

Matemáticas, Educación y Sociedad

ISSN: 2603-9982

Matemáticas, Educación y Sociedad

**<http://mesjournal.es/>
editor@mesjournal.es**



Vol 1 No 2 (2018):

Matemáticas, Educación y Sociedad

Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes

José R. Galo-Sánchez

1-20

Usos del software de Geometría dinámica en la formación inicial de profesores de Matemáticas

Martha Iglesias y José Ortiz

21-35

La resolución de problemas matemáticos en primeras edades escolares con Bee-Bot

Pascual D. Diago, David Arnau y José Antonio González-Calero

36-50



ISSN: 2603-9982

Galo-Sánchez, J.R. (2018). Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 1(2), 1-20.

PARTICIÓN PRISMÁTICA DE UN CUBO EN SEIS PIRÁMIDES TRIANGULARES EQUIVALENTES

José R. Galo-Sánchez, Red Educativa Digital Descartes, España

Resumen

En este artículo se realiza un análisis constructivo, global y unificador de la descomposición de un cubo en pirámides cuadradas y triangulares. Un problema clásico del que se encuentran soluciones regulares aisladas e inconexas y del que, aquí, se hace un completo y detallado recubrimiento descriptivo de su solución. Un recorrido que en particular detalla la respuesta a cómo realizar la partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes.

Palabras clave: *Partición poliedros, cubo, pirámide.*

Prismatic dissection of a cube into six equivalent triangular pyramids

Abstract

In this article a constructive, global and unifying analysis of the dissection of a cube into square and triangular pyramids is made. A classic problem, which regular, isolated and disconnected solutions are found and here a complete and detailed descriptive covering of their solution is performed. A tour that particularly details the answer to how to carry out the prismatic partition of a cube into six equivalent triangular pyramids.

Keywords: *Polyhedron dissection, cube, pyramid.*

INTRODUCCIÓN

El cubo o hexaedro regular, lo mismo que el resto de los poliedros regulares convexos —los sólidos platónicos—, tiene un atractivo generalizado tanto para expertos como para profanos. Los primeros, para profundizar en su estudio y análisis, habitualmente suelen proceder a realizar cortes planos con objeto de determinar cuáles son las diferentes secciones poligonales que pueden obtenerse; o bien buscan conocer diferentes descomposiciones o particiones del mismo en otros poliedros. Y algunos de los segundos, y muchos de los primeros, seguro que se han encontrado en algún momento con la actividad lúdica de elaborar puzzles o rompecabezas consistentes en montar un cubo a partir de unas piezas dadas; o bien, realizando una lectura recíproca, el diseñador y constructor de los mismos ha de plantearse cómo partir un cubo en diferentes piezas sobre las que puede autoimponerse ciertas restricciones o establecer cierta homogeneidad en la forma, el volumen o cualquier otro atributo o propiedad. En particular se puede establecer, por ejemplo, que las piezas sean de un mismo tipo e incluso iguales. La elegancia alcanzada en la partición obtenida, o la mayor o menor dificultad que involucra el adoptar un criterio u otro es matizable y opinable y, por tanto, no nos adentraremos en ello. Pero un planteamiento usual es la partición del cubo¹ en pirámides de base cuadrada y en pirámides de base triangular y en ello vamos a centrarnos. En todo este artículo consideraremos un cubo de arista unidad y todo lo que expondremos es aplicable a un cubo de arista cualquiera sin más que aplicar una homotecia.

PARTICIÓN DE UN CUBO EN PIRÁMIDES DE BASE CUADRADA

Atendiendo a que el cardinal de los elementos que componen la partición sea mínimo o que entre sí sean lo más regulares o similares posible, se obtienen cuatro situaciones que son las que usualmente suelen divulgarse (ver figura 1):

- 1) Descomposición en tres pirámides iguales (estrictamente deberíamos decir congruentes²). Al quedar dividido el cubo en tres partes iguales, este caso suele ponerse como un ejemplo visual de por qué el volumen de una pirámide se calcula como

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \text{Área}_{Base} \text{ altura}$$

e incluso éste puede ser el primer paso para realizar una demostración de esa igualdad.

- 2) En cuatro pirámides iguales dos a dos.
- 3) En cinco pirámides, cuatro iguales y una desigual, siendo ésta regular.
- 4) En seis pirámides regulares iguales.

Estas particiones pueden recrearse en los hiperenlaces anteriores que se corresponden con sendos objetos interactivos.

Estos cuatro casos considerados no son más que situaciones particulares de una partición general del cubo realizada en base a los ocho vértices y a un punto adicional del mismo. Veámoslo a continuación.

Para construir una partición del cubo en pirámides cuadradas es necesario utilizar los ocho vértices del cubo y las doce aristas del mismo, y adicionalmente hay que seleccionar o marcar cuál o cuáles serán las cúspides de las pirámides a construir. La introducción de puntos adicionales a los vértices hará que aumente el número de combinaciones de cinco puntos que pueden realizarse y consecuentemente podrá incrementarse el número de pirámides de la partición (no todas las

¹ Un conjunto de pirámides constituirán una partición de un cubo si la unión de las mismas conforman el cubo y la intersección entre ellas es disjunta o bien es una superficie plana o un segmento o un punto, es decir, figuras con volumen nulo.

² Figuras congruentes son aquellas que pueden hacerse coincidir mediante una composición de isometrías (traslación, giro y/o simetría).

combinaciones posibles de vértices son viables para obtener una partición del cubo). Así pues, analicemos diferentes alternativas:

- **No incluir ningún punto adicional** (ver figura 1, imagen 1). Esta elección obliga a que la cúspide de cada pirámide sea uno de los vértices del cubo y si además imponemos que todas las pirámides compartan la misma cúspide entonces obviamente obtendremos la partición de cardinal mínimo. Este planteamiento es viable pues basta seleccionar un vértice del cubo y desde él trazar segmentos a cada uno de los otros siete vértices, ello conduce a la partición en tres pirámides que ha sido reflejada en el primer caso descrito antes. La partición es única pues, se elija el vértice que se elija, todas las particiones son congruentes mediante giros.

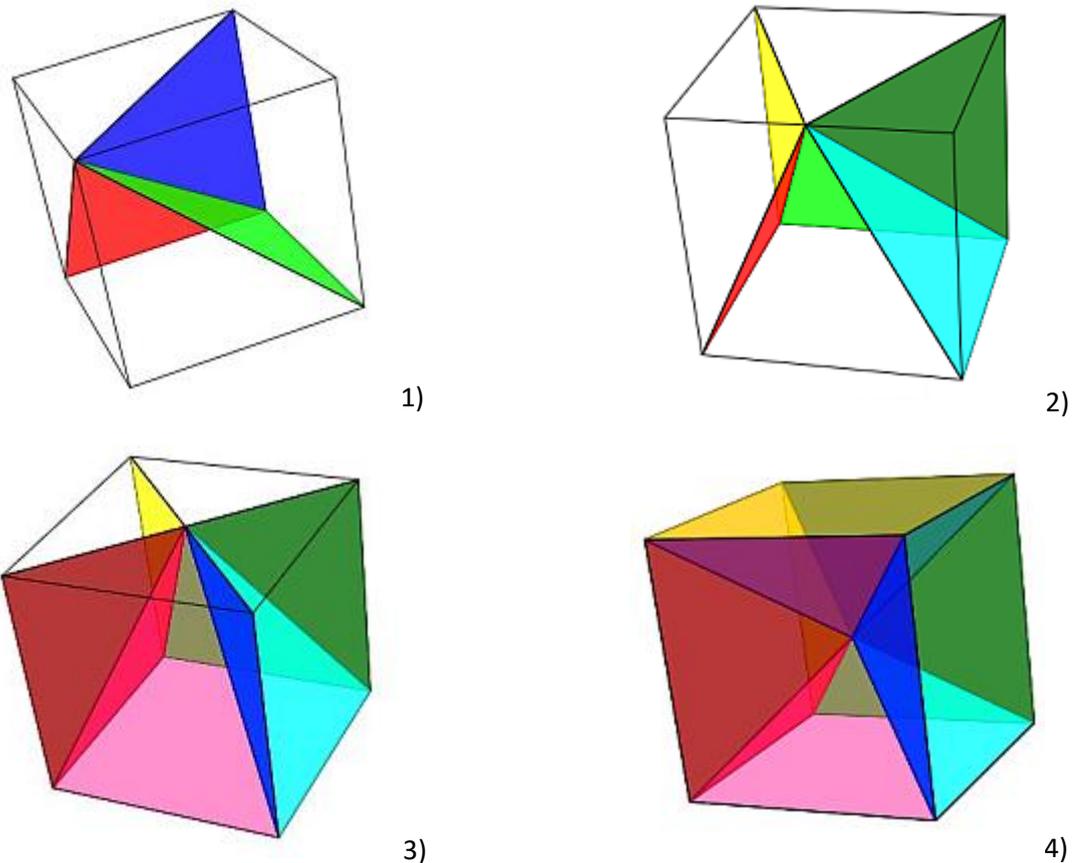


Figura 1. Partición de un cubo en tres (1), cuatro (2), cinco (3) y seis pirámides cuadradas (4).

- **Añadir un punto adicional.** Este punto sería la cúspide común de todas las pirámides a construir para que así el número de éstas sea lo menor posible y constructivamente se procede igual que en el caso anterior trazando segmentos desde la cúspide común a los vértices del cubo. Dicho punto adicional ha de pertenecer a él, bien a su interior o a la frontera y por tanto podemos distinguir las siguientes situaciones:
 - **Punto perteneciente a una arista** (ver figura 2). Aquí obtendremos una partición compuesta por **cuatro pirámides**. En general las cuatro son distintas, pero entre dos de ellas se da siempre una congruencia (una es simétrica de la otra). Y hay un caso particular en el que las pirámides son iguales dos a dos, que es el segundo caso expuesto antes, y que acontece cuando el punto adicional considerado es el punto medio de la arista. La arista a la que pertenezca el punto no introduce ninguna variación. Todas serán situaciones congruentes.

- **Punto perteneciente a una cara** (ver figura 3) Este caso conduce a la partición en **cinco pirámides** y de las infinitas posibilidades la situación con más regularidad es cuando el punto elegido es el punto donde se intersecan las diagonales de la cara. Es el tercer caso expuesto con anterioridad. La partición, salvo isometrías, es independiente de la cara seleccionada.

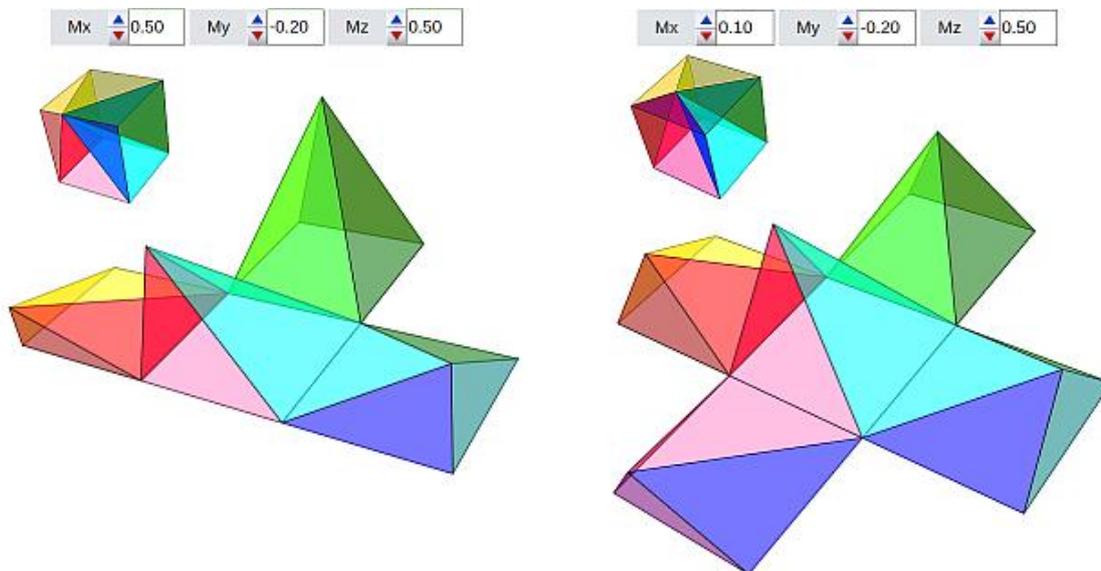


Figura 2. Punto ubicado en una arista, descomposición en cuatro pirámides.

Figura 3. Punto ubicado en una cara, descomposición en cinco pirámides.

- **Punto perteneciente al interior del cubo** (ver figura 4). Esta situación hace que sean **seis pirámides** las que forman la partición. De las infinitas particiones posibles, cuando el punto seleccionado es el punto de intersección de las diagonales del cubo se tiene que las seis pirámides son iguales y regulares (el cuarto caso mostrado antes).

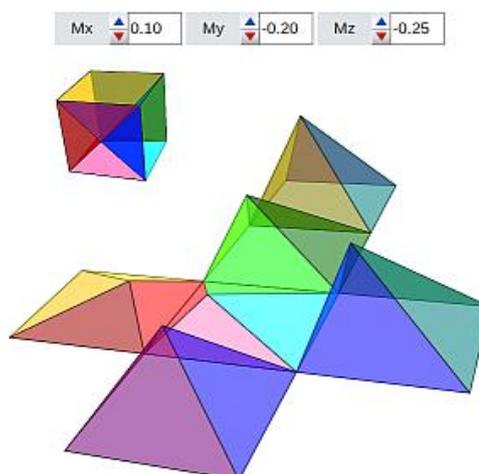


Figura 4. Punto ubicado en el interior del cubo, descomposición en seis pirámides.

Todas las situaciones anteriores pueden experimentarse en el recurso interactivo “Partición de un cubo en pirámides de base cuadrada, caso general”.

Hemos de señalar que aunque todas las descomposiciones del cubo cumplen la definición matemática de partición, su reproducción física tiene ciertos matices que hay que reseñar. Por un lado, si disponemos de las pirámides podremos componer el cubo, pero si partimos de un cubo no podrá descomponerse en esas pirámides si esta descomposición se realiza efectuando exclusivamente cortes mediante planos en la que cada uno de ellos fracciona una figura en otras dos independientes o separadas, es decir, lo equivalente a físicamente cortar y dividir en dos partes un objeto con un cuchillo.

PARTICIÓN DE UN CUBO EN PIRÁMIDES DE BASE TRIANGULAR

Podemos plantearnos, al menos, dos procedimientos para descomponer un cubo en pirámides triangulares. Uno, partiendo de las descomposiciones anteriores en pirámides de base cuadrada y otro abordando una construcción específica independiente.

Partición mediante descomposición de pirámides de base cuadrada

Si consideramos las diferentes particiones del cubo en pirámides cuadradas que hemos analizado en la sección anterior, entonces, automáticamente, son conocidas sendas particiones en pirámides triangulares sin más que considerar cada una de las dos diagonales del cuadrado que constituye la base en cada pirámide. Además las dos subpirámides obtenidas serán equivalentes³, pues la base inicial cuadrada ha quedado dividida en dos partes iguales y la altura es común a ambas y, por tanto, el volumen de cada una de esas pirámides triangulares es la mitad del volumen inicial. En este contexto tendríamos las siguientes situaciones:

- Considerando la partición mínima del cubo en tres pirámides cuadradas obtendríamos una subpartición en seis pirámides triangulares equivalentes. Dado que cada una de esas pirámides cuadradas pueden dividirse de dos formas diferentes, según cual sea la diagonal del cuadrado que se considere, tendríamos a su vez varias posibilidades:
 - Si la diagonal que se considera conduce a dividir las pirámides cuadradas por su plano de simetría, entonces las seis pirámides son congruentes ya que hay tres coincidentes entre sí mediante traslación y giro (lo que de manera simplificada se suele indicar como iguales) y las otras tres son simétricas de las primeras —denotaremos a una de las pirámides como tipo X_1 y a su simétrica como X_2 —. La partición sería $\{X_1, X_2, X_1, X_2, X_1, X_2\}$. Este caso es el que usualmente puede encontrarse en las fuentes literarias clásicas y en la Web, y que mostramos en la figura 5 y se reproduce de manera interactiva en este recurso⁴. Veremos que es una situación particular del estudio global, que abordaremos en la siguiente sección, correspondiente a lo que denominaremos particiones prismáticas, porque agrupando esas pirámides de tres en tres el cubo queda descompuesto en dos prismas triangulares.

Este proceso de división podría repetirse considerando la mediana de las nuevas bases y así obtendríamos una partición con doce pirámides equivalentes y dos familias de 6 pirámides congruentes entre sí; y con una nueva fracción por la mediana serían 24 pirámides equivalentes y 4 familias congruentes; y en general $3 \cdot 2^n$ pirámides equivalentes y 2^{n-1} familias de pirámides congruentes entre sí. Un entretenimiento teórico bonito, pero rápidamente no sería viable su traslación a un contexto manipulativo.

- Si se considera la diagonal perpendicular al plano de simetría, cada pirámide cuadrada queda dividida en dos pirámides equivalentes. La partición cuenta con dos tipos de pirámides (ver figura 6) que denotaremos como tipo Y (la que cuenta con un triedro trirrectángulo) y la otra

³ Dos pirámides son equivalentes, o en general dos figuras tridimensionales son equivalentes, si tienen igual volumen.

⁴ Algunas de las figuras incluidas en este documento tienen hiperenlaces a recursos interactivos que permiten experimentar sobre el contenido mostrado.

que nombraremos tipo Z. La partición es $\{Y, Z, Y, Z, Y, Z\}$. Esta partición, a diferencia del caso anterior, no es prismática.

- Si se combinan las dos posibilidades anteriores se obtienen siempre seis pirámides equivalentes, pero habría dos posibilidades: $\{X_1, X_2, X_1, X_2, Y, Z\}$ o $\{X_1, Y, Z, X_2, Y, Z\}$ que también son casos particulares de particiones prismáticas que analizaremos posteriormente.
- Análogamente, en el caso de hacer nada más que una subdivisión por cada pirámide cuadrada, la partición en cuatro pirámides cuadradas se convertiría en ocho triangulares, la de cinco en diez y la de seis en doce.

