Matemáticas, Educación y Sociedad

ISSN: 2603-9982
Matemáticas, Educación y Sociedad
http://mesjournal.es/
editor@mesjournal.es

MES

Vol 2 No 1 (2019):

Matemáticas, Educación y Sociedad

Maraví Zavaleta, L. (2019). Los *números complejos* en el texto sobre aritmética de G.M. Bruño. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 2*(1), pp. 1-11

ISSN: 2603-9982

LOS *NÚMEROS COMPLEJOS* EN EL TEXTO SOBRE ARITMÉTICA DE G. M. BRUÑO

Luis Maraví Zavaleta, Institución Educativa "Miguel Grau Seminario", Perú

Resumen

Durante una parte del siglo veinte fue usado en Latinoamérica el texto Aritmética, curso superior*, bajo la firma de G. M. Bruño. Aquí, la noción* número complejo *apareció como un tipo de número concreto, un hecho que también es observado en otros textos contemporáneos. Así, este artículo muestra una aproximación a las raíces sociohistóricas de tal noción y una descripción del enfoque didáctico relacionado a su enseñanza. Para lograr estos objetivos fueron empleados algunos recursos provenientes del análisis de contenido. Como resultado, se ha establecido los vínculos entre necesidades prácticas y enseñanza de los* números complejos *bajo una orientación didáctica determinada.*

Palabras clave: *aritmética, historia, didáctica, números complejos*

Compound numbers in G. M. Bruño's Arithmetic textbook

Abstract

During a part of the twentieth century was used in Latin America the textbook Advanced Arithmetic*, under the signature of G. M. Bruño. Here, the notion* compound number *appeared like a type of* concrete number*, a fact is also seen in other contemporary textbooks. Therefore, this paper shows an approach to sociohistorical roots of that notion and a description of the didactical point of view related to its teaching. To achieve these aims, some resources based on content analysis were used. As a result, it has established the nexuses between practical needs and teaching of* compound numbers *under a didactical orientation.*

Keywords: *Arithmetics, history, teaching, compound numbers*

Recibido: 12/02/2019; Aceptado: 03/05/2018

INTRODUCCIÓN

Los libros de texto constituyen para los historiadores una fuente importante para el estudio, entre otros aspectos, del lenguaje empleado en las ciencias o de la aparición y transformación de un concepto (Choppin, 2002; Maz, 2009), del estado del conocimiento científico en determinada época (Maz y Rico, 2009) así como del papel de los libros en la labor de enseñanza (Andrade y Oliveira, 2011). Estos rasgos son claramente apreciados en el libro de texto intitulado *Aritmética, curso superior* escrito por Bruño (s. f.), cuya elección para el presente trabajo se fundamenta en que sirvió como fuente influyente para la enseñanza de matemáticas entre finales del siglo XIX y mediados del siglo XX en varios países hispanoparlantes de América Latina (Alzate, Gómez y Romero, 2012; Gómez y Puig, 2018). En particular, se observa en el libro mencionado que el concepto llamado *número complejo* o *número denominado*, es presentado y empleado en diferentes operaciones y problemas, en forma similar a lo que indican evidencias provenientes de textos contemporáneos de otros países (Gussi, 2011; De Carvalho, 2014) y con un contenido diferente a lo que, en la actualidad, se comprende por número complejo.

Basado en las reflexiones anteriores, algunas interrogantes podrían ser planteadas con el propósito de descubrir cómo el concepto mencionado en el texto de Bruño (s. f.) fue originado y cómo esta concepción habría influido en la enseñanza de las matemáticas durante la época en la que fue utilizado como principal fuente de dicha tarea. Así, la presente investigación, de carácter didáctico descriptivo y exploratorio, persigue aproximarse a las condiciones histórico-matemáticas de emergencia del *número complejo* en el sentido propuesto por Bruño (s. f.). Así mismo, otro objetivo supone el estudio de las implicaciones didácticas de la enseñanza de la matemática que la concepción de Bruño habría manifestado en el contexto histórico del referido texto.

