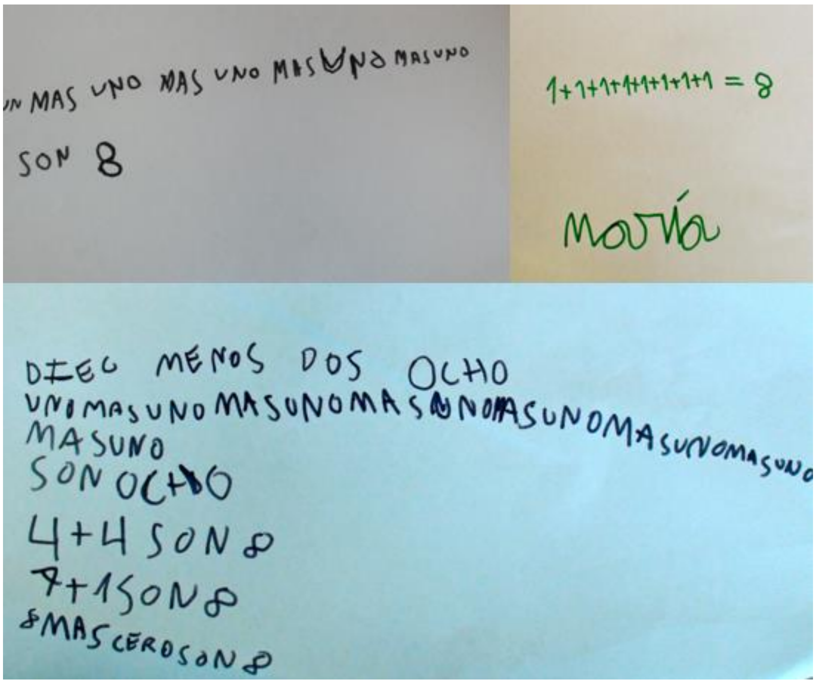


Figura 2. Algunas representaciones del alumnado

Sesión 2

La segunda sesión se llevó a cabo en gran grupo de forma vivencial, estirando un ovillo de lana por el aula una longitud de 8m. Por último, entre todos los miembros del aula se buscan patrones "humanos" de 1m.

Inicio: La profesora se sienta en la alfombra y un alumno plantea que el intestino es como un ovillo de lana. La maestra sugiere utilizarlo para representar 8m.

Desarrollo: A través de las preguntas de la docente los niños comienzan a estirar la lana, medir y marcar 1m. Así, sucesivamente, uno tras otro hasta los 8m. La maestra pregunta qué puede medir un metro en el aula y de este modo van surgiendo diferentes patrones.

Figura 3. Patrones de 1m

Profe: Aquí tenemos el intestino. ¿Y cuánto medía estirado?

Niños:	8m.
Profe:	¿Cómo podemos construir 8m?, ¿quién tiene alguna idea?
Niña M:	Uno de nosotros podía coger la lana y rodarla alrededor de la mesa grande.
Profe:	¿Y así ya sabemos que son 8m?
Niño I:	Me parece que no.
Niño E:	Porque hay que medir.
Profe:	¿Con qué?
Niño E:	Con el medidor.
Niño H:	Podíamos hacer lo mismo de la pizarra para medir 8m.

Estiran el ovillo y construyen un metro (Esteban e Iker)

Profe:	Dime Alejandro.
Niño Av:	Hacer un cacho más.
Profe:	¿Cuántos llevamos?
Niño A:	2.
Profe:	2m.
Niño A:	Podemos estirar 2 veces eso para conseguir 4m.
Profe:	Ah. Dime Enma.
Niña E:	Podemos estirar 1 más y tenemos 5.
Profe:	¿Cuánto más para tener 5?
Niña E:	3.
Profe:	Jesús, tenemos 2 ¿cuántos nos faltan para tener 8?
Niño J:	6.
Niño A:	3 más 3, más 2 más.

Final: La profesora pide a los alumnos que busquen y comparen diferentes patrones de 1m.

Evaluación del índice competencial

Para esta actividad, se concluyó la presencia de al menos cuatro de los cinco indicadores de planteamiento y cuatro de gestión (Salgado, 2016).

La actividad se presenta en un contexto realista y parte de un hecho matemático desconocido por los alumnos (P1), que permite indagar, descubrir a partir de conocimientos previos, la unidad, el metro (P2), llegar al resultado y adquirir nuevos aprendizajes, patrones de 1m. Conecta las matemáticas entre sí, número y medida, al igual que con otras disciplinas, conocimiento del medio, el cuerpo humano (P3). Además, para la resolución del problema, promueve el uso de reglas, cintas métricas... motivando la participación activa del alumnado (P5).