En la imagen de la figura 7, se observa una partición en doce pirámides triangulares y se dispone de un recurso interactivo en el que se aborda de manera general la partición del cubo en pirámides triangulares a partir de las particiones del mismo en pirámides cuadradas.

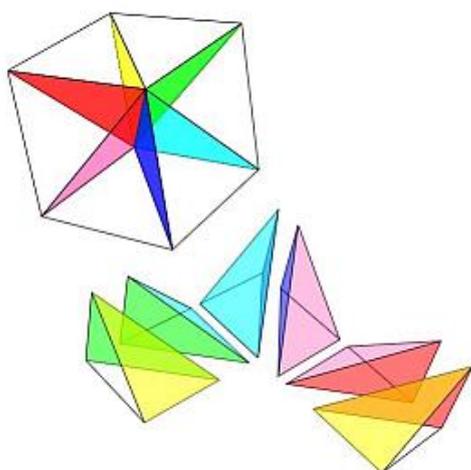


Figura 5. Partición del cubo en seis pirámides triangulares congruentes.

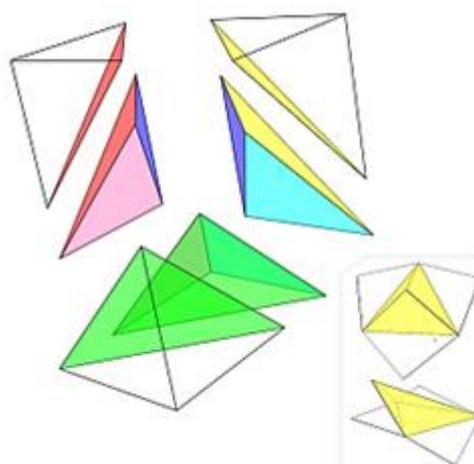


Figura. 6. Partición no prismática en seis pirámides triangulares equivalentes.

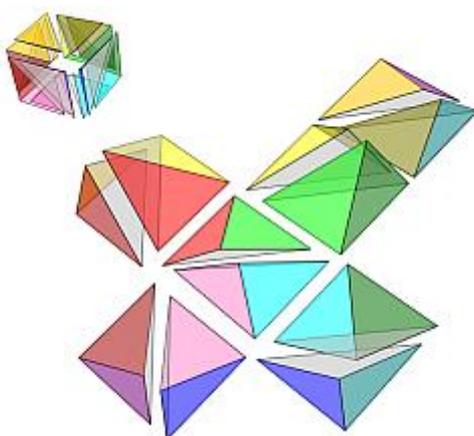


Figura. 7. Ejemplo de partición del cubo en doce pirámides triangulares equivalentes.

Todas las situaciones anteriores son, o pueden considerarse, interesantes y conducentes a puzles de cierta dificultad tanto en los casos en los que se busca la máxima congruencia o regularidad, como en la posición contraria. Pero ninguna de ellas conduce a la partición con cardinal mínimo, pues el planteamiento realizado viene condicionado por la partición previa en pirámides de base cuadrada. La partición mínima, como veremos en la próxima sección, se corresponde con cinco pirámides y salvo isometrías hay **una única posibilidad** para su construcción. Por ello, nuestro centro de interés se focalizará posteriormente en la citada **descomposición prismática del cubo en seis pirámides triangulares equivalentes**, que sin ser el caso único de cardinal mínimo sí que genera una variedad de situaciones que nos proponemos cuantificar y detallar.

Partición mediante construcción específica

En este apartado, partiendo de un cubo de arista la unidad y de vértices $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ —donde los cuatro primeros vértices constituyen la base superior y los otros cuatro la inferior—, nos planteamos realizar una partición del mismo en pirámides triangulares buscando por un lado que la descomposición tenga cardinal mínimo y, por otro, alternativas en las que sin ser de cardinal mínimo se encuentren congruencias o equivalencias.

Dado que las pirámides triangulares son poliedros convexos con cuatro caras triangulares (es decir tetraedros) y cuatro vértices, en la planificación de esta partición han de tenerse en consideración las siguientes observaciones:

- Las caras del cubo han de dividirse en triángulos y, por tanto, se parte de un mínimo de 12 triángulos (2 por cada cara del cubo) y 18 segmentos (las doce aristas del cubo, más seis diagonales necesarias para partir cada una de las seis caras del cubo), que junto a los ocho vértices constituyen los elementos primarios a partir de los cuales se han de construir las pirámides de la partición (ver figura 8).

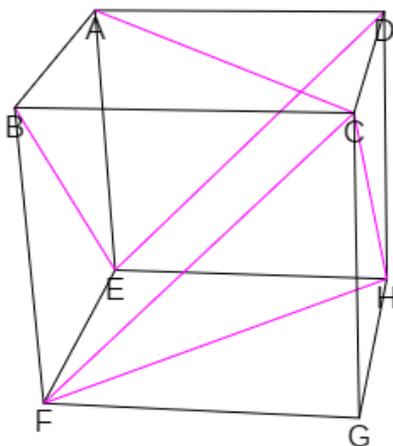


Figura 8. Un ejemplo de los elementos primarios para abordar la partición: 8 vértices, 12 aristas y 6 diagonales de las caras. La elección de una u otra diagonal en cada cara genera diferentes situaciones.

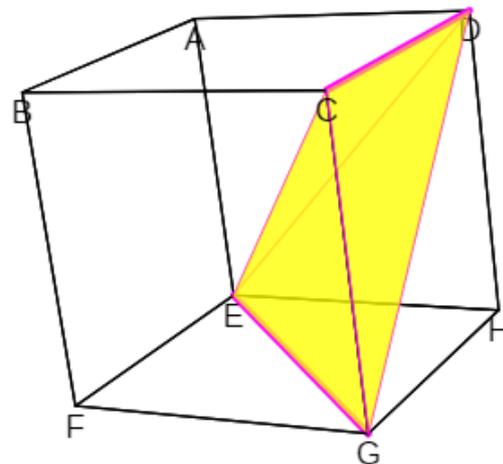


Figura 9. Pirámide determinada por dos segmentos con distinta dirección y no coplanarios.

- El menor número de pirámides se obtiene cuando se consideran exclusivamente los elementos primarios citados. La introducción de cualquier vértice o segmento adicional generará un mayor número de combinaciones posibles, un mayor número de pirámides.

- Dos pirámides de la partición pueden compartir como máximo tres vértices, una cara. O lo que es equivalente, han de tener tres caras diferentes.
- Una pirámide triangular de la partición queda determinada sin más que elegir dos segmentos con distinta dirección y que no sean coplanarios (ver figura 9).
- Cuando todas las diagonales correspondientes a las caras opuestas tienen distinta dirección las particiones en pirámides triangulares tienen más de seis pirámides, salvo:
 - Una partición con cinco elementos, que es la de **cardinal mínimo**, formada por cuatro pirámides trirrectángulas y un tetraedro regular (ver figura 10).
 - Una con seis elementos, que es la indicada en la figura 6, compuesta por las pirámides {Y, Z, Y, Z, Y, Z}.

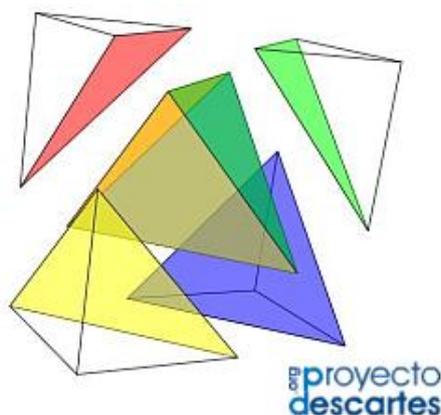


Figura 10. Descomposición de un cubo en cinco pirámides triangulares.

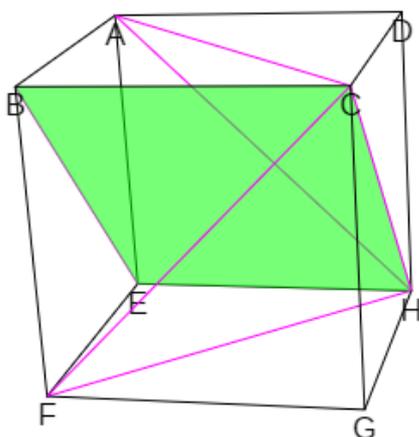


Figura 11. Dos diagonales de caras opuestas que tienen la misma dirección

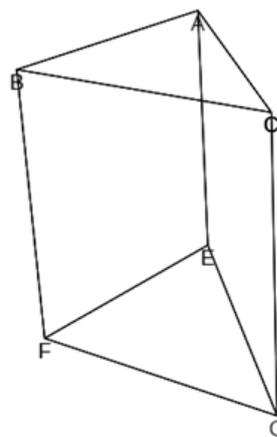


Figura 12. Prisma triangular

- Cuando al menos un par de las diagonales correspondientes a caras opuestas tienen la misma dirección, entonces ese par junto a las dos aristas que son perpendiculares a ellas forman un rectángulo y la partición en pirámides triangulares es posible solamente si se introduce al menos un segmento que bien subdivida ese rectángulo en dos triángulos o bien que lo corte

(ver figura 11). Al introducirse en la partición un nuevo elemento primario no puede obtenerse la partición de cardinal mínimo. Ese segmento adicional puede ser:

- Una diagonal del cubo. Aquí la obtención de una partición obliga a incluir más elementos primarios, puntos y segmentos, y consecuentemente se incrementa el número de pirámides obtenidas.
- La diagonal de ese rectángulo. En este caso el cubo queda dividido en dos prismas triangulares rectos con bases que son triángulos rectángulos isósceles —particiones prismáticas—, situación que detallaremos a continuación y que como veremos conduce a un mínimo de seis pirámides triangulares; y en el caso de ser exactamente seis se cumple que son equivalentes, es decir, que tienen igual volumen.

DESCOMPOSICIÓN DE UN PRISMA TRIANGULAR EN PIRÁMIDES TRIANGULARES

Con la partición en dos prismas triangulares, indicada en la sección anterior, el problema de partir un cubo queda reducido a la descomposición de un prisma triangular recto, cuyas bases son dos triángulos rectángulos isósceles de catetos 1 y de altura también 1, en pirámides triangulares. Situación que pasamos a analizar en este apartado.

Denotemos al conjunto de vértices del prisma anterior $\{A, B, C, E, F, G\}$ donde la base superior se corresponde con los tres primeros vértices y la inferior con los tres últimos (ver Fig. 12).

De manera análoga a lo indicado en la sección anterior tenemos:

- El menor número de pirámides se obtendrá cuando se consideren solo los seis vértices del prisma como posibles vértices de las pirámides de la partición.
- Los elementos primarios mínimos para abordar la partición son ocho triángulos (las dos bases del prisma y seis más resultantes de dividir las tres caras laterales en triángulos) y 12 segmentos (las nueve aristas y las tres diagonales de las caras laterales). Y dado que dos pirámides de la partición han de tener como mínimo tres caras diferentes, entonces también son, como mínimo, tres las pirámides que formarán la partición (ocho caras entre tres nos da un valor mayor que dos).

Basándonos en que una pirámide triangular queda determinada sin más que elegir dos segmentos con distinta dirección no coplanarios, una forma de abordar la partición del prisma $\{A, B, C, E, F, G\}$ en tres pirámides triangulares se logra considerando dos aristas no coplanarias, una de la base ABC y otra de la EFG (ver Fig. 13). Los cuatro vértices de esas dos aristas determinan una pirámide triangular que parte al prisma en tres bloques (ver Fig. 14) quedando fijadas así, junto a ésta, las otras dos pirámides buscadas.

Hay solamente seis posibilidades:

- BC con EF que conduce a la pirámide BCEF y determina a ABCE y CEFG
- AC con EF que conduce a ACEF y determina a ABCF y CEFG
- AB con EG que conduce a ABEG y determina a ABCG y BEFG
- AB con FG que conduce a ABFG y determina a ABCG y AEFG
- AC con FG que conduce a ACFG y determina a ABCF y AEFG
- BC con EG que conduce a BCEG y determina a ABCE y BEFG

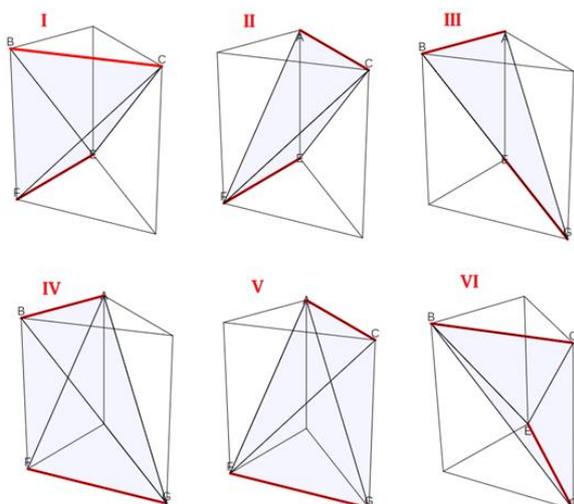


Figura 13. Aristas que determinan seis particiones diferentes

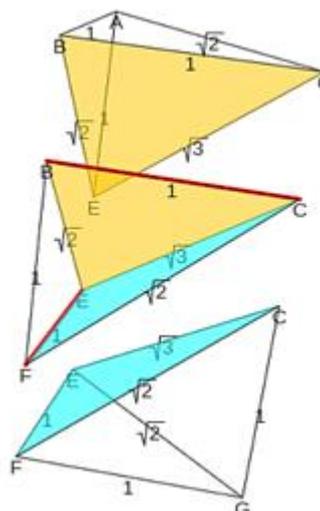


Figura 14. Partición del prisma a partir de las aristas BC y EF en tres pirámides ABCE, BCEF y CEFG

Distinguiendo los vértices por su nombre, en esas seis particiones aparecen doce pirámides diferentes, lo cual obviamente se corresponde con las combinaciones que se pueden obtener a partir de los seis vértices $\{A, B, C, E, F, G\}$ agrupándolos de cuatro en cuatro, que son los vértices de una pirámide, y quitando aquellas agrupaciones en las que los cuatro vértices son coplanarios. Así pues, son $C_{6,4} = 15$ combinaciones diferentes $\{ABCE, ABCF, ~~ABEF~~, ABEG, ABFG, ACEF, ~~ACEG~~, ACFG, AEFG, BCEF, BCEG, ~~BCFG~~, BEFG, CEFG\}$ y se excluyen los tres casos que hemos tachado por ser cuatro vértices coplanarios. Éste podría ser también otro procedimiento alternativo al anterior para analizar las diferentes particiones del prisma.

En esas doce pirámides intervienen 15 aristas posibles, pues son combinaciones de seis vértices tomados de dos en dos, $C_{6,2} = 15$. Son las reflejadas en la tabla 1, donde se indica su medida respectiva.

AB = 1				
AC = $\sqrt{2}$	BC = 1			
AE = 1	BE = $\sqrt{2}$	CE = $\sqrt{3}$		
AF = $\sqrt{2}$	BF = 1	CF = $\sqrt{2}$	EF = 1	
AG = $\sqrt{3}$	BG = $\sqrt{2}$	CG = 1	EG = $\sqrt{2}$	FG = 1

Tabla 1. Aristas de las pirámides y longitud de las mismas

En la tabla 2 podemos agrupar toda la información anterior y comparar las pirámides de esas particiones buscando detectar cuales son iguales o del mismo tipo. Fijándonos en la medida de las aristas que las componen se observa que hay tres tipos de pirámides que hemos etiquetado como⁵ X, Y, Z y, como detallaremos a continuación, en el tipo X se distinguen dos modalidades que

⁵ En secciones anteriores encontramos e introducimos estos tipos de pirámides X₁, X₂, Y y Z.

etiquetamos como 1 y 2. También se refleja si la partición está constituida por pirámides congruentes entre sí (y por tanto también equivalentes) o si son solo equivalentes.

Partición	Pirámide	Aristas	Tipo	Modalidad	Congruencia y Equivalencia
I	ABCE	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	2	Congruencia
	BCEF	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	1	
	CEFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	2	
II	ABCF	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$	Y		Equivalencia
	ACEF	$1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	Z		
	CEFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	2	
III	ABCG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	1	Equivalencia
	ABEG	$1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	Z		
	BEFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$	Y		
IV	ABCG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	1	Congruencia
	ABFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	2	
	AEFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	1	
V	ABCF	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$	Y		Equivalencia
	ACFG	$1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	Z		
	AEFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	1	
VI	ABCE	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	2	Equivalencia
	BCEG	$1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	Z		
	BEFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$	Y		

Tabla 2. Desglose de particiones, pirámides que lo conforman, longitud de las aristas que lo componen, tipo de pirámide y modalidad, y congruencia y/o equivalencia

Cada partición del prisma se distinguirá con el número romano que le hemos asignado o sin más que nombrar los tipos de pirámide que la forman para lo que convendremos hacerlo de arriba hacia abajo de acuerdo a la ubicación inicial de la pirámide en la que la base superior tiene de vértices ABC y la inferior EFG. Así la partición II viene dada por {Y, Z, X₂}.

Procedamos a analizar cada uno de los tipos de pirámides que aparecen en dichas particiones.

Pirámide tipo Y

Atendiendo únicamente a la forma, es decir, considerando que todas las caras son de igual color y no etiquetando los vértices, solo es posible una pirámide triangular cuyas aristas midan $1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$ (ver figura 15). Su desarrollo plano está compuesto por un triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}$ y tres triángulos rectángulos isósceles de catetos 1 y de hipotenusa $\sqrt{2}$. El desarrollo, como se ha representado en la figura, tiene simetría axial con eje de simetría cualquiera de las alturas del triángulo equilátero y, por tanto, independientemente de la orientación con la que se realiza el plegado (hacia dentro o hacia fuera) se obtiene la misma pirámide. El volumen de esta pirámide es $\frac{1}{6}$ de la unidad cúbica.