De otro lado, nuestro trabajo mostrará la evolución del *número complejo*, su relación con operaciones de medición en diferentes épocas (Aleksandrov, 1973; Díez, 1997; Karpinski, 1925; Freudenthal y McLaughlin, 2009; Smith, 1925), así como las posibles relaciones de aquellos períodos con las tendencias bajo las cuales Bruño fue formado y escribió sus trabajos (Alzate, Gómez y Romero, 2012; Gispert, 2014). Este análisis será guiado por algunos elementos metodológicos expuestos en Schubring (1987), como el análisis del texto y su contexto.

Finalmente, habrá una reflexión sobre el aspecto didáctico que el *número complejo* habría tenido para la enseñanza de las matemáticas de la época. Este aspecto será abordado a partir de los elementos metodológicos sugeridos en Picado (2012) y Picado, Rico y Gómez (2017) debido a sus contribuciones en el análisis de antiguos libros de texto.

MARCO HISTÓRICO PARA EL SURGIMIENTO Y USO DE LOS *NÚMEROS COMPLEJOS*

Este trabajo sostiene que el *número complejo*, tal como es mostrado en Bruño (s. f.), posee su origen en las necesidades prácticas del periodo en el que dicha noción surgió. Dichas necesidades fueron consideradas a partir de y a través de la obra educativa realizada por la Congregación de Los Hermanos de las Escuelas Cristianas de La Salle (en lo sucesivo, escuelas lasalianas), institución católica en cuyo seno se desenvolvió la actividad intelectual de G. M. Bruño. Para apoyar esta afirmación, se examinarán las características de las necesidades mencionadas y la forma en que estas habrían influido en las escuelas lasalianas, de las que además G. M. Bruño fue Superior.

El origen de la noción de *número complejo*

El empleo de los *números complejos* tendría sus raíces en condiciones sociohistóricas relacionadas con la medición y las actividades mercantiles, así como en la actividad de enseñanza. Esto se afirma a partir de la clasificación de números usada por Bruño (s. f.), donde las nociones de número concreto y número abstracto son diferentes en función del criterio de tener o no tener cierta unidad de medida, respectivamente. Precisamente, en la primera clase mencionada, Bruño (s. f.) indica que un *número complejo* "[…] es el que consta de varias partes que se refieren respectivamente a unidades de diferentes especies, pero de un mismo género, y cuyo sistema de numeración no es decimal. V. g.: cuatro días seis horas cinco minutos" (p. 6).

La definición anterior reforzaría una postura como la de Ribnikov (1984), quien señala que el origen de los números, generalmente, "[…] es una consecuencia de la necesidad práctica de contar objetos" (p. 20). Una afirmación similar es sostenida por Karpinski (1925), quien indica que pesar y medir habrían sido las primeras formas de uso de los números, a partir de la numerosa evidencia histórica existente. Los nexos históricos descritos permitirían, además, comprender por qué los *números complejos* y los cálculos con ellos son estudiados en Bruño (s. f.) junto a tópicos sobre medidas y dinero. Sin embargo, los mencionados cálculos tenían dificultades, como en la multiplicación (Schubring, 2002). Dichas dificultades terminarían, de acuerdo con Schubring (2002), hacia los primeros años del siglo diecinueve, cuando las nociones de número y magnitud fueron separadas. De esta forma, durante la enseñanza, los números se volvieron el primer tópico a estudiar, mientras las magnitudes se reservaron para los temas subsiguientes (Schubring, 2002). Tales hechos no solo ilustran la relación histórica entre *número complejo* y la actividad práctica de medida, sino también la ligazón con la actividad de enseñanza.