Con respecto a la gestión de la actividad, se plantea en asamblea al grupo-clase, y a partir de las preguntas de la maestra (G2) y respuestas de los alumnos se comienza la resolución (G1). Todas las opiniones se escuchan, se valoran, se comprueban... (G3), intentando retroalimentar con las aportaciones de los diferentes alumnos y así avanzar en la construcción del conocimiento (G4).

CONCLUSIONES

En el seno del CREAMAT (2009) se han identificado indicadores competenciales que deberían estar presentes en una buena práctica docente: de planificación (P1, P2, P3, P4 y P5) y de gestión (G1, G2, G3, G4 y G5). La identificación de presencia y ausencia de indicadores de los procesos ha ayudado a analizar los beneficios y limitaciones de la práctica docente desarrollada.

En general, los proyectos de trabajo se manifestaron como prácticas que permiten interrelacionar conocimientos entre si al igual que con otras disciplinas (P3). Por otro lado, posibilitan interacciones entre iguales (G3) en el desarrollo de dichos procesos.

Las tres actividades matemáticas analizadas representan realmente actividades cerradas dentro de un proyecto, guiadas por la docente, que imposibilitaron la incorporación de todas las aportaciones del alumnado y sus puntos de vista (P4), al igual que la puesta en común y justificación de resultados, puesto que en algunos casos fueron anticipados por la docente (G4). Por último, se observa la ausencia de tres indicadores (P1, G1 y G2) en dos de las tres prácticas analizadas (Salgado, 2016). El carácter cerrado de las cuestiones no permitió en ese caso a los alumnos tomar decisiones y actuar autónomamente, al igual que impidió que la práctica educativa fuese gestionada por medio de preguntas.

Las evaluaciones pre-y post-test que se realizaron antes y después de las prácticas de aula (prueba TEMA-3), arrojan datos no concluyentes, al no apreciarse mejoras entre uno y otro. Al contrario, el post-test ofrece peores resultados. Creemos que es debido, por un lado, a que en los indicadores de la prueba correspondientes a la edad de 4 y 5 años predominan los ítems relacionados con el pensamiento informal, frente a los indicadores de 6 años donde aumentan el número de indicadores formales. Por otro lado, la práctica docente implementada favorece la adquisición de habilidades frente a conceptos. Aún así, y sin que se pueda decir que esto se deba a la práctica docente aquí analizada, el 60% del alumnado tuvo un índice igual o superior a la media establecida por la prueba al finalizar la etapa de Educación Infantil, obteniendo las niñas mejores resultados.

Por último, cabe explicitar que, dado el carácter abierto de los proyectos, es necesario programar previamente la actividad matemática que se pueda desarrollar en su transcurso. Las actividades analizadas representan realmente actividades locales dentro de proyectos.

REFERENCIAS

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J. M., Jiménez, J., & Torra, M. (1996). Enseñar matemáticas. Barcelona: Graó.

Alsina, A., Aymerich, C., y Barba, C. (2008). Una visión actualizada de la didáctica de la matemática en educación infantil. *UNO Revista de didáctica de las matemáticas,* 47, 10-19.

Alsina, A. (2011). *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años.* Cuadernos de educación, n. 62. Barcelona: Horsori.

Barros, M.G. y Palhares, P. (2001). *Emergéncia da Matemática no Jardim-de- Infancia.* Porto:

Porto Editora.

Edo, M. (2005). Educación matemática versus Instrucción matemática en Infantil. En E. Rodrígues (coord..). *Actas do I Congresso Internacional de Aprendizagem na Educaçao de Infancia – CIANEI* (pp. 125-137). Porto: Gailivro

Hernández, F. y Ventura, M. (2008). *La organización del currículum por proyectos de trabajo: La educación es un caleidoscopio.* Barcelona: Graó.

Kilpatrick (1994). *Educación Matemática e Investigación.* Madrid: Síntesis.

Palhares, P. y Mamede, E. (2002). Os padroes na matemática do pré-escolar. *Educare- Educere, 10*(1), 107-123.

Núñez del Río, M.C. y Lozano, I. (2007). *Test de Competencia Matemática Básica.* Madrid: TEA ediciones, S.A.

Ramírez, M. y De Castro, C. (2014). Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 31*(3), 41-56.

Salgado, M. (2016). *La práctica docente en la educación infantil desde el enfoque de la educación matemática realista y los procesos matemáticos*. Tesis Doctoral. Santiago de Compostela. USC.

Salgado, M., y Salinas, M. J. (2012). El razonamiento inductivo como generador de la construcción del número en 5 años. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 119-125). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Sierra, T.A. y Rodríguez, E. (2012). Una propuesta para la enseñanza del número en la Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 80, 25-52.

María Salgado
Universidade de Santiago de Compostela, España
maria.salgado@usc.es

María Jesús Salinas
Universidade de Santiago de Compostela, España
mjesus.salinas@usc.es

Pablo G. Sequeiros
Universidade de Santiago de Compostela, España
pablo.gonzalez.sequeiros@usc.es

MES