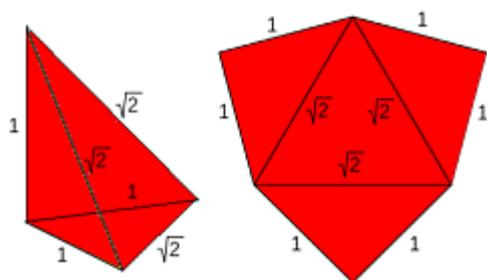


Figura 15. Pirámide triangular tipo Y y desarrollo plano de la misma

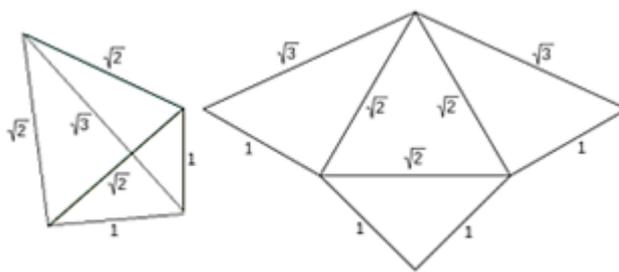


Figura 16. Pirámide triangular tipo Z y desarrollo plano de la misma

Pirámide tipo Z

De manera análoga al caso anterior, si atendemos a la forma, solo es posible una pirámide triangular cuyas aristas midan $1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ (ver Fig. 16). Su desarrollo plano está compuesto por un triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}$, un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1 e hipotenusa $\sqrt{2}$ y dos triángulos rectángulos de catetos 1 y $\sqrt{2}$ e hipotenusa $\sqrt{3}$. Este desarrollo, como está representado en la figura, tiene simetría axial con eje de simetría la altura del triángulo equilátero que es altura a la vez del triángulo rectángulo isósceles. Así pues, independientemente de la orientación con la que se realiza el plegado (hacia dentro o hacia fuera) se obtiene la misma pirámide. El volumen de esta pirámide es también $\frac{1}{6}$, por tanto, equivalente a la pirámide tipo Y.

Pirámide tipo X

Con las aristas de medidas $1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ se pueden construir dos pirámides triangulares siendo una simétrica de la otra (ver Fig. 17). Los desarrollos planos son simétricos entre sí. Eligiendo uno de ellos, si se pliega hacia dentro se obtiene una de las pirámides y al plegarlo hacia fuera se obtiene la otra. Ambas tienen de volumen $\frac{1}{6}$, es decir, son equivalentes entre sí y a las pirámides Y y Z.

También en la parte inferior de la figura 17 puede observarse cómo ambas pirámides son simétricas, una respecto a la otra, en el sentido de que si se hacen coincidir dos caras que sean iguales el plano que separa a ambas pirámides es un plano de simetría de las mismas. X₁ y X₂ son, por tanto, congruentes entre sí.

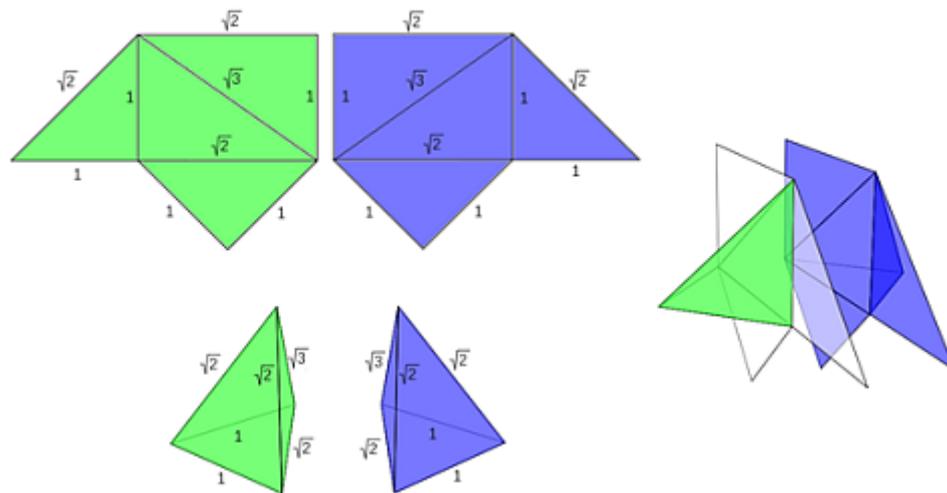


Figura 17. Pirámides triangulares tipo X — X_1 en color azul y X_2 en color verde—, desarrollo plano de las mismas y simetría de una respecto a la otra

Particiones del prisma triangular

Las seis particiones del prisma reflejadas en la tabla 2 están representadas en las imágenes de la figura 18, donde se han mantenido los colores usados anteriormente en cada tipo de pirámide para así poder distinguir a simple vista cuál es la pirámide utilizada: rojo para tipo Y, blanco para tipo Z, azul para X_1 y verde para X_2 .

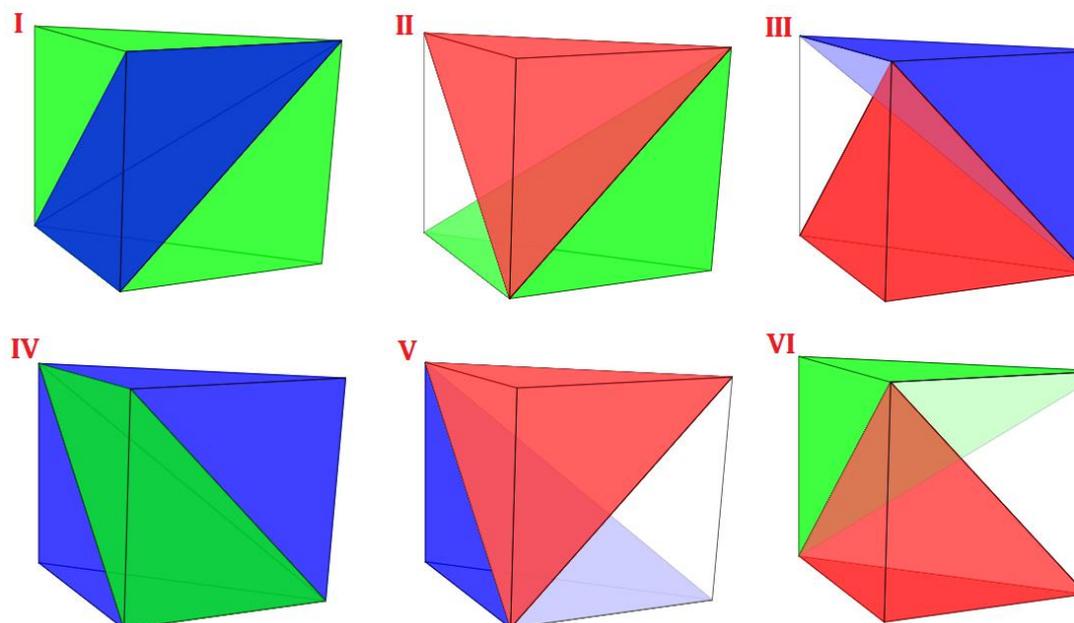


Figura 18. Particiones del prisma triangular

Sin embargo, de esas seis particiones hay solamente dos que no son congruentes entre sí, pues tenemos que se cumplen las siguientes relaciones:

- Las particiones II, III, V y VI son congruentes entre sí:
 - La partición tipo V —compuesta por las pirámides Y, Z, X_1 — es congruente con la III —compuesta por las pirámides X_1 , Z, Y—, basta realizar un giro de 180° .

- La partición VI —compuesta por las pirámides X_2, Z, Y — es congruente con la II —compuesta por las pirámides Y, Z, X_2 — mediante un giro.
- La partición tipo V —compuesta por las pirámides Y, Z, X_1 — es congruente con la II —compuesta por las pirámides Y, Z, X_2 — mediante una simetría (según lo indicado con anterioridad Y es simétrica de sí misma, Z también, y X_1 es simétrica de X_2).
- Las particiones I y IV son congruentes entre sí:
 - La partición IV —compuesta por las pirámides X_1, X_2, X_1 — es simétrica de la I —compuesta por las pirámides X_2, X_1, X_2 —.

Así pues, salvo isometrías, solo hay dos particiones diferentes del prisma en pirámides triangulares. Basta considerar, por ejemplo, la partición I y la II. En ellas, a su vez, en la partición I las pirámides son congruentes entre sí (y consecuentemente equivalentes) y en la II son únicamente equivalentes. No obstante, dado que nuestro objetivo real es la descomposición prismática del cubo mediante la unión de dos prismas, entonces la orientación de uno de ellos respecto al otro es significativa y consecuentemente tendremos que considerar como diferentes las seis particiones antes indicadas que son el fruto de hacer una distinción entre la cara inferior y la superior del prisma, o bien podemos hacer la lectura de que partiendo de las dos únicas particiones I y II del prisma al aplicarles isometrías tendríamos que son seis las particiones distinguibles a la hora de construir a partir de ellas el cubo.

PARTICIÓN PRISMÁTICA DE UN CUBO EN PIRÁMIDES TRIANGULARES EQUIVALENTES

Para construir una partición prismática del cubo basta considerar una de las particiones del prisma triangular obtenidas en el apartado anterior, aplicarle isometrías para transformarlo en otro prisma y juntar los dos juntos para conformar la partición buscada. En la tabla 3 se reflejan las posibles transformaciones isométricas a realizar para construir esa partición del cubo.

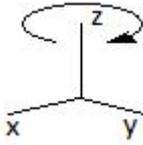
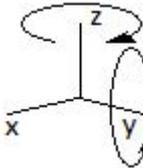
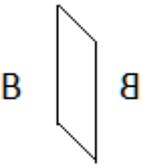
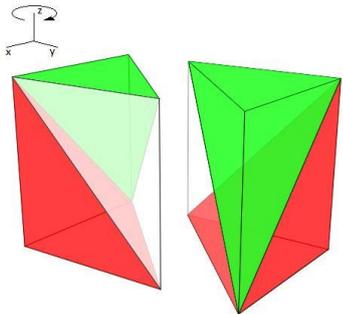
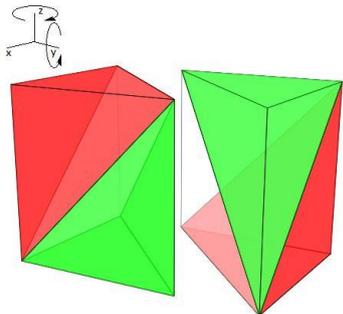
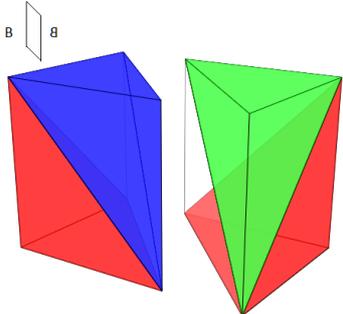
		
		
Giro alrededor eje Oz	Giros alrededor eje Oz y eje Oy	Simetría respecto a un plano

Tabla 3. Isometrías para obtener un cubo a partir de un prisma triangular

En esta construcción podemos realizar dos planteamientos. Una primera opción en la que consideramos como distinguibles las seis particiones obtenidas para el prisma y una segunda en la que la construcción la abordamos considerando solo las dos particiones no congruentes del prisma.

La primera opción tiene como ventaja el poder ver todas las particiones posibles, agrupadas por congruencia, y la segunda el implicar un análisis más breve.

Opción A

Consideramos como distinguibles las seis particiones del prisma y procedemos a construir el cubo a partir de ellas. Para ello, en la tabla 4 hemos indicado cómo se transforman esas seis particiones cuando les aplicamos las isometrías indicadas en la tabla 3.

Las seis particiones se autotransforman entre sí. Consecuentemente, las diferentes particiones del cubo en seis pirámides equivalentes se obtienen sin más que hallar las variaciones con repetición de 6 elementos (las particiones del prisma I, II, III, IV, V y VI) tomados de dos en dos, es decir, un total de $VR_{6,2} = 6^2 = 36$ posibilidades. Pero entre ellas hay congruencias que hemos de detectar.

Partición	Giro z	Giro z, y	Simetría
I = X ₂ , X ₁ , X ₂	X ₂ , X ₁ , X ₂ = I	X ₂ , X ₁ , X ₂ = I	X ₁ , X ₂ , X ₁ = IV
II = Y, Z, X ₂	Y, Z, X ₂ = II	X ₂ , Z, Y = VI	Y, Z, X ₁ = V
III = X ₁ , Z, Y	X ₁ , Z, Y = III	Y, Z, X ₁ = V	X ₂ , Z, Y = VI
IV = X ₁ , X ₂ , X ₁	X ₁ , X ₂ , X ₁ = IV	X ₁ , X ₂ , X ₁ = IV	X ₂ , X ₁ , X ₂ = I
V = Y, Z, X ₁	Y, Z, X ₁ = V	X ₁ , Z, Y = III	Y, Z, X ₂ = II
VI = X ₂ , Z, Y	X ₂ , Z, Y = VI	Y, Z, X ₂ = II	X ₁ , Z, Y = III

Tabla 4. Aplicación de isometrías a las seis particiones de un prisma

De partida, al comparar esas 36 posibilidades, sin más que realizar un giro de 180° alrededor de la vertical (eje Oz) se observan que quedan reducidas a 21 las posibles particiones (combinaciones con repetición $CR_{6,2}$) porque, por ejemplo, la partición I-II es congruente con la II-I. Éstas veintiuna son: {I-I, I-II, I-III, I-IV, I-V, I-VI, II-II, II-III, II-IV, II-V, II-VI, III-III, III-IV, III-V, III-VI, IV-IV, IV-V, IV-VI, V-V, V-VI, VI-VI}. Y en particular, entre ellas, hay tres casos en los que todas las pirámides son congruentes entre sí: {I-I, I-IV, IV-IV}. Puede observarse en la figura 19.

La aplicación de las isometrías, indicadas en la tabla 4, a cada una de las 36 particiones anteriores conduce a las particiones indicadas en la tabla 5 y en la tabla 6 reflejamos las congruencias existentes que reducen a ocho las particiones diferentes del cubo en pirámides equivalentes: {I-I, I-II, I-III, I-IV, II-II, II-III, II-V, II-VI}. Entre ellas hay dos: {I-I, I-IV} que, en particular, las forman pirámides congruentes entre sí.

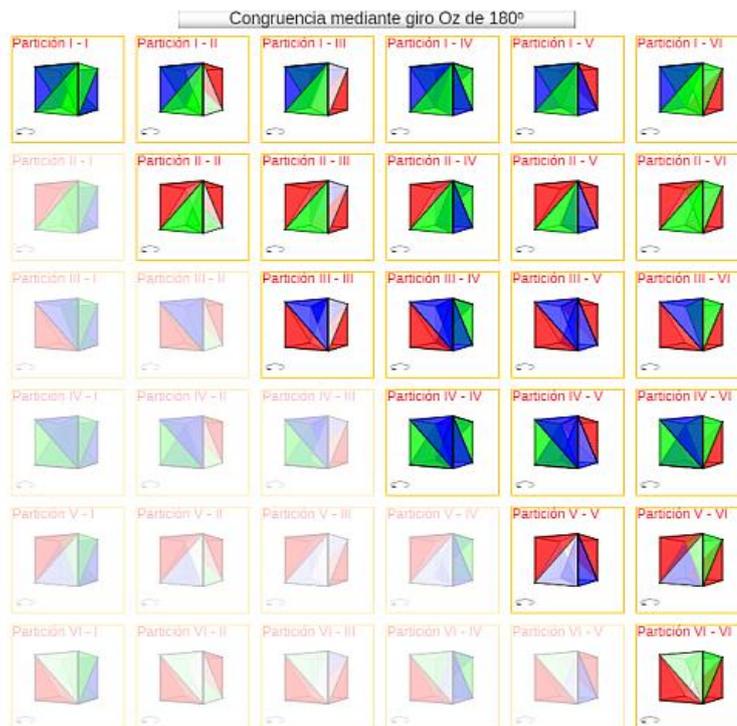


Figura 19. Congruencias mediante giro Oz de 180°

Simetría							Giro alrededor de Oy						
	I	II	III	IV	V	VI		I	II	III	IV	V	VI
I	IV-IV	V-IV	VI-IV	I-IV	II-IV	III-IV	I	I-I	I-VI	I-V	I-IV	I-III	I-II
II	IV-V	V-V	VI-V	I-V	II-V	III-V	II	VI-I	VI-VI	VI-V	VI-IV	VI-III	VI-II
III	IV-VI	V-VI	VI-VI	I-VI	II-VI	III-VI	III	V-I	V-VI	V-V	V-IV	V-III	V-II
IV	IV-I	V-I	VI-I	I-I	II-I	III-I	V	IV-I	IV-VI	IV-V	IV-IV	IV-III	IV-II
V	IV-II	V-II	VI-II	I-II	II-II	III-II	V	III-I	III-VI	III-V	III-IV	III-III	III-II
VI	IV-III	V-III	VI-III	I-III	II-III	III-III	VI	II-I	II-VI	II-V	II-IV	II-III	II-II

Tabla 5. Aplicación de isometrías a las treinta y seis particiones prismáticas del cubo

Partición origen	1ª isometría	partición obtenida	2ª isometría	partición obtenida	Congruente con
VI-VI 	Giro en y	II-II 			II-II

V-VI 	Simetría	III-II 	Giro en z	II-III 	II-III
V-V 	Simetría	II-II 			II-II
IV-VI 	Simetría	III-I 	Giro en z	I-III 	I-III
IV-V 	Simetría	II-I 	Giro en z	I-II 	I-II
IV-IV 	Simetría	I-I 			I-I
III-VI 	Giro en y	V-II 	Giro en z	II-V 	II-V
III-V 	Simetría	II-VI 			II-VI
III-IV 	Simetría	I-VI 	giro en y	I-II 	I-II
III-III 	giro en y	V-V 	simetría	II-II 	II-II
II-VI 					II-VI

II-V 					II-V
II-IV 	simetría	I-V 	giro en y	I-II 	I-II
II-III 					II-III
II-II 					II-II
I-VI 	giro en y	I-II 			I-II
I-V 	giro en y	I-III 			I-III
I-IV 					I-IV
I-III 					I-III
I-II 					I-II
I-I 					I-I

Tabla 6. Detección de congruencias entre las diferentes particiones del cubo

Opción B

En este caso consideramos exclusivamente las dos particiones diferentes del prisma (I y II), junto a sus congruencias respectivas (IV y III, V, VI) y abordemos las combinaciones de las mismas para formar el cubo. Esto nos lleva al detalle reflejado en la tabla 7:

I-I			seis pirámides congruentes
I-II			seis pirámides equivalentes
I-III			seis pirámides equivalentes
I-IV			seis pirámides congruentes
I-V	congruente con I-III		
I-VI	congruente I-II		
II-II			seis pirámides equivalentes
II-III			seis pirámides equivalentes
II-IV	congruente I-III		
II-V			seis pirámides equivalentes
II-VI			seis pirámides equivalentes

Tabla 7. Las diferentes particiones del cubo, salvo isometrías

CONCLUSIONES

Del análisis anterior se concluye que, salvo isometrías, **hay solo ocho formas diferentes de descomponer prismáticamente el cubo en seis pirámides equivalentes** y entre ellas **hay dos en las que todas las pirámides son también congruentes** entre sí (ver recurso interactivo).