Para confirmar la última característica indicada por nosotros, Smith (1925) señala que la división entre números concretos y abstractos surgió en el siglo XVI, de la mano de autores de libros de texto destinados a la enseñanza elemental. En la misma línea, Smith (1925) muestra otros términos para indicar la tipificación de números, como la registrada entre absolutos y denominados. Este último término correspondería con los números concretos tal cual son encontrados en Bruño (s. f.). De hecho, los números denominados y los cálculos con ellos se habrían desarrollado durante la enseñanza de la aritmética mercantil en el siglo XVI. Dichas nociones fueron completamente útiles hasta los primeros años del siglo XX (Jackson, 1906; Swetz, 1992). Sin embargo, las relaciones entre expresiones como *número complejo* y *compound number* son más visibles. Así, una búsqueda en internet nos brindó la siguiente definición para *número complejo*: "1.a quantity expressed in two or more different but related units: 3 hours 10 seconds is a compound number" [cantidad expresada en dos o más unidades, diferentes pero relacionadas: 3 horas, 10 segundos es un número complejo] (Compound number, s. f., s.p.)

La definición anterior indicaría que el *número complejo* y *compound number* son una sola noción. Como uno de los fundamentos para esta afirmación ha sido observado que en Brasil se empleó un texto escolar durante el siglo XIX en el que el término *número complexo* coincidiría con *compound number* (Gussi, 2011; De Carvalho, 2014). Además, la evidencia mostraría el rol jugado por los *números complejos* en los libros de texto en una época tan tardía como el siglo XIX.

Hay una tercera faceta que probaría la conexión entre los *números complejos* y la actividad práctica. Esta faceta está relacionada con las condiciones sociohistóricas del período de la historia europea donde tal noción surgió. En el siglo XVI, de acuerdo a Hessen (citado en Freudenthal y McLaughlin, 2009): "The dazzling flowering of natural science during the 16th and 17th centuries resulted from the disintegration of the feudal economy, the development of merchant capital, of international maritime relations and of heavy (mining and metallurgical) industry". (p. 44) [El resplandeciente florecimiento de las ciencias naturales durante los siglos XVI y XVII provinieron de la desintegración de la economía feudal, el desarrollo del capital mercantil, de las relaciones marítimas internacionales y de la industria pesada (minera y metalúrgica).]

Tal desarrollo científico no habría sido posible sin el correspondiente desarrollo matemático. Las actividades mencionadas habrían generado incremento en la investigación de tópicos vinculados a la medida, tal como Meskens (2013) observa en el caso de la relación entre las prácticas mercantil-monetarias y los libros de texto de aritmética elaborados en el puerto de Antwerp (Bélgica) durante el siglo XVI. Estas relaciones no son poco importantes, pues Ellerton y Clements (2012) aseveran que, precisamente, hacia los últimos años de tal siglo, dentro de las comunidades europeas de mercaderes, los números complejos habían alcanzado a expresarse mediante cifras indoarábigas. Este hecho no solo fue ventajoso para los mercaderes, sino que también habría sido un evento decisivo para difundir tal tipo de numeración en toda Europa. Por eso, las mencionadas actividades económicas, relacionadas con las necesidades sociales y, también, con el período histórico en el que ellas fueron desarrolladas habrían permitido y difundido la utilidad de los números complejos más allá del siglo XVI.

La educación lasaliana y el lugar de G. M. Bruño en el estudio del *número complejo*

Nuestro trabajo también postula que las necesidades prácticas previamente mencionadas se habrían combinado con rasgos propios del quehacer de las escuelas lasalianas para generar la permanencia de la noción de *número complejo* en los libros de texto firmados por G. M. Bruño. Para desarrollar estas ideas, analizaremos las características del trabajo educacional de las escuelas lasalianas, la relación de G. M. Bruño con ellas, y los factores sociohistóricos comunes a ambas dimensiones.