SÍNTESIS

En este artículo se han realizado las siguientes aportaciones:

1. Partiendo de las clásicas y conocidas descomposiciones del cubo en tres, cuatro, cinco y seis pirámides de base cuadrada, aquí se ha planteado una visión global que muestra que los casos anteriores no son más que cuatro casos particulares de una infinidad de particiones, todas construidas en base a considerar un punto que pasa a configurarse como el vértice común a todas las pirámides que conforman cada partición. El cardinal mínimo de la partición se alcanza en tres pirámides.
2. En base a la partición genérica anterior, se ha descompuesto de manera general el cubo en seis, ocho, diez y doce pirámides triangulares mediante la subdivisión de cada pirámide cuadrada en dos triangulares. En el caso de seis pirámides se demuestra que dichas pirámides son siempre equivalentes, de igual volumen.
3. Constructivamente se prueba que la partición del cubo en pirámides triangulares alcanza su cardinal mínimo en una única y clásica partición en cinco pirámides triangulares compuesta por un tetraedro regular y cuatro pirámides trirrectangulares, pero que no tienen igual volumen.
4. Centrándose en las particiones del cubo en pirámides triangulares que sean equivalentes (igual volumen) se ha obtenido que en este caso el cardinal mínimo es de seis y pueden englobarse en particiones no prismáticas y particiones prismáticas (aquellas en las que el cubo queda a su vez dividido en dos prismas triangulares).
5. Se ha abordado y analizado la partición de un prisma triangular en tres pirámides equivalentes, como problema conducente a la partición prismática del cubo, y se ha concluido que salvo isometrías hay únicamente dos posibilidades. En particular en una de ellas las tres pirámides son además congruentes (coincidentes mediante isometrías).
6. A partir de la descomposición del prisma se han construido las posibles particiones prismáticas del cubo en pirámides triangulares equivalentes obteniéndose ocho posibilidades y, entre ellas, dos casos en las que las seis pirámides además son congruentes.

Así pues, un problema clásico —la partición de un cubo en pirámides cuadradas y triangulares—, que ha sido siempre expuesto de manera parcial a través de ejemplos particulares que no detallan la totalidad de las posibilidades, aquí se ha analizado constructivamente desde una perspectiva metódica, global que logra hacer un completo y detallado recubrimiento descriptivo de su solución.

Referencias

- Alexandrov, A.D. (2005). *Convex Polyhedra*. Springer Monographs in Mathematics.
- Coffin, S. T. (1990). *The Puzzling World of Polyhedral Dissections*. New York: Oxford University Press.
- Red Educativa Digital Descartes (2013). Recursos Educativos interactivos de RED Descartes <http://proyectodescartes.org/descartescms/descargas> .
- Weisstein, Enric W. "Cube". From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource <http://mathworld.wolfram.com/Cube.html>
- Weisstein, Enric W. "Pyramid". From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource <http://mathworld.wolfram.com/Pyramid.html>

José R. Galo
Red Educativa Digital Descartes, España
galosanchezjr@gmail.com
reddescartes.org proyectodescartes.org



ISSN: 2603-9982

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2018). Usos del software de geometría dinámica en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 1(2), 21-35.

USOS DEL SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Martha Iglesias, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay, Venezuela

José Ortiz, Universidad de Carabobo, Campus La Morita, Venezuela

Resumen

El objetivo de la investigación es describir los usos que le dan los futuros docentes de matemática al software de geometría dinámica. Es una investigación de campo en el paradigma cualitativo interpretativo, realizada mediante un estudio de caso, el cual estuvo focalizado en el análisis de las producciones de un grupo de trece futuros profesores de matemática, quienes participaron en un curso de resolución de problemas geométricos (16 semanas), como parte de su plan de formación docente en una universidad pública venezolana. Los instrumentos utilizados para la recolección de la información fueron: Archivos Cabri, informes de trabajo y grabaciones de audio y vídeo. Respecto al software, se encontró que los futuros profesores le dieron un uso técnico: empleo de las herramientas para seguir procedimientos, verificar conjeturas y mejorar apariencias; y, un uso heurístico: construcción, exploración, formulación de conjeturas y validación.

Palabras clave: Formación inicial de profesores, software de geometría dinámica, enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Uses of dynamic geometry software in preservice mathematics teachers

Abstract

The objective of the research is to describe the uses that future teachers of mathematics give to the software of dynamic geometry. It is a field research in the qualitative interpretive paradigm, carried out through a case study, which was focused on the analysis of the productions of a group of thirteen future teachers of mathematics, who participated in a course of solving geometric problems (during 16 weeks), as part of their teacher training plan at a Venezuelan public university. The instruments used to collect the information were: Cabri files, work reports and audio and video recordings. Regarding the software, it was found that the future teachers gave it a technical use: use of the tools to follow procedures, verify conjectures and improve appearances; and, a heuristic use: construction, exploration, formulation of conjectures and validation

Keywords: Pre service mathematics teacher, dynamic geometry software, teaching and learning geometry.

INTRODUCCIÓN

Desde mediados de la década de los años ochenta, se ha venido incorporando el uso de los llamados software de Geometría Dinámica (SGD) en las clases de Matemática. Entre los más destacados, se encuentran el Cabri - Géomètre (Francia), el Geometer's Sketchpad (Estados Unidos) y GeoGebra (Austria). Este tipo de software ha favorecido la elaboración de construcciones geométricas y su exploración mediante la técnica de arrastre de un objeto base, permitiendo el reconocimiento de propiedades invariantes cuando un objeto es sometido a una transformación. Esto favorece el descubrimiento de relaciones entre los objetos (iniciales, auxiliares y finales) que conforman una construcción geométrica.

En relación al impacto del uso de los SGD sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, se han realizado diversos comentarios; para Amaral y Cabrita (2017), los SGD han contribuido al desarrollo del sentido geométrico y han jugado un papel fundamental en el estudio de las isometrías en el plano, ya que, le brindan a los estudiantes la posibilidad de trabajar con múltiples representaciones de un objeto geométrico, facilitando así su tránsito por niveles más elevados de generalización y abstracción. En este orden de ideas, Prieto González (2016) señala que:

Desde una perspectiva del aprendizaje, la integración del GeoGebra a las clases de Matemática ha favorecido el desarrollo de las capacidades de los estudiantes para la experimentación, visualización y reconocimiento de invariantes matemáticas, como consecuencia de la interacción de esos sujetos con los objetos representados en su vista gráfica. (p.11)

Además, los SGD han facilitado la vinculación de la Matemática con otras disciplinas, ya que, por ejemplo, han facilitado el estudio de mecanismos articulados, estableciendo relaciones entre Geometría y Cinemática tal como lo describen Manzano Mozo, Gómez García y Mozo Fernández (2017). Al respecto, Gutiérrez, Prieto y Ortiz (2017) destacan el potencial de los SGD para “desarrollar las capacidades de visualización y experimentación de los estudiantes, a través de la manipulación de las variables y parámetros asociados con los fenómenos de la realidad que son representados por medio de modelos computacionales” (p. 39); de esta manera, se resalta las potencialidades técnicas de los SGD para elaborar simuladores.

Otro asunto clave relacionado con el uso de los software de geometría dinámica(SGD) en las clases de Matemática, es la resolución de problemas que conlleven a la formulación y validación de conjeturas; en este orden de ideas, Cruz y Mantica (2017) expresan que, cuando se trabaje con un SGD, es importante que el profesor proponga problemas que no aseguren la veracidad de las conjeturas, lo deseable es que sean los estudiantes, mediante la elaboración y exploración de las construcciones geométricas y valiéndose de las herramientas disponibles en el software, quienes reconozcan propiedades invariantes, formulen conjeturas e intenten validarlas. No obstante, pareciera existir cierto consenso en cuanto a que la simple incorporación de un SGD no garantiza el aprendizaje significativo de la Geometría, ni el paso inmediato de la conjetura a la demostración (González López, 2001; Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002) y, por ende, es fundamental el papel que juega el docente en el diseño de tareas que favorezcan el acercamiento de los estudiantes a dos aspectos formales del quehacer matemático: las definiciones y la demostración.

Por ello, en el marco de una línea de investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría, se ha venido vinculando la investigación sobre la formación inicial de los docentes en Matemática con dos de los asuntos considerados clave de la Educación Matemática: la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría y el uso del software de Geometría Dinámica en las clases de Matemática (Iglesias y Ortiz, 2015).

La relevancia de estos dos asuntos lo demuestran algunas de las actividades realizadas a finales del siglo XX y las primeras dos décadas del siglo XXI: (a) Estudio ICMI dirigido a estudiar las perspectivas sobre la enseñanza de la Geometría para el siglo XXI, a partir de las contribuciones de

destacados educadores matemáticos, relacionadas con temas como los siguientes: Razonamiento en Geometría, Tecnología Computarizada y Enseñanza de la Geometría y Calidad del Personal Docente y de la Educación de los Profesores (Mammana y Villani, 1998); (b) organización y realización de eventos sobre el uso de los software de Geometría Dinámica en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, como el Iberocabri y el Congreso Latinoamericano de GeoGebra; y (c) la incorporación de estos temas como asuntos a ser discutidos en las últimas ediciones del ICME, el cual es el evento internacional de mayor importancia para la comunidad mundial de educadores matemáticos.

En este sentido, ante la necesidad de comprender los aspectos cognitivos y didácticos relacionados con los futuros docentes de Matemática cuando abordan la resolución de problemas geométricos usando un SGD, y, en particular, los que están vinculados con el proceso de demostración matemática en ambientes de aprendizaje tecnologizados, en este trabajo se tiene como objetivo describir los usos que le dan los futuros docentes de Matemática al software de Geometría Dinámica.

ABORDAJE METODOLÓGICO

Este estudio ha sido concebido dentro de la modalidad de Investigación de Campo (UPEL, 2006), en la cual se pretendió describir los usos que le dan los futuros docentes de Matemática al software de Geometría Dinámica, en el contexto del curso de resolución de problemas geométricos (RPG_AC); curso que incorpora el uso sistemático de un software de Geometría Dinámica como el Cabri II. Asimismo, este estudio se ubica en el paradigma cualitativo interpretativo (Sabariego Puig, 2012) y, para abordar esta investigación, se acudió a una estrategia de estudio de caso (Yin, 2003), el cual estuvo focalizado en el análisis de las producciones de un grupo de futuros profesores de Matemática, quienes participaron en el curso RPG_AC, como parte de su plan de formación especializada en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara” (UPEL Maracay).

Dado que, en esta investigación se siguió un paradigma cualitativo interpretativo, la misma se desarrolló atendiendo a las fases propuestas por Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1999), las cuales se describen más adelante junto los instrumentos empleados para recabar la información requerida por los investigadores.

Cabe señalar que los procedimientos empleados por los participantes en el curso de RPG_AC han podido ser reconstruidos gracias a ciertas herramientas disponibles en los SGD, como la llamada opción “revisar la construcción” o la opción “mostrar la descripción” con las cuales se genera un reporte de los pasos seguidos al realizar una construcción geométrica en Cabri II.

En el análisis realizado se procedió a una triangulación de datos, donde lo obtenido en las producciones orales y escritas – los archivos Cabri, los informes de trabajo y las grabaciones de audio – video – se confrontó, a la luz del objetivo que guió esta investigación, así como los referentes teóricos considerados.

Contexto de actuación e informantes clave

El curso de Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora (RPG_AC) forma parte del componente de formación especializada de la especialidad de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL Maracay, Venezuela). Este curso – entendido como una propuesta formativa en el área de Geometría y su Didáctica – ha sido asumido como un escenario para la investigación en el área de la formación inicial de los profesores de Matemática y es, por esto que, esta investigación ha estado dirigida a describir los usos que le dan los futuros docentes de Matemática a los SGD cuando realizan determinadas tareas matemáticas, a partir del análisis de sus producciones (informes de trabajo, archivos .fig. y grabaciones de audio-video de ciertos episodios de enseñanza y aprendizaje).

El curso RPG_AC se llevó a cabo durante un periodo académico, con una duración de 16 semanas. Dado que las clases se desarrollarían en un laboratorio de informática y teniendo en cuenta el número de computadoras disponibles, el cupo se fijó en quince (15) estudiantes; lográndose inscribir un total de trece (13) estudiantes, cuatro (4) hombres y nueve (9) mujeres, quienes se organizaron en pequeños grupos Gi para realizar las tareas planteadas. Para los talleres n° 1 y 2 se conformaron seis (6) grupos, mientras que para el taller n° 3 y el diseño de la unidad didáctica con contenido geométrico, los participantes se reorganizaron en cuatro (4) grupos (ver Tabla 1). Es importante señalar que, atendiendo al plan de estudio de la especialidad de Matemática en la UPEL Maracay, a los participantes les tocaba inscribir un curso optativo de integración y ellos decidieron inscribir el curso RPG_AC; además, algunos de ellos habían cursado los cursos obligatorios de Geometría I y Geometría II y habían mostrado interés hacia el estudio de la Geometría, mediante la disposición a realizar tareas como las descritas en Ortiz, Iglesias y Paredes (2013), en las cuales se utilizaron materiales y recursos tales como: juego geométrico, geoplano, plantillas con diferentes tramas, papel para plegar, tangram chino y SGD; también conocían de la existencia del Cabri II, ya que, en los cursos de Geometría, éste había sido utilizado como pizarra electrónica, para ilustrar cómo realizar algunas construcciones geométricas con regla y compás.

Tabla 1. *Estudiantes participantes en el curso RPG_AC y su organización en pequeños grupos.*

Estudiante	Identificación	Sexo	Taller 1	Taller 2	Taller 3	Diseño UD
1	OB	F	G1	G1	G1	G1
2	ER	F	G6	G6	G2	G2
3	MR	F	G6	G6	G4	G4
4	KV	M	G4	G4	G3	G3
5	ZT	F	G5	G5	G3	G3
6	HB	M	G2	G2	G4	G4
7	WG	M	G2	G2	G2	G2
8	AG	F	G1	G1	G1	G1
9	YC	F	G2	G2	G4	G4
10	AO	F	G3	G3	G2	G2
11	GG	F	G5	G5	G1	G1
12	SR	M	G4	G4	G3	G3
13	CG	F	G3	G3	G2	G2

Procedimiento investigativo organizado por fases

Como hemos dicho, las fases seguidas, se han basado en las propuestas en Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1999):

Fase Preparatoria: Se sustentó en la reflexión en y sobre la práctica en torno a la problemática relacionada con la formación docente en el área de Geometría y su Didáctica, así como la revisión de fuentes documentales relacionadas con esta temática. Esta fase abarcó dos etapas no disjuntas: (a) la elaboración del proyecto de investigación, el cual fue revisado y confrontado ante tres investigadores activos en el ámbito de la Educación Matemática, con el propósito de valorar su calidad científica y viabilidad; (b) la planificación de las actividades a ser desarrolladas en el curso RPG_AC.

Fase de trabajo de campo: Representó la ocasión para desarrollar las actividades didácticas planificadas y recabar los insumos necesarios para describir los usos que le dieron los participantes en el curso de RPG_AC a los SGD y clasificar las justificaciones presentadas por ellos cuando realizaron determinadas tareas.

Fase Analítica: Consistió en el análisis cualitativo de las producciones de los participantes en el curso RPG_AC.

Fase Informativa: Abarcó la redacción del reporte de investigación que se da a conocer en este documento.

Instrumentos de recolección de la información

Los instrumentos empleados para recabar la información requerida por los investigadores y posteriormente hacer el análisis cualitativo interpretativo han sido:

Archivos Cabri: Esto permitió llevar un registro de cada una de las construcciones geométricas realizadas por los participantes, en función de las actividades propuestas en cada uno de los tres talleres que formaron parte del curso RPG_AC, haciendo uso del Cabri II Plus. Para cada uno de los tres talleres que conformaron el curso RPG_AC, los participantes realizaron construcciones geométricas con el Cabri II y las guardaron – debidamente identificadas - en un pen drive, quedando a disposición de los investigadores para su posterior revisión y análisis.

Informes de trabajo: Permitieron recoger información acerca del trabajo de cada uno de los participantes cuando resolvieron un problema geométrico o realizaron una demostración. Los informes escritos consistieron en documentos elaborados en Word, siguiendo las actividades propuestas en cada uno de los talleres de RPG. Para la elaboración de los informes escritos se tomó como base las actividades desarrolladas en el aula, discutidas con la facilitadora del curso RPG_AC y los compañeros de clases, y la misma se complementó con el trabajo fuera del aula que realizaron cada uno de los participantes. Cabe decir que, al inicio del curso, cada uno de ellos recibió un CD con el Cabri II Plus, con el propósito de instalarlo en su computadora personal y así facilitarle la familiarización con este SGD y la realización de las tareas propuestas.

Grabaciones de audio y video: Permitieron llevar un registro de las exposiciones realizadas por los participantes cuando presentaron sus producciones ante todo el grupo, como cierre de cada una de las tareas realizadas. Para llevar a cabo tales grabaciones, se contó con la participación de los propios participantes en el curso RPG_AC, bajo la orientación de los investigadores y haciendo uso de una pequeña cámara digital, con el propósito de registrar en audio y video las intervenciones de los profesores en formación cuando mostraban una construcción realizada con el Cabri II y trataban de dar algún tipo de justificación en cuanto a su consistencia o validar alguna conjetura formulada. Cabe señalar la disposición de los participantes a ser grabados, ya que, al inicio del curso RPG_AC, la facilitadora les dio a conocer el proyecto, les explicó como sus producciones serían, a posteriori, objeto de análisis con fines investigativos y ellos aceptaron participar como informantes clave. Estas grabaciones les permitieron a los investigadores complementar la información recabada a través de los informes de trabajo y los archivos Cabri, ya que, en las mismas quedaban registrados comentarios o intercambios de ideas que no se mostraban en las producciones escritas.