Entre los aspectos sociales e históricos que influyeron en el trabajo de Bruño, es necesario mencionar la tendencia hacia la labor educacional de la orden religiosa a la que él se encontraba vinculado. En efecto, las escuelas lasalianas, de acuerdo con Abbagnano y Visalberghi (1964) estuvieron inscritas dentro de la renovación pedagógica del siglo XVII, durante el desarrollo de la industria y la burguesía. Esta corriente requería una fuerza de trabajo calificada para trabajar en forma colectiva (Ponce, 1972). Como Abbagnano y Vissalberghi (1964) también indican, las escuelas lasalianas "[…] no se limitaron únicamente a los rudimentos y llegaron a enseñar uno o más oficios" (p. 313). Esta afirmación coincide con Alzate, Gómez y Romero (2012), quienes observaron que las mencionadas escuelas no fueron ajenas a las necesidades formativo-laborales de la juventud pobre de su época. Además, los mencionados autores señalan que las actividades educativas esperaban "[…] formar buenos obreros cristianos" (pp. 5-6). De esta forma, el propósito evangelizador conectado a las necesidades juveniles permitiría explicar el nexo entre la congregación religiosa y la formación laboral del mencionado sector social.

Otro factor sociohistórico relacionado con la actividad educacional de G. M. Bruño fue la influencia familiar recibida. De acuerdo con Alzate, Gómez y Romero (2012), Gabriel-Marie Brunhes, el nombre original del autor del libro de texto utilizado en nuestro trabajo nació el 16 de noviembre de 1834, en la ciudad francesa de Aurillac. Su padre fue jefe de taller de carpintería y sus hermanos sobresalieron en ciencias. En 1850 Brunhes decidió seguir la carrera eclesiástica dentro de los Hermanos de La Salle. En esta orden, él llevó a cabo importantes tareas relacionadas a la enseñanza de las ciencias. Luego, los ejemplos familiares se habrían combinado con las tradiciones lasalianas durante la producción, corrección y difusión de los textos, actividades a su cargo durante bastante tiempo.

Sobre el último rasgo mencionado, durante muchos años el Hermano Brunhes preparó, corrigió y amplió textos sobre Física, Geometría, Mecánica y Agrimensura, los que fueron empleados en la enseñanza elemental y superior de las escuelas francesas y españolas (Alzate, Gómez y Romero, 2012). Primero, esta tarea fue emprendida de forma personal; luego, ya en forma institucional, cuando él asumió un cargo dentro de la orden, por 1885. Es necesario indicar que en aquel tiempo los libros de texto no eran firmados por su autor, sino por el superior de la orden lasaliana (Alzate, Gómez y Romero, 2012). De este modo, Brunhes solo pudo firmar sus propios textos después de 1897, cuando él fue elegido superior. La amplia difusión de los textos producidos por la congregación lasaliana, antes o después de que Brunhes asumiese la autoridad suprema en ella, evidenciaría, una vez más, la falta de aislamiento entre el contenido de los libros y la sociedad de la época.

Otra manera en la que se muestra el vínculo anteriormente mencionado se refiere a las políticas educativas desarrolladas en Francia durante los últimos años del siglo XIX y los primeros años del siglo XX. La labor de la orden lasaliana se difundiría más ampliamente debido a una circunstancia dramática. De acuerdo con Alzate, Gómez y Romero (2012) en aquel período, el gobierno francés decidió asumir la administración de hospitales y escuelas que eran manejados por órdenes religiosas. De este modo comenzó la separación del Estado y la Iglesia (Luzuriaga, 1967). Dado que la congregación lasaliana no estaba autorizada por ley, cientos de escuelas fueron cerradas, los bienes fueron incautados y muchos sacerdotes fueron secularizados. El superior Brunhes tuvo que enfrentar esta dura situación y escogió enviar numerosos integrantes de la orden hacia diferentes partes del mundo, incluyendo Latinoamérica, donde ya existían varias escuelas pertenecientes a la congregación lasaliana (García, 2008; Ocampo, 2011).