En este trabajo se tendrán en consideración las producciones orales y escritas de los participantes en el curso RPG_AC cuando abordaron las actividades propuestas en el taller n° 1 sobre las construcciones con regla y compás en un ambiente de Geometría Dinámica, el cual se organizó en función a seis actividades dirigidas, con la estructura: objetos iniciales y procedimiento dado, objetos finales por construir; y seis actividades libres: objetos iniciales y finales dados, procedimiento por establecer.

Una vez recabada la información correspondiente al taller n° 1, se elaboró un inventario de las actividades dirigidas, en atención a los siguientes aspectos: (a) seguimiento de las instrucciones dadas y aplicación del procedimiento indicado, (b) justificación de las afirmaciones realizadas, y (c) tipo de método de construcción empleado; así como también de las actividades libres, pero, en este caso, el aspecto (a) fue sustituido por descripción del procedimiento empleado para construir la figura. Conocido este inventario, se decidió trabajar con cinco de los seis grupos de trabajo conformados para realizar las actividades propuestas en el taller n° 1; uno de los equipos no fue considerado por no disponerse de algunos archivos .fig. Seguidamente, para cada uno de los cinco grupos de trabajo, se

procedió a llevar un registro organizado de la información, según el esquema mostrado en la siguiente tabla:

Tabla 2. *Esquema seguido para organizar la información recabada en el taller n° 1*

Taller n° 1		Integrantes del grupo de trabajo	
Parte 1: Actividades dirigidas		Imagen de la figura construida (copiada con la opción Imprimir pantalla)	
Actividad n° X: Denominación de la actividad.			
Método de construcción empleado			
<i>Instrucciones</i>	<i>Herramientas empleadas</i>	<i>Secuencia</i>	<i>Observaciones</i>
Pasos a seguir para construir una figura geométrica	Haciendo uso de la herramienta “mostrar la descripción”, se tiene un registro de cada una de las herramientas empleadas por los participantes cuando efectuaron una construcción con el Cabri II.	Orden de los pasos seguidos	Realizadas por la docente en función a sus intereses investigativos

Dado el volumen de información recabada y teniendo en cuenta el tipo de actividades (dirigidas y libres), el método de construcción empleado (método de los dos lugares, método de la figura auxiliar y método de la figura semejante) y las respuestas dadas por los participantes que involucraran algún tipo de justificación, se acordó trabajar con sólo cuatro de las doce actividades propuestas: (a) Trazado de una recta perpendicular en el punto medio de un segmento. (b) División de un segmento de recta en n partes iguales. (c) Construcción de un triángulo dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos. (d) Construir un cuadrado ABCD (objeto final) dado uno de sus lados (objeto inicial).

RESULTADOS

Para ilustrar lo aquí planteado, se ha tomado como referencia la actividad dirigida n° 2, *Trazado de una recta perpendicular en el punto medio de un segmento*:

1. Trace un segmento \overline{AB} . (Objeto inicial)
2. Con el *compás* teniendo una abertura mayor que la mitad de la longitud de \overline{AB} (aquí es necesario introducir un *segmento auxiliar* cuya longitud representa la abertura del compás), haga centro en los puntos A y B sucesivamente y trace arcos de circunferencia que se corten en los puntos C y D.
3. Trace la recta determinada por los puntos C y D. La recta \overleftrightarrow{CD} se denomina *mediatriz del segmento \overline{AB}* . (Primer objeto final)
4. Determina el punto de intersección P de la recta \overleftrightarrow{CD} con el segmento \overline{AB} . Tal punto de intersección es el *punto medio del segmento \overline{AB}* . (Segundo objeto final)
5. ¿Cómo puedes garantizar que la recta \overleftrightarrow{CD} es la mediatriz del segmento \overline{AB} ? O, en otras palabras, ¿cómo puedes garantizar que P es punto medio del segmento \overline{AB} y que la recta \overleftrightarrow{CD} es perpendicular al segmento \overline{AB} en P?

Una vez analizados los informes escritos y los archivos Cabri, se identificaron las siguientes regularidades:

- Siguen paso a paso el procedimiento indicado, usando las herramientas disponibles en el Cabri II según lo requerido; es decir, se observa una correspondencia entre los pasos del procedimiento de construcción dado y las herramientas empleadas por los participantes en el

curso RPG_AC. Introducen un segmento auxiliar, el cual debe tener una longitud r mayor a la mitad de la longitud del segmento \overline{AB} ; tal longitud r representa la abertura del compás y permitía construir una circunferencia con centro en A (o en B) y radio r . Uno de los equipos (grupo n° 2) trazó el segmento \overline{AB} , ubicó el punto P (punto medio del segmento \overline{AB}), midió la distancia entre los puntos A y P y, luego, introducen un segmento auxiliar y miden su longitud para garantizar que sea mayor que AP. Los restantes equipos garantizaron esta condición por estimación, sin que mediara la verificación empírica. En esta actividad, el Cabri fue empleado básicamente para efectuar una construcción con regla y compás en un ambiente de geometría dinámica (AGD).

- Parecieran utilizar esquemas de argumentación fácticos, cuando reconocen relaciones existentes entre los diferentes objetos que conforman esta construcción con regla y compás en un AGD: los segmentos \overline{AC} y \overline{AD} son radios de la circunferencia C_1 (A, r); los segmentos \overline{BC} y \overline{BD} son radios de la circunferencia C_2 (B, r); C_1 (A, r) y C_2 (B, r) son circunferencias congruentes.
- Partiendo de las relaciones previamente establecidas entre distintos objetos geométricos, procuran seguir una cadena lógico-deductiva, sustentada en definiciones y propiedades conocidas, con lo cual, se tendría un predominio de los esquemas de argumentación analíticos.
- Entre las ideas principales para realizar la demostración que la recta \overleftrightarrow{CD} es la mediatriz del segmento \overline{AB} , se destacan: (a) probar que el cuadrilátero ACBD es un rombo, para así establecer que sus diagonales \overline{AB} y \overline{CD} se bisecan en P y son perpendiculares entre sí; (b) dado que los puntos C y D equidistan de los extremos del segmento \overline{AB} , aplican el teorema de caracterización de la mediatriz de un segmento; (c) por congruencia de triángulos.

En las actividades libres correspondientes al taller n° 1, los participantes en el curso RPG_AC tenían que establecer (aplicar y describir) un procedimiento que les permitiera construir con regla y compás cierto objeto, a partir de las condiciones dadas. Por ejemplo, en la actividad libre n° 2, Construcción de un triángulo dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos, se establecía lo siguiente: Observa la siguiente figura y describe el procedimiento para construir un triángulo, conocidas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos. ¿Cómo construir el triángulo ABC conocidas las longitudes de los lados AB y AC y la medida del ángulo BAC?

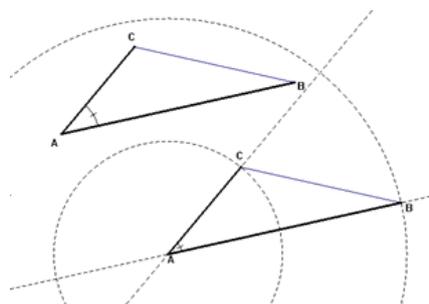


Figura 1. Construcción de un triángulo dadas ciertas condiciones.

La actividad libre n° 2 se realizó por el método de la figura auxiliar, ya que, la idea principal es construir un triángulo $A'B'C'$ congruente con el triángulo ABC (dado como figura auxiliar), destacando la información conocida: las longitudes de los lados \overline{AB} y \overline{AC} y la medida del ángulo BAC. Al revisar los insumos disponibles (informes y archivos .fig.), se observó que:

En la descripción del procedimiento empleado para construir el triángulo $A'B'C'$ (independientemente de la consistencia de la construcción realizada), se considera que los cinco

grupos G_i usaron un vocabulario apropiado y acorde con los contenidos geométricos como se ilustra a continuación:

- G_1 : Deseamos copiar un triángulo conociendo la longitud de dos lados y el ángulo que forman dichos lados. Para ello debemos tomar un punto A' por el cual trazamos una paralela al segmento AB del triángulo original. Luego, con el compás tomamos la longitud del segmento AB y haciendo centro en A' trazamos el arco de circunferencia que corta a la recta determinado en B' . Seguidamente, trazamos una recta paralela al segmento AC que pase por el punto A' , con el compás, tomando la longitud AC y haciendo centro en A' trazamos el arco de circunferencia donde se intersecte con la recta $A'C'$. Por último, trazamos el segmento $B'C'$, y así hemos logrado construir el triángulo $A'B'C'$ que es congruente con el triángulo ABC .
- G_2 : (1) Se forma el ángulo con vértice en A , Llamaremos $L1$ y $L2$ a las semirrectas para diferenciarlas. (2) Utilizando el compás, con abertura AB y haciendo centro en A se traza la circunferencia que corta a la semirrecta $L1$ en el punto B . (3) Utilizando nuevamente el compás ahora con abertura AC y haciendo centro en A se traza la circunferencia que corta a la semirrecta $L2$ en el punto C . (4) Por último se trazan los segmentos AC , AB y CB para obtener el triángulo.
- G_3 : (1) Marcar un punto A cualquiera y trazar una recta paralela de cada uno de los segmentos dado interceptándose en dicho punto A obteniéndose así la misma abertura del ángulo dado. (2) A continuación, con el compás marca en cada uno de los lados del ángulo dado las medidas de los dos lados conocidos (uno en cada lado) y traza las circunferencias respectivamente haciendo centro en A , hallándose los puntos C y B . (3) Luego une los puntos de intersección de la circunferencia con la recta y se obtiene el ΔABC .
- G_4 : Para esta construcción, tomemos primeramente la longitud de cualquier segmento, en este caso tomaremos la longitud del AB y trazaremos la circunferencia determinada por este segmento, ahora determinemos la recta paralela al AB que pase por el centro de la circunferencia, luego denote el radio AB coincidente con la recta paralela; traslade la longitud del AC para realizar una circunferencia con centro en el punto A , ahora determine la recta paralela al AC y denote el radio AC coincidente con la recta paralela al AC . Por último, al unir los puntos B y C , se tiene el triángulo ABC construido dadas las longitudes de un par de lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos.

Los grupos n° 1, 3, 4 y 5, inician la construcción construyendo la figura auxiliar (ΔABC) y resaltan las condiciones lado – ángulo – lado; sin embargo, el grupo n° 2 no toman en cuenta la figura auxiliar, ya que, trazan los segmentos AB y AC , pero no toman en cuenta la medida del $\angle BAC$. Al seguir el procedimiento abajo indicado fue posible construir un triángulo $A'B'C'$ que satisfacía sólo dos de las tres condiciones requeridas: $AB = A'B'$ y $AC = A'C'$. Cabe preguntarse ¿cómo se garantiza que $\angle B'A'C'$ es congruente con $\angle BAC$? Por ende, esta construcción con regla y compás es inconsistente, porque no permite “copiar” al ángulo comprendido entre los lados AB y AC .

Los grupos n° 1, 3 y 4 realizaron construcciones consistentes con regla y compás, debido a que copiaron el ángulo dado ($\angle BAC$), trazando, por el punto A' , rectas paralelas a los segmentos AB y AC . Cabe señalar que, durante el desarrollo de este taller, se había discutido cómo copiar un ángulo haciendo uso de las propiedades de las rectas paralelas cortadas por una secante.

El grupo n° 5 realizó una construcción inconsistente, a pesar que la inició tomando en cuenta la figura auxiliar (ver Figura 2): ubican un punto A' y un punto P y trazan el segmento AP y trazan una circunferencia con centro en A' y radio AB que corta al segmento $A'P$ en un punto O . Así, $A'O = AB$. Luego trazan una circunferencia con centro en O y radio arbitrario r y determinan el punto D de intersección de ambas circunferencias. De esta manera, se cumple que: $A'D = A'O = AB$ y $OD = r$. Proceden a marcar al ángulo $DA'O$. ¿Cómo con esta construcción garantizan que el ángulo $DA'O$ es

congruente con el ángulo CAB ? Trazan otros segmentos $A'C'$ y $A'B'$ no necesariamente congruentes con AC y AB respectivamente y proceden a copiarlos sobre los lados del ángulo $DA'O$.

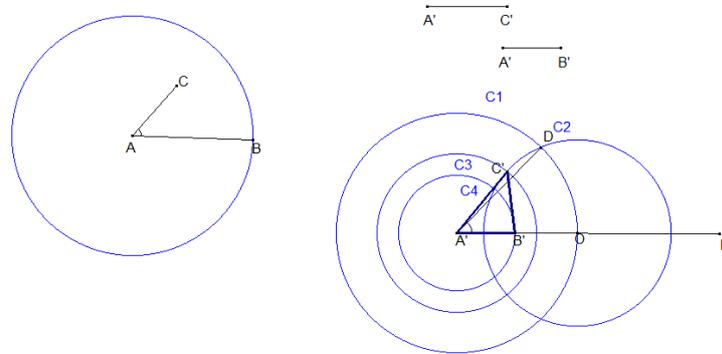


Figura 2. Construcción inconsistente realizada por el grupo n° 5

Los cinco grupos describen el procedimiento de construcción empleado y utilizan el Cabri II Plus, pero no dan justificación alguna del por qué el triángulo $A'B'C'$ es congruente con el triángulo ABC ; para los investigadores posiblemente los estudiantes se limitaron a efectuar lo establecido en el enunciado de la actividad: ¿Cómo construir el triángulo ABC conocidas las longitudes de los lados AB y AC y la medida del ángulo BAC ? Es preciso tener en consideración que, en las actividades dirigidas, se formulaban ciertas preguntas que exigían a los profesores en formación establecer relaciones entre los objetos geométricos que intervenían en cada uno de las construcciones y dar algún tipo de justificación: ¿Cómo garantizar que el objeto construido, a partir de las condiciones iniciales y el procedimiento de construcción empleado, es el esperado? Pareciera que esta manera de entender las construcciones con regla y compás – como medio para sustentar la demostración de propiedades geométricas – no fue asumida en cualquier caso por los participantes en el curso de RPG_AC o, por lo menos, cuando no fue requerido en forma explícita en el curso.

Una vez realizadas las actividades dirigidas y libres que conformaban el taller n° 1, cada uno de los grupos – a solicitud de la facilitadora – seleccionó dos construcciones, las cuales deberían elaborar, describir y presentar en una próxima sesión de clases (actividad extra). Con esta actividad, se pretendía que los profesores en formación gestionaran una actividad dirigida a la construcción consistente con regla y compás de una figura geométrica, lo cual significaba describir el procedimiento empleado, utilizar las herramientas disponibles en el Cabri II y dar una justificación que convenciera a la audiencia sobre la consistencia de la construcción seleccionada; para los fines investigativos, se decidió analizar una sola construcción por equipo de trabajo. Además, cabía la posibilidad que, en el proceso de búsqueda de información sobre las construcciones con regla y compás, indagaran sobre el procedimiento a seguir para construir la figura seleccionada; por ello, en esta actividad se valoró la justificación dada en forma escrita u oral.

Dado que los equipos n° 1 y 2 seleccionaron la construcción de un trapecio isósceles, lo cual permitió contrastar el procedimiento empleado, las herramientas empleadas y las justificaciones dadas, se tendrán en cuenta para ilustrar el análisis llevado a cabo de tales construcciones extras (Tablas 3 y 4).

El grupo n° 1 no presentó por escrito la justificación; durante la exposición, teniendo ya construida la figura, utilizando la opción “revisar la construcción”, mostró, paso a paso, el procedimiento empleado; sin embargo, en forma oral y ante la pregunta ¿cómo garantizas que el cuadrilátero $AFCB$ es un trapecio isósceles? Reconocieron que, por construcción, el segmento \overline{AF} está contenido en la recta L_3 y está es paralela al segmento \overline{BC} y, por ello, los lados opuestos \overline{AF} y \overline{BC} del cuadrilátero

\overline{AFCB} son paralelos y, por definición, es un trapecio. Faltaba probar que los lados no paralelos \overline{AB} y \overline{FC} eran congruentes. Para probarlo establecieron por el criterio de congruencia de triángulos LAL que los triángulos ABD y FCE son congruentes, ya que, por construcción, se tiene que $BD = CE$ y $\angle ADB$ y $\angle FEC$ son rectos; además, $AD = FE$ (distancia entre rectas paralelas). Y, por PCTC, establecieron que $AB = FC$ (ver Figura 3).