Finalmente, es necesario indicar que después de la migración, una nueva historia comenzó, cuando textos lasalianas firmados por Brunhes aparecieron rubricados bajo la forma española *Bruño*. Esta denominación se mantuvo, aún muchos años después de la desaparición física de Brunhes, hasta la mitad del siglo XX, junto con otra menos personalizada: *por una reunión de profesores* (Alzate, Gómez y Romero, 2012). Los hechos expuestos, no solo mostrarían la relación entre época, difusión y continuidad de los textos de Bruño en Latinoamérica, sino que confirmarían lo afirmado por Schubring (1987), quien postula el significado institucional-colectivo de los textos de aquella época.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este apartado, se describe el texto objeto de estudio, con énfasis en aquella parte que aborda el *número complejo*. Luego, como ya se indicó, para el análisis didáctico se emplean elementos provenientes de las propuestas metodológicas de Picado (2012) y Picado, Rico y Gómez (2017) debido a sus contribuciones en el análisis de antiguos libros de texto. En ese sentido, para el estudio del libro de Bruño (s. f.), primero se realizó la *caracterización del autor* (que fue desarrollada en el apartado anterior), mediante su nombre completo, el registro de su profesión, sitio de formación, vínculo con personas o instituciones significativas para las matemáticas, obras publicadas e información adicional. Luego, en forma breve, se anotaron tópicos relacionados con la *caracterización de la estructura*, tales como el año y edición. Finalmente, para la *caracterización del contenido* se registraron los conceptos y procedimientos empleados, tipos de representación, contextos considerados, limitaciones para el aprendizaje y tareas. Las dos últimas caracterizaciones se consideran en el siguiente apartado.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Descripción del contenido del texto en su relación con el *número complejo*

Tal como se indica en la Figura 1, *Aritmética, curso superior* fue un libro de texto perteneciente a la sexta edición revisada por Editorial Bruño en Lima (Perú), pero con fecha desconocida. Es posible que este libro no haya sido escrito por G. M. Brunhes pues, de acuerdo con Alzate, Gómez y Romero (2012), ningún texto intitulado en esa forma es mencionado entre los otros que sí fueron listados en la nota necrológica del autor. Sin embargo, los autores mencionados indican un texto homónimo producido por Editorial Bedout en Medellín (Colombia), en 1944. Esto constituiría un caso de permanencia de autor como política editorial, característica observada por Schubring (1987) para los textos de la época.

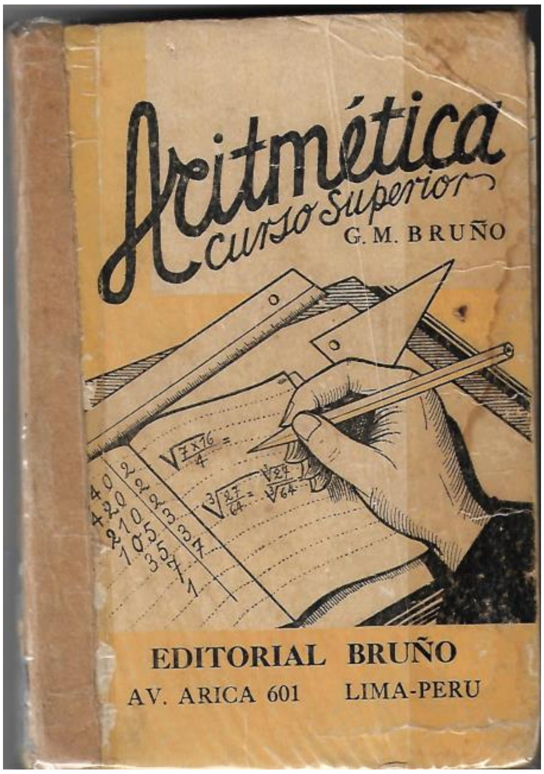