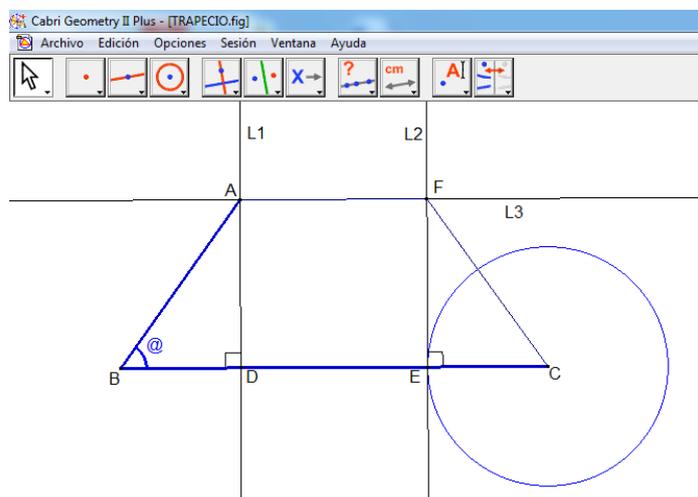


Figura 3. Trapecio isósceles construido por el grupo n° 1

Tabla 3. Actividad extra realizada por el grupo n° 1: Construcción de un trapecio isósceles

Procedimiento de construcción	Herramientas empleadas
1. A, B y C son tres puntos distintos no alineados. Se trazan los segmentos AB y BC y luego se marca el ángulo ABC.	A Punto B Punto Segmento: A, B C Punto Segmento: B, C @ ángulo: A, B, C
2. Desde el punto A se traza una recta perpendicular al segmento BC que lo corta en el punto D. Se traza el segmento BD.	L ₁ Recta (Recta perpendicular): A, BC D Punto (Punto(s) de intersección): L ₁ , BC Segmento: B, D
3. Con el compás, se traza una circunferencia con centro en C y radio BD que corta al segmento BC en el punto E.	C ₁ Círculo (Compás): C, BD E Punto (Punto(s) de intersección): C ₁ , BC
4. Por E se traza una perpendicular al segmento BC	L ₂ Recta (Recta perpendicular): E, BC
5. Por el punto A se traza una paralela al segmento BC que corta a L ₂ en F	L ₃ Recta (Recta paralela): A, BC F Punto (Punto(s) de intersección): L ₂ , L ₃
6. Se traza el segmento FC y se marcan los ángulos ADB y FEC. El cuadrilátero AFCB es un trapecio.	Segmento: F, C ángulo: A, D, B ángulo: F, E, C Polígono: A, F, C, B

El grupo nº 2 utilizó la opción “revisar la construcción” para dar a conocer, paso por paso, el procedimiento empleado; seguidamente, usando el esquema de afirmaciones y razones, presentó la siguiente justificación (tomada del informe escrito):

1. Los segmentos \overline{AE} y \overline{EB} son congruentes; por ser E punto medio.
2. C3 y C4 son congruentes; por ser circunferencias de radios congruentes, afirmación 1.
3. \overline{AG} y \overline{AE} son congruentes; por ser radios de C3.
4. \overline{BF} y \overline{EB} son congruentes; por ser radios de C4.
5. \overline{AG} y \overline{BF} son congruentes; afirmaciones 2, 3 y 4.
6. El ángulo HEB es recto (mide 90°); por ser la recta la mediatriz del segmento \overline{AB}
7. El ángulo DHF es recto (mide 90°); por ser la recta la mediatriz del segmento \overline{GF} .
8. Los segmentos \overline{GF} y \overline{AB} son paralelos; si en dos rectas cortadas por una secante los ángulos alternos externos son congruentes, entonces las rectas son paralelas, afirmación 6 y 7.
9. El cuadrilátero ABFG es un trapecio isósceles; afirmaciones 5 y 8 (Ver Figura 4).

Tabla 4. *Actividad extra realizada por el grupo nº 2: Construcción de un trapecio isósceles*

Procedimiento de construcción	Herramientas empleadas
1. Se traza el segmento AB	A Punto B Punto Segmento: A, B
2. Trazar una circunferencia con centro en A y abertura AB (C1)	C1 Círculo: A, B
3. Trazar una circunferencia con centro en B y abertura AB (C2)	C2 Círculo: B, A
4. Marcar los puntos de intersección entre C1 y C2 (puntos C y D)	D Punto (Punto(s) de intersección): C1, C2 C Punto (Punto(s) de intersección): C1, C2
5. Se traza la recta que pasa por los puntos C y D (mediatriz del segmento AB)	Recta: D, C
6. Marcar el punto de corte entre la recta y el segmento AB (PUNTO MEDIO “E”)	E Punto (Punto(s) de intersección): -, -
7. Trazar una circunferencia con centro en A y abertura AE (C3)	C3 Círculo: A, E
8. Trazar una circunferencia con centro en B y abertura BE (C4)	C4 Círculo: B, E
9. Marcar los puntos de corte de C3 con C2 y de C4 con C1 respectivamente (superiores en este caso) punto G y F	G Punto (Punto(s) de intersección): C2, C3 F Punto (Punto(s) de intersección): C1, C4
10. Trazar los segmentos GF, FB, AG y de esta manera se obtiene el trapecio isósceles ABFG.	H Segmento: G, F Segmento: F, B Segmento: A, G Punto (Punto(s) de intersección): CD, GF ángulo: H, E, B Punto (Punto(s) de intersección): C2, C3 Punto (Punto(s) de intersección): C1, C4

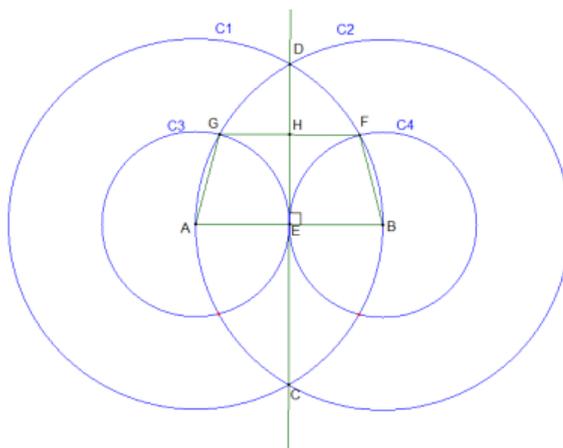


Figura 4. Trapecio isósceles construido por el grupo n° 2

Nótese que, dada una de las bases del trapecio (el segmento \overline{AB}), aplican lo visto en la construcción dirigida n° 2 y trazan su correspondiente mediatriz (la recta \overline{CD}) y ubican su punto medio (el punto E) y, partiendo de este hecho, inician la demostración (ver afirmación n° 1). Además, utilizan relaciones existentes entre los objetos que conforman esta construcción: dos segmentos son congruentes por ser radios de una misma circunferencia o dos segmentos son congruentes por ser radios de circunferencias congruentes (afirmaciones 2, 3 y 4); esto les permite asegurar que $AG = BF$ en (5). Seguidamente, afirman en (7) que la recta \overline{CD} también es la mediatriz del segmento \overline{GF} y, por ello, $\angle DHF$ es recto. Sin embargo, cabe preguntarse lo siguiente: dado que H es el punto de intersección de la recta \overline{CD} con el segmento \overline{GF} , H pertenece a la recta \overline{CD} y, por tanto, aplicando el teorema de caracterización de la mediatriz de un segmento, H equidista de los puntos A y B ¿cómo garantizan que el punto H también equidista de G y F? Esto no ha sido demostrado, pero sirve de sustento para aplicar el teorema ACP y demostrar que los lados \overline{AB} y \overline{GF} son paralelos: “Se dan dos rectas cortadas por una secante. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces dos ángulos alternos externos son congruentes y las rectas son paralelas”. Posiblemente la convicción que la recta \overline{CD} es también mediatriz del segmento \overline{GF} los lleva a asumir esta proposición y seguir la demostración.

Se considera que los grupos n° 1 y 2 describen el procedimiento con un vocabulario apropiado y emplean las herramientas que se corresponden con cada uno de los pasos indicados; dado que elaboran una cadena lógico-deductiva, a partir de las relaciones existentes entre los objetos geométricos que intervienen en la construcción, pudiera decirse que los integrantes de ambos grupos siguen un esquema de argumentación analítico, apoyado en un esquema de argumentación fáctico.

LOGROS Y HALLAZGOS

Considerando las producciones de los equipos en el Taller n° 1 sobre construcciones con regla y compás en ambientes de geometría dinámica (AGD) y el objetivo de esta investigación, seguidamente se presentarán algunos hallazgos preliminares; así, como se presenta en la Tabla 5, en cuanto al uso técnico (UT) del Cabri II, los profesores en formación emplearon las herramientas correspondientes con lo descrito en el procedimiento de construcción con regla y compás (UT.1), así como para mejorar la apariencia de la figura en pantalla (UT.3). En cuanto al empleo de herramientas que le permitieran verificar relaciones existentes entre los objetos geométricos que conforman una construcción (UT.2), se limitaron a medir ángulos o la longitud de un segmento; el menú propiedades no fue empleado.

Tabla 5. Usos que los profesores en formación le dieron al Cabri II en el Taller n° 1

Usos del Cabri II	Indicadores	G1	G2	G3	G4	G5	(*)
Uso Técnico (UT)	1. Empleo de las herramientas correspondientes con lo descrito en el procedimiento de construcción con regla y compás.	3	3	3	3	3	AD
		3	3	3	3	3	
		3	1	3	3	1	AL
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AE
	2. Empleo de herramientas que le permitieran verificar relaciones existentes entre los objetos geométricos que conforman tal construcción.	1	2	1	1	1	AD
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	AL
		2	2	1	1	1	
		2	2	3	2	1	AE
	3. Empleo de herramientas para mejorar la apariencia de la figura en pantalla.	3	3	3	3	3	AD
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AL
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AE
Uso Heurístico (UH)	1. Construcción	3	3	3	3	3	AD
		3	3	3	3	3	
		3	1	3	3	1	AL
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AE
	3	3	3	3	3		
	2. Exploración	3	3	3	3	3	AD
		3	1	3	3	3	
		3	1	3	3	1	AL
		3	3	3	3	3	
		3	3	3	3	3	AE
	3. Formulación de conjeturas	1	1	1	1	1	AD
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	AL
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	AE
	4. Validación	2	3	2	3	2	AD
		2	2	1	3	3	
		1	1	1	1	1	AL
		2	2	1	1	3	
3		3	3	3	2	AE	

Nota: (*) AD: Actividad dirigida; AL: Actividad libre; AE: Actividad extra

Posiblemente, esto se haya debido a que, en las actividades planteadas en el Taller n° 1, en el procedimiento dado en el curso (actividades dirigidas) o el descrito por los participantes (actividades libres y actividad extra) quedaban establecidas estas relaciones o estaban garantizadas por las herramientas de construcción empleadas. Se ha empleado una escala cualitativa de alto (3), medio (2) y bajo (1) para valorar el uso técnico del Cabri II en función de los tres indicadores establecidos, es decir: UT.1, UT.2 y UT.3. En el cuadro 8 se aprecia que el uso menos frecuente en los grupos de futuros profesores fue el uso referido a la verificación de relaciones (UT.2), lo cual coincide con lo encontrado por Cruz y Mántica (2017).

En relación con el uso heurístico, los cinco grupos lograron construir la figura solicitada, a partir de las condiciones iniciales (UH.1), así como reconocer relaciones entre los objetos que la conformaban, especialmente establecieron relaciones de congruencia entre radios de una misma circunferencia o entre radios de circunferencias congruentes (UH.2). No formularon de forma explícita conjetura

alguna (UH.3), se considera que sí lo hicieron en forma implícita porque asumieron ciertas propiedades que satisfacían las figuras, sin aún haber sido validadas, para avanzar en las justificaciones dadas (UH.4). Es decir, los participantes estuvieron ubicados en las acciones heurísticas propuestas por Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006), aunque los usos de formulación de conjeturas y validación estuvieron relativamente débiles.

Estos dos diferentes tipos de uso de un SGD se complementan entre sí; por ejemplo, el uso de las herramientas de verificación de relaciones y medidas resulta útil en la exploración de una construcción geométrica y la identificación de patrones y regularidades (las llamadas características geométricas invariantes). Por ende, se considera que es clave que los usuarios de un SGD estén familiarizados con el entorno informático y conozcan las herramientas disponibles y sus utilidades, para así centrar su atención en las acciones heurísticas (construir, explorar, formular conjeturas y validarlas), las cuales están estrechamente vinculadas con el proceso de resolución de problemas geométricos.

Finalmente, se debería reflexionar sobre la necesidad de propiciar en el aula los intercambios profesor-estudiantes y estudiantes-estudiantes, con el propósito de crear un ambiente que incentive los usos heurísticos del software de geometría dinámica, lo cual podría incidir en un fortalecimiento del esquema construir → explorar → conjeturar → validar con más provecho para la formación matemática y didáctica de los futuros profesores y sus potenciales estudiantes.

REFERENCIAS

- Amaral, M.E. y Cabrita, I. (2017). Uma abordagem interdisciplinar para a apropriação das isometrias. *Campo Aberto*, 36 (1), 109-136.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (3), 66 – 72.
- Cruz, M.F. y Mantica, A.M. (2017). El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 51, 69-72.
- González López, M.J. (2001). La Gestión de la Clase de Geometría utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro* (pp. 277 – 290). Granada: Universidad de Granada.
- Gutiérrez, R. E.; Prieto, J. L. y Ortiz, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación Matemática*, 29 (2), 37-68.
- Iglesias, M. y Ortiz, J. (2015). La Investigación en Pensamiento Geométrico y Didáctica de la Geometría. En J. Ortiz y M. Iglesias (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Aportes desde una Unidad de Investigación*. La Morita: Universidad de Carabobo. Disponible: <http://funes.uniandes.edu.co/8365/>
- Mammana, C. y Villani, V. (1998). Introduction. En C. Mammana y V. Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study* (pp. 1 – 8). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Manzano Mozo, J.; Gómez García, M. y Mozo Fernández, J. (2017). Mecanismos articulados: Geometría Dinámica y Cinemática en un entorno educativo STEM. *Innoeduca*, 3 (1), pp. 15-27.
- Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes, Z. (2013). El análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 293 – 308). Granada: Comares.

- Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.
- Prieto González, J. L. (2016). GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. *Revista Electrónica Conocimiento Libre y Licenciamiento (CLIC)*, Nro 14, Año 7, 9-23.
- Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J. y García Jiménez, E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.
- Sabariego Puig, M. (2012). La Investigación Educativa: Génesis, Evolución y Características. En R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la Investigación Educativa* (pp. 51 – 87). Madrid: La Muralla.
- Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL). (2006). *Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestría y Tesis Doctorales*. Caracas: FEDEUPEL.
- Yin, R. K. (2003). *Case Study Research. Design and Methods*. Thousand Oaks, United States of America: Sage.

SOFTWARE

- Cabri – Géomètre II. Copyright Laboratorio de Estructuras Discretas y de Didáctica (IMAG) de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, 1997 – 1999. Editor: Texas Instruments.

Martha Iglesias
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay, Venezuela
mmiglesias@gmail.com

José Ortiz
Universidad de Carabobo, Campus La Morita, Venezuela
ortizbuitrago@gmail.com



ISSN: 2603-9982

Diago, P. D., Arnau, D., y González-Calero, J. A. (2018). La resolución de problemas matemáticos en primeras edades escolares con Bee-bot. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 1(2), 36-50.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN PRIMERAS EDADES ESCOLARES CON BEE-BOT

Pascual D. Diago, Universitat de València, España

David Arnau, Universitat de València, España

José Antonio González-Calero, Universidad de Castilla – La Mancha, España

Resumen

Los entornos relacionados con la robótica y los lenguajes visuales de programación por bloques permiten plantear tareas que pueden ser entendidas como problemas con contenido matemático aptos para edades escolares tempranas. Estos entornos permiten proponer situaciones problemáticas en edades en las que el formalismo o el escaso conocimiento matemático impide a los estudiantes abordar problemas matemáticos más complejos. En este trabajo se da cuenta de cómo el robot programable Bee-bot constituye un dispositivo privilegiado donde poder observar cómo los estudiantes toman decisiones durante el proceso de resolución.

Palabras clave: resolución de problemas, pensamiento computacional, robótica educativa, programación en bloques, primeras edades escolares

Mathematical problem-solving in early school years with Bee-bot

Abstract

The environments related to robotics and the visual block-based programming languages allow to pose tasks that can be understood as problems with mathematical content suitable for early school ages. These environments allow proposing problematic situations in ages in which formalism or poor mathematical knowledge prevents students from tackling more complex mathematical problems. In this work we show how the Bee-bot programmable robot is a privileged device to observe how students make decisions during the resolution process.

Keywords: problem-solving, computational thinking, educational robotics, block-based programming, early school years

ANTECEDENTES

Sobre la resolución de problemas

En *A Retrospective Account of the Past Twenty-five Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving*, Jeremy Kilpatrick (1985) señalaba, en aquel momento, que hacía ya 40 años que la naturaleza subjetiva de problema matemático había sido aceptada por la comunidad investigadora en educación matemática. Según Brownell (1942), una tarea puede ser considerada un problema cuando el resolutor es capaz de comprenderla utilizando un conocimiento previo, pero no dispone de un procedimiento inmediato para abordarla. Un problema matemático además deberá exigir al resolutor el uso de contenido matemático para su resolución. Esta definición sitúa a los problemas en un continuo entre los enigmas y los ejercicios rutinarios.

La introducción de la resolución de problemas en los primeros niveles escolares supone enfrentarse a un dilema didáctico. Este dilema es consecuencia del carácter psicológico de la idea de problema. Dado el escaso contenido matemático que se desarrolla en los niveles de Educación Infantil, para el docente puede resultar complejo presentar tareas matemáticas que resulten problemas para sus estudiantes. El cuidado de los maestros de primeros niveles por no desanimar a sus estudiantes conduce raramente a plantear problemas y a abusar del recurso de ejercicios matemáticos. Sin embargo, en *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) se especifica que los estudiantes de los primeros niveles escolares deben afrontar la resolución de problemas. De hecho, la resolución de problemas se considera un estándar de proceso, relacionado con los procesos que requieren que el estudiante “haga matemáticas” y consiga un aprendizaje significativo. Dentro de este estándar se insiste en la necesidad de que los estudiantes sean conscientes de que un problema se puede abordar siguiendo distintas estrategias y/o vías de resolución. Los profesores deben animar a sus estudiantes a identificarlas y, en el caso de los niveles típicos de la Educación Infantil, a expresar, categorizar y comparar las estrategias que emplean.

Entre las recomendaciones que aparecen en *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), se insiste en la necesidad de explicitar en los estudiantes la necesidad de monitorizar y reflexionar sobre el proceso de resolución. Estas habilidades que podríamos incluir dentro de la metacognición son parte de las cinco categorías para la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas que considera Schoenfeld (1992): el conocimiento base; las estrategias de resolución de problemas; monitorización y control; creencias y afectos; y prácticas. Así, el autor describe la monitorización y control como una colección de procesos metacognitivos que se usan para decidir si continuar o no con un camino de resolución en función de si las cosas van bien o mal.

Sobre los entornos tecnológicos y la programación en bloques

El campo de la educación no es ajeno al fuerte desarrollo tecnológico de los últimos años y, hoy en día, es común la presencia de entornos tecnológicos orientados a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos (Aldon, Hitt, Bazzini y Gellert, 2017; Clark-Wilson, Robutti y Sinclair, 2014; Cózar y De Moya, 2017; Hoyles y Lagrange, 2010). En el contexto del aula, hay una tendencia internacional hacia el uso de entornos relacionados con la robótica y de lenguajes visuales de programación en bloques, en lo que se considera una vuelta de la programación a la escuela (entendida en términos de las Ciencias de la Computación; FECYT, Google, y Everis, 2016).

Por un lado, pese a ser percibidos por los estudiantes como menos potentes y auténticos (Weintrop y Wilensky, 2015), los entornos de programación visuales basados en bloques ofrecen al usuario una interfaz lista para ser explorada y manipulada de forma directa. La programación visual por bloques permite elaborar un conjunto de órdenes pre-programadas listas para ser ejecutadas secuencialmente. Además, a diferencia de otros lenguajes de programación más sofisticados, estos bloques aparecen

descritos en un lenguaje natural (visual o textual), por lo que son fácilmente interpretables por el usuario.

Por otro lado, el diseño de secuencias de enseñanza basadas en el uso de robots programables permite iniciar el aprendizaje de la resolución de problemas desde este enfoque tecnológico. El potencial de esta vía puede apreciarse, al menos, desde dos de las exigencias que impone y permite el propio robot, y que podemos ligar a los pasos de resolución de problemas de Polya (1945): i) realizar un plan previo a la programación del robot, con la conveniencia de usar una representación formal para el mismo (un lenguaje visual de programación por bloques); y ii) la posibilidad de realizar una valoración del plan ideado a partir de la respuesta proporcionada por el movimiento del robot.

En relación a los primeros niveles educativos, las propuestas que permiten a los estudiantes iniciarse en las estructuras básicas de la programación secuencial en entornos tecnológicos son cada vez más habituales (Diago y Arnau, 2017; Chen et al., 2017; Merino-Armero, González-Calero, Cózar-Gutiérrez y Villena-Taranilla, 2018; Sáez y Cózar, 2017). Al igual que ocurriera en los años 60 y 70 con las investigaciones con *Logo* sobre el desarrollo de conocimientos y procesos cognitivos (Clements y Sarama, 1997; Hoyles y Noss, 1992; Papert, 1981), se observa que este enfoque basado en el *pensamiento computacional* (Wing, 2006) favorece los procesos de razonamiento matemático y las habilidades en resolución de problemas permitiendo, además, la integración de aprendizajes de áreas como las ciencias, las matemáticas, la tecnología y la ingeniería (Bers, Seddighin y Sullivan, 2013).

PROPÓSITO

De manera general, el estudio pretende analizar cómo estudiantes de infantil y de primer curso de primaria gestionan el proceso de resolución de un problema para el que se presentan explícitamente distintas vías de resolución. En concreto, pretendemos determinar si los estudiantes tienen en cuenta sus habilidades a la hora de abordar las subtareas cuando monitorizan y evalúan el proceso de resolución o si, por el contrario, la toma de decisiones se realiza atendiendo únicamente a las características de la tarea.

MATERIAL Y MÉTODOS

El entorno tecnológico

El robot *Bee-bot* (Figura 1, izquierda) es un dispositivo tecnológico (clasificado como *Tangible User Interfaces* en la taxonomía de Strawhacker y Bers, 2015) cuya programación se realiza mediante los botones físicos de la propia interfaz. Por su sencillez de uso, *Bee-bot* es un robot muy popular en propuestas educativas de primeras edades escolares. Como se puede ver en la Figura 1 (centro), todos los bloques de programación que permiten la comunicación con el robot se corresponden a acciones de movimiento, relativas al sistema de referencia del propio robot. Además, el robot cuenta con tres bloques de control: “GO” (ejecuta las instrucciones introducidas hasta ese momento), “PAUSE” (ejecuta un paro de un segundo entre los bloques en que se sitúa esta instrucción) y “CLEAR” (borra todos los bloques secuenciados). Es importante resaltar que los bloques relacionados con el giro (a derecha o izquierda) corresponden a giros de 90° sobre sí mismo (en sentido horario o anti-horario), sin que el robot se traslade. Los bloques de avance o retroceso corresponden con desplazamientos en línea recta del robot de 15 cm, sin que el robot modifique su orientación.



Figura 1. El robot *Bee-bot* (izquierda). Bloques de programación disponibles (centro). Tablero para actividades con *Bee-bot* (derecha). Fuente: elaboración propia

Debido a las características de movimiento descritas, las tareas habituales en las que se hace uso de *Bee-bot* suelen presentarse en un tablero con una cuadrícula de 15 cm de lado, sobre el cual se desplazará el robot (Figura 1, derecha). Este soporte cuadrículado permite al estudiante una mejor conceptualización del espacio que rodea al robot (Sabena, 2017), lo cual se traduce en una ayuda a la hora de pensar en los bloques de movimiento que se han de programar para desplazar al robot hasta un punto determinado.

Con el fin de plantear situaciones en las que el estudiante haga un uso real de bloques de programación, en el sentido de las ciencias de la computación, se ha implementado un *sistema de tarjetas* y un espacio físico, denominado *caja de secuenciación* (Figura 2). Mediante estos materiales, los estudiantes pueden secuenciar bloques de forma ordenada para que luego sean ejecutados por el robot *Bee-bot* en el tablero, de forma similar a cómo se crea un programa para ser leído y ejecutado en cualquier lenguaje de programación visual por bloques. Por sencillez, en lo que sigue a estos programas elaborados en la caja de secuenciación los llamaremos *planes*. En nuestro caso, los bloques de programación que el estudiante puede utilizar para conformar un plan (o programa) se limitan a los comandos mostrados en la Figura 3.



Figura 2. Sistema de tarjetas y caja de secuenciación utilizados en la experimentación. Fuente: elaboración propia



Figura 3. Bloques de programación disponibles para elaborar los planes a ejecutar por el robot *Bee-bot*. Fuente: elaboración propia

Las variables de tarea

Las tareas administradas consistieron en el problema de mover a *Bee-bot* por el tablero cuadrado de una posición inicial dada hasta una flor, siguiendo un camino marcado con una línea roja (como se aprecia en la Figura 2). En todos los casos, se proporcionaban dos posibles trayectos para alcanzar dicha flor. Para ello, el estudiante debía de elaborar un plan haciendo uso tanto de las tarjetas de instrucciones como de la caja de secuenciación para, posteriormente, programar el robot y comprobar el resultado del plan elaborado.

Tal y como indica Kilpatrick (1978) para los estudios sobre resolución de problemas en el que se involucra a estudiantes resolviendo problemas en un determinado contexto, conviene definir diferentes variables asociadas a dicha tarea. Definimos las siguientes variables de tarea, variables independientes que pueden controlarse antes de la ejecución de la propia tarea y que tienen que ver exclusivamente con el problema:

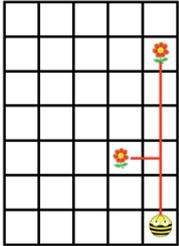
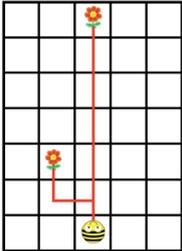
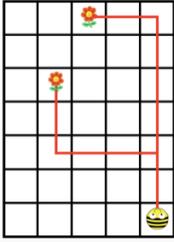
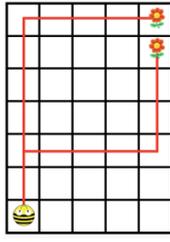
- El número de bloques (instrucciones) necesarios para resolver el trayecto dado (n).
- El número de giros involucrados necesarios para resolver el trayecto dado (gir).
- El cambio de orientación (ori) del robot *Bee-bot* con respecto al sistema de referencia del estudiante (que será fijo durante toda la tarea, pues el estudiante se situará en la parte inferior de los tableros mirando hacia el robot). Se tomará en cuenta siempre el mayor cambio de orientación realizado por el robot durante todo el recorrido, en grados en sentido horario o antihorario.

La definición de estas variables de tarea nos permiten asignar una medida de complejidad para cada uno de los trayectos que conformarán los problemas diseñados sobre el tablero.

La colección de problemas administrados

Teniendo en cuenta el propósito del estudio, para el diseño de los problemas se presentaron dos flores objetivo sobre el tablero, correspondientes a caminos con distintas complejidades relativas. En concreto, se prepararon los cuatro problemas mostrados en la Tabla 1.

Tabla 1. Colección de problemas administrados a los estudiantes

Problemas			
P01	P02	P03	P04
			

Las características referentes a la complejidad de los caminos de los problemas administrados se describen en la Tabla 2 (consideramos como *trayecto 0* aquel que lleva asociada una complejidad menor). En los problemas P01 y P02 los caminos más complejos (*trayecto 1*) pueden percibirse visualmente más cercanos a la casilla inicial. En los problemas P03 y P04 esta percepción visual se hace menos patente, y ambas flores parecen más o menos igual de alejadas, si bien, la flor más cercana se alcanza por el camino más complejo. En todos ellos, el problema se enunció verbalmente de la siguiente manera: “El robot-abeja Bee-bot ha de llegar a una de las dos flores que aparecen en el tablero. Tú decides a cuál de ellas llevarlo, siempre siguiendo los caminos marcados con la línea roja. Recuerda que tanto al robot-abeja como a nosotros nos da igual a qué flor elijas ir”. Además, se recordaba la necesidad de elaborar el plan en la caja de secuenciación para después programar el robot Bee-bot, tal y como se ha descrito con anterioridad.

Tabla 2. Variables de complejidad asociadas a los caminos de los problemas administrados

Trayecto	P01			P02			P03			P04		
	Bloques	Giros	Ori									
0	5	0	0°	6	0	0	9	1	90°	11	1	-90°
1	4	1	90°	5	2	90°	9	2	90°	11	2	-90°

Nota: La columna “Bloques” se corresponde con la variable *n* y “Giros” con la variable *gir*.

Participantes

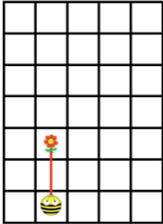
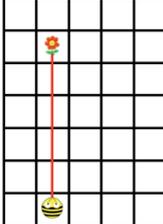
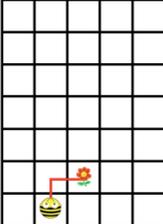
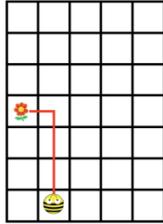
En este estudio participaron 7 estudiantes del último curso de Educación Infantil (5 años) y 7 del primer curso de Educación Primaria de un centro concertado del sistema educativo de la Comunitat Valenciana. Para su identificación a los estudiantes se les asignó un código numérico que empieza por 5 o por 6, según fuera el estudiante de infantil o primaria, seguido de una cadena numérica que se corresponde con los ficheros audiovisuales generados.

Método

El experimento se llevó a cabo de forma individual con cada uno de los participantes. Primeramente, se llevó a cabo una secuencia de enseñanza consistente en una instrucción sobre el uso y la

comprensión de los bloques que el robot es capaz de ejecutar, haciendo uso de las tarjetas de comandos y la caja de secuenciación. A continuación, se presentaron cuatro tareas de activación consistentes en llevar a *Bee-bot* desde una posición inicial a otra final (identificada con una flor) siguiendo un camino dado marcado en color rojo (Tabla 3). La forma de proceder del estudiante debía de ser la misma que la descrita para los problemas de la Tabla 1.

Tabla 3. *Tareas de activación administradas tras la fase de enseñanza y antes de los problemas*

Tareas de activación			
A01	A02	A03	A04
			

Finalmente, se administró la colección conformada por los cuatro problemas de la Tabla 1. Las sesiones se grabaron en vídeo y se transcribieron posteriormente a un protocolo escrito. Dado que se pretende observar la resolución de problemas, siguiendo las directrices de los estudios propios de este campo (Schoenfeld, 1985), se intentó que el grado de intervención de los investigadores fuera muy bajo. Sin embargo, no pudo ser inexistente, pues se tuvo que intervenir en las situaciones típicas asociadas al manejo de *Bee-bot* (por ejemplo, para recordar la necesidad borrar el plan previo en el robot, instrucción “CLEAR”) o para remediar la ausencia de comunicación o los diálogos inaudibles propios de los estudiantes de las etapas educativas involucradas.

RESULTADOS

Para el análisis de resultados se tuvieron en cuenta las variables de producto siguientes en relación a la resolución de los problemas de la Tabla 1:

- El número de intentos iniciados por el estudiante para resolver el problema (i).
- La complejidad del trayecto elegido ($elec$). Se conviene 0 para el trayecto menos complejo y 1 para el más complejo.
- Tasa de acierto hasta el primer error en el plan elaborado por el estudiante (t , en relación al trayecto seleccionado). Esta definición, que no es la propia del análisis de procesos de resolución de problemas, se considera así por las características del propio entorno tecnológico; pues el movimiento del robot se vuelve difícilmente interpretable o bien carente de sentido para el estudiante una vez *Bee-bot* ejecuta el primer bloque (del plan del estudiante) no coincidente con el trayecto seleccionado de los mostrados en el tablero. Esta variable se calcula como $t = C/n$, donde C es el número de bloques correctos hasta el primer error en el plan elaborado por el estudiante y n es el número total de bloques del trayecto elegido (mostrado en la Tabla 2). Con esta definición, la tasa de acierto toma valores $0 < t < 1$, siendo $t = 1$ el indicador de que el plan elaborado contiene todas las instrucciones necesarias para recorrer el trayecto seleccionado.

En la Tabla 4 podemos ver un ejemplo de cómo se ha procedido con la codificación de las variables de producto descritas.

Tabla 4. *Ejemplo de codificación según las variables descritas para este estudio*

<i>estudiante</i>	<i>problema</i>	<i>i</i>	<i>elec</i>	<i>plan trayecto</i>	<i>plan elaborado</i>	<i>n</i>	<i>C</i>	<i>t</i>
5-188	P02	1	1	[↑ < ↑ > ↑]	[↑ < ↑]	5	3	.600
		2	1	”	[↑ < ↑ ↑]	5	3	.600
		3*	1	”	[↑ ↑ < ↑]	5	1	.200
6-195	P03	1	1	[↑ ↑ < ↑ ↑ > ↑ ↑]	[↑ ↑ < < < ↑ ↑]	9	3	.333
		2	1	”	[↑ ↑ < ↑ ↑ ↑]	9	6	.667
		3	1	”	[↑ ↑ < ↑ ↑ ↑ ↑ ↑]	9	6	.667
		4**	0	[↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ < ↑ ↑]	[↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ < ↑ ↑]	9	9	1

Nota: * indica problema no abordado o abandonado por decisión del estudiante o de los investigadores. ** indica un cambio en la elección del trayecto a recorrer.

Los resultados resumidos se detallan en la Tabla 5 para los estudiantes del último curso de Ed. Infantil y en la Tabla 6 para los de primer curso de Ed. Primaria. Además, durante el proceso de resolución se realizaron anotaciones referentes a las variables de proceso derivadas de sus intervenciones verbales. Estas incluyen referencias a los heurísticos utilizados, comentarios sobre la dificultad experimentada o condicionantes sobre las decisiones tomadas por el estudiante al resolver la tarea.

Tabla 5. *Resultados correspondientes a la administración de los problemas P01 a P04 en estudiantes de último curso de Ed. Infantil*

<i>estudiante</i>	<i>P01</i>			<i>P02</i>			<i>P03</i>			<i>P04</i>		
	<i>i</i>	<i>elec</i>	<i>t</i>									
5-182	1	1	1	1	0	.833	1	1	1	1	1	1
				2	0	1						
5-184	1	0	1	1	1	.600	*			*		
	2	0	0	2*	1	.600						
5-185	1	0	.800	1	1	.600	1	1	.667	1	0	.455
	2	0	1	2	1	.200	2*	1	.667	2*	0	.636
				3**	0	.833						
				4	0	1						

5-186	1	1	.500	1	1	.400	1	1	.556	1	1	.091
	2	1	1	2	1	.600	2	1	.556	2	1	.091
				3*	1	.600	3*	1	.667	3	1	1
5-187	1	1	1	1	1	.600	1	0	1	1	0	1
				2**	0	1						
5-188	1	1	1	1	1	.600	1	0	1	1	1	.636
				2	1	.600				2	1	.545
				3*	1	.200				3	1	.545
										4	1	1
5-191	1	1	.500	1	1	.600	1	1	.222	*		
	2**	0	.800	2	1	.600	2**	0	.667			
	3	0	1	3**	0	1	3	0	.667			
							4	0	.556			
							5*	0	.667			

Nota: * indica problema no abordado o abandonado por decisión del estudiante o de los investigadores. ** indica un cambio en la elección del trayecto a recorrer.

Tabla 6. Resultados correspondientes a la administración de los problemas P01 a P04 en estudiantes de primer curso de Ed. Primaria

estudiante	P01			P02			P03			P04		
	<i>i</i>	<i>elec</i>	<i>t</i>									
6-193	1	1	1	1	1	.600	1	0	1	1	0	.909
				2**	0	1				2	0	.909
										3	0	1
6-194	1	0	1	1	0	1	1	1	.333	1	1	.182
							2**	0	.556	2** / *	0	.636
							3*	0	.556			
6-195	1	0	1	1	1	.400	1	1	.333	1	0	1
				2	0	1	2	1	.667			
							3	1	.667			

							4**	0	1			
6-197	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
6-198	1	1	.750	1	0	1	1	1	.333	1	0	.636
	2**	0	1				2* / **	0	.778	2*	0	.636
6-201	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	.182
										2	1	.545
										3	0	1

Nota: * indica problema no abordado o abandonado por decisión del estudiante o de los investigadores. ** indica un cambio en la elección del trayecto a recorrer.

DISCUSIÓN

Con respecto a la variable principal, la tasa de aciertos (t), podemos observar que la dificultad experimentada por los estudiantes en la resolución es acorde a la complejidad estructural con la que se han diseñado los problemas (Figura 4, izquierda); para ello basta obtener el valor medio de dicha tasa de éxito para cada uno de los problemas, observando el valor más alto en el problema $P01$ (menos complejo) y valores cada vez más bajos para los siguientes problemas (más complejos). Analizando los cálculos de la tasa de aciertos media por grupos (Figura 4, derecha) se observa como los estudiantes de Educación Primaria consiguen un mayor desempeño en los problemas administrados con respecto a los estudiantes de Educación Infantil. Este hecho era esperable, pues su nivel de desarrollo y de conocimientos relativos a la resolución de problemas se entiende, en general, como más amplio. El aumento de la tasa de aciertos por parte de los estudiantes de primaria en el problema $P04$ con respecto al $P03$ es debido a que la mayoría seleccionaron el *trayecto 0*, más sencillo, para la resolución (como se verá en la Figura 5). La Tabla 7 recoge los cálculos de la media de la tasa de aciertos (t) según problema, curso de los participantes y trayectoria elegida para resolver cada tarea.

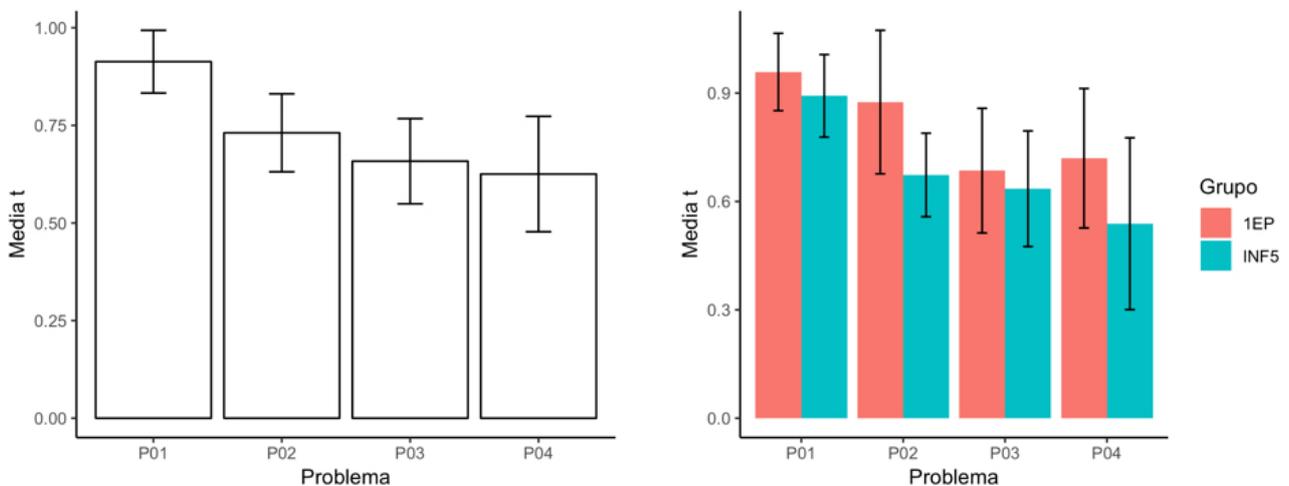


Figura 4. Izquierda: cálculo de la dificultad de los problemas administrados en base a la media de la tasa de aciertos (t) de toda la población. Derecha: tasa media de aciertos (t) por grupo

Tabla 7. Descriptivos del cálculo del valor medio de la tasa de aciertos en distintas muestras

Problema	Valor medio global	Valor medio por grupo (Figura 4 derecha)	Valor medio por trayecto elegido
P01	$t = .913$	INF5: $t = .892$	tr. 0: $t = .964$
		1EP: $t = .958$	tr. 1: $t = .844$
P02	$t = .731$	INF5: $t = .673$	tr. 0: $t = .972$
		1EP: $t = .875$	tr. 1: $t = .550$
P03	$t = .658$	INF5: $t = .635$	tr. 0: $t = .804$
		1EP: $t = .685$	tr. 1: $t = .556$
P04	$t = .625$	INF5: $t = .538$	tr. 0: $t = .818$
		1EP: $t = .720$	tr. 1: $t = .529$

Nota: todos los valores de t mostrados corresponden a medias calculadas a partir de los valores individuales de la tasa de aciertos (t) para cada uno de los intentos mostrados en las Tabla 5 y 6.

Si se analiza la variación del valor medio de la tasa de aciertos (t) en función del trayecto elegido por el estudiante se obtiene que, tomando en consideración ambos grupos, la resolución del problema resulta más exitosa cuando se toma el trayecto menos complejo (etiquetado como *trayecto 0*, ver Tabla 7 última columna). Este resultado coincide con la intuición de que una tarea menos compleja va a producir, a priori, mayor tasa de éxito cuando sea abordada por los estudiantes (considerados en su totalidad). Así mismo, del análisis de los resultados se deriva que los estudiantes de infantil realizan un número de intentos considerablemente mayor para la resolución de los mismos problemas con respecto a los estudiantes de primaria (Figura 5).

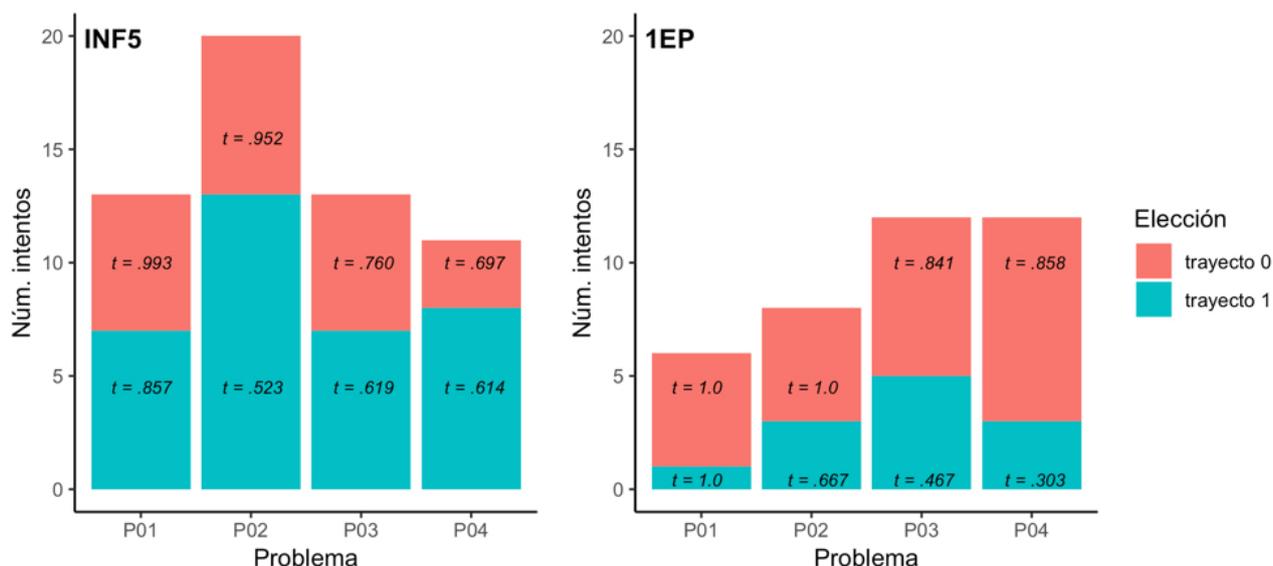


Figura 5. Número de intentos y trayecto seleccionado para cada conjunto de datos. Se adjunta el cálculo de la tasa de aciertos (t) por trayecto para infantil (izquierda) y primaria (derecha)

En relación a los trayectos elegidos (Figura 5), observamos que los estudiantes de infantil realizan, en proporción, más intentos en los caminos etiquetados como más complejos (*trayecto 1*, mostrados en verde). A pesar de ello, el valor medio de la tasa de aciertos correspondiente a los intentos realizados abordando el *trayecto 1* continúa siendo menor que la media de dicha tasa cuando el problema se aborda por el *trayecto 0* (como indican las tasas calculadas en la Figura 5). Para los estudiantes de primaria ocurre algo similar, con la particularidad de que el número de intentos realizados por el trayecto complejo es considerablemente menor (Figura 5, derecha).

Los resultados anteriores los podemos relacionar con los datos cualitativos recopilados durante la experimentación (Tabla 8), que nos indican que, en general, para los estudiantes del último curso de infantil la percepción de la dificultad y la toma de decisiones se basa esencialmente en factores relacionados con la distancia a la que está el objetivo, sin tener en cuenta otros factores como la sencillez del plan (*P01* 6-197), los conocimientos previos (*P01* 6-195) o el análisis de la situación problemática (*P03* 6-194, *P04* 5-187), como se muestra en la Tabla 8.

Tabla 8. Variables de proceso derivadas de las actuaciones de los estudiantes

Problema	ID	elec	Justificación elección
P01	5-187	1	“porque la flor está al lado”
	5-191	1	“he intentado ir a la flor que está más cerquita pero se me ha salido la abeja”
	6-194	0	“porque es más fácil”
	6-195	0	“porque esta [<i>trayecto 1</i>] no me la sé”
	6-197	0	“porque ahí [<i>trayecto 0</i>] solo tenía que ir para adelante y era más fácil”
P02	5-184	0	“porque ya lo he hecho”

	6-193	0	“porque en el otro [<i>trayecto I</i>] no sabía cómo girar”
	6-194	0	“porque también es más fácil y en el otro [<i>trayecto I</i>] tenía que girar”
<i>P03</i>	6-194	0	“pienso que es más fácil este [<i>trayecto 0</i>] porque era recto y luego hacía así [indica un giro con la mano] que es más fácil que hacer así [indica una “S” con la mano]”
<i>P04</i>	5-182	1	“porque es el que más cerca está”
	5-186	1	“porque es más corto; para llegar más pronto”
	5-187	0	“porque estaba recto y solo había que girar una vez; en el otro camino [<i>trayecto I</i>] había que girar dos veces y no me aclaraba a girar”
	5-188	1	“porque era el más corto”
	6-201	0	“porque ese [<i>trayecto I</i>] me costaba”

Destaca también el hecho de que los estudiantes de primaria muestren un mayor control y monitorización de la resolución, pues mayoritariamente seleccionan el trayecto sencillo (*trayecto 0*) para resolver los problemas (Figura 5, derecha), pese a tener las destrezas necesarias para resolver el trayecto más complejo (como se vio en las tareas de activación). Algunas anotaciones verbales de las mostradas en la Tabla 8, nos inclinan a pensar que tienen en cuenta un mayor abanico de factores implicados en el proceso de resolución de problemas, además de contar con un mayor conocimiento base.

CONCLUSIONES

Somos conscientes de que el tamaño de la población elegida para este estudio limita la generalización de los resultados obtenidos. No obstante, el presente trabajo nos ha permitido delimitar algunos campos de actuación para continuar investigando, en futuros experimentos, sobre los factores que tienen en cuenta en la toma de decisiones estudiantes de diferentes etapas educativas. En particular, aquellos factores relacionados con la gestión de la elección del trayecto y la evaluación previa de la complejidad de las vías de resolución de un problema.

En relación a los datos analizados, podemos concluir que la monitorización y evaluación de la complejidad de este tipo de problemas, no trabajados en la escuela, son mucho más eficientes en los estudiantes de primer curso de Educación Primaria, pues así lo muestran las tasas de éxito, el número de intentos y las elecciones de trayecto. Es muy interesante la forma de proceder que se ha puesto de manifiesto en los estudiantes de Educación Infantil pues, a la hora de realizar la elección del trayecto, no parecen poder evaluar la complejidad previamente a elaborar un plan de resolución. Se ha visto que en estos estudiantes el factor topológico de la distancia a la que se encuentra la flor-objetivo es crucial y determina la posterior actuación en la resolución del problema. Finalmente, hemos podido confeccionar un conjunto de tareas que constituyen verdaderos problemas matemáticos para estudiantes de primeras edades escolares, a la vez que les permiten iniciarse en las estructuras básicas de la programación secuencial y potenciar los procesos de toma de decisiones y el uso de heurísticos, como un paso más hacia la resolución de problemas.

En relación al trabajo futuro, esperamos poder desarrollar un entorno tecnológico que actúe como un sistema tutorial inteligente y que permita almacenar las acciones realizadas por el estudiante en cada una de las fases de la resolución de este tipo de problemas. Esto permitirá tener un mayor

conocimiento sobre la elaboración, modificación y evaluación de los planes a ejecutar, así como una rápida monitorización de los intentos y las tasas de éxito asociadas a la vía de resolución del estudiante. Con este entorno, se podrán abordar nuevas preguntas de investigación como, por ejemplo, si existen relaciones entre las tasas de éxito en la resolución de este tipo de problemas y los de enunciado verbal típicos de la escuela en primaria, el análisis y categorización del uso de heurísticos puestos en juego para resolver de problemas con *Bee-bot* en diferentes niveles educativos, o profundizar en el análisis de patrones en los protocolos verbales en aquellos estudiantes que resuelven con éxito este tipo de problemas.

AGRADECIMIENTOS

Este artículo es parte del proyecto de investigación EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE).

REFERENCIAS

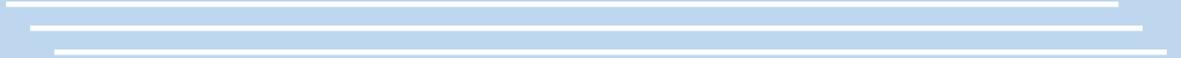
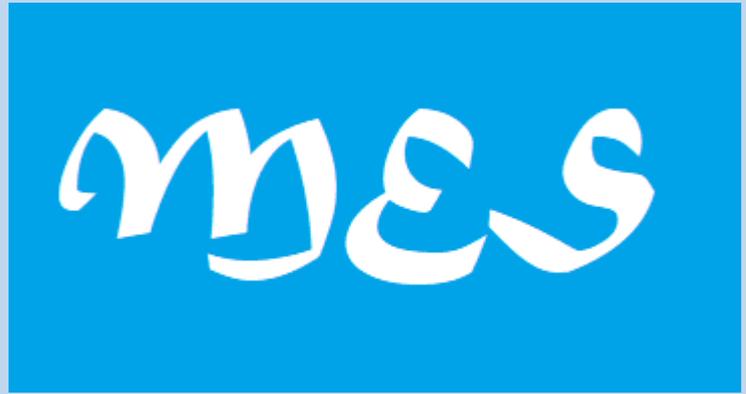
- Aldon, G., Hitt, F., Bazzini, L., y Gellert, U. (Eds.). (2017). *Mathematics and Technology*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-51380-5>
- Bers, M. U., Seddighin, S., y Sullivan, A. (2013). Ready for Robotics: Bringing Together the T and E of STEM in Early Childhood Teacher Education. *Journal of Technology and Teacher Education*, 21(3), 355–377.
- Brownell, W. A. (1942). Problem Solving. En N. B. Henry (Ed.), *The Psychology of Learning*. Chicago: University of Chicago Press.
- Chen, G., Shen, J., Barth-Cohen, L., Jiang, S., Huang, X., y Eltoukhy, M. (2017). Assessing elementary students' computational thinking in everyday reasoning and robotics programming. *Computers and Education*, 109, 162–175. <http://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.03.001>
- Clark-Wilson, A., Robutti, O., y Sinclair, N. (Eds.). (2014). *The Mathematics Teacher in the Digital Era. An International Perspective on Technology Focused Professional Development*. Dordrecht: Springer. <http://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1>
- Clements, D. H., y Sarama, J. (1997). Research on Logo: a decade of progress. *Computers in the Schools*, 14(1), 9–46. <http://doi.org/10.1300/J025v02n02>
- Cózar, R., y De Moya, M. del V. (Eds.). (2017). *Entornos humanos digitalizados: experiencias TIC en escenarios educativos*. Madrid: Síntesis.
- Diago, P. D., y Arnau, D. (2017). Pensamiento computacional y resolución de problemas en Educación Infantil: Una secuencia de enseñanza con el robot Bee-bot. En FESPM (Ed.), *Libro de actas VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM)* (pp. 255–263). Madrid, España.
- FECYT, Google, y Everis. (2016). *Educación en ciencias de la computación en España 2015*. Ministerio de Economía y Competitividad.
- Hoyles, C., y Lagrange, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain: The 17th ICMI Study*. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0>
- Hoyles, C., y Noss, R. (1992). *Learning Mathematics and Logo*. Cambridge: MIT Press.
- Kilpatrick, J. (1978). Variables and Methodologies in Research on Problem Solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Papers from a Research Workshop* (pp. 7–20). Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

- Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. En A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 1–15). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Merino-Armero, J. M., González-Calero, J. A., Cózar-Gutiérrez, R., y Villena-Taranilla, R. (2018). Computational Thinking Initiation. An experience with robots in Primary Education. *Journal of Research in Science, Mathematics and Technology Education*, 1(2), 181–206.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Papert, S. (1981). *Mindstorms - Children, Computers and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.
- Polya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Sabena, C. (2017). Task design in a paper and pencil and technological environment to promote inclusive learning: An example with polygonal numbers. En G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, y U. Gellert (Eds.), *Early Child Spatial Development: A Teaching Experiment with Programmable Robots* (pp. 13–30). Cham, Switzerland: Springer International Publishing. <http://doi.org/10.1007/978-3-319-51380-5>
- Sáez, J. M., y Cózar, R. (2017). Pensamiento computacional y programación visual por bloques en el aula de Primaria. *Educar*, 53(1), 129–146. <http://doi.org/dx.doi.org/10.5565/rev/educar.841>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press: Orlando, FL.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Strawhacker, A., y Bers, M. U. (2015). “I want my robot to look for food”: Comparing Kindergarten’s programming comprehension using tangible, graphic, and hybrid user interfaces. *International Journal of Technology and Design Education*, 25(3), 293–319. <http://doi.org/10.1007/s10798-014-9287-7>
- Weintrop, D., y Wilensky, U. (2015). To Block or not to Block, That is the Question: Students’ Perceptions of Blocks-based Programming. En *Proc. IDC ’15. ACM* (pp. 199–208). <http://doi.org/10.1145/2771839.2771860>
- Wing, J. M. (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33–35. <http://doi.org/10.1145/1118178.1118215>

Pascual D. Diago
Universitat de València, España
Pascual.Diago@uv.es

David Arnau
Universitat de València, España
David.Arnau@uv.es

José Antonio González-Calero
Universidad de Castilla – La Mancha, España
Jose.GonzalezCalero@uclm.es



Obra publicada con [Licencia Creative Commons Atribución 3.0 España](https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/es/)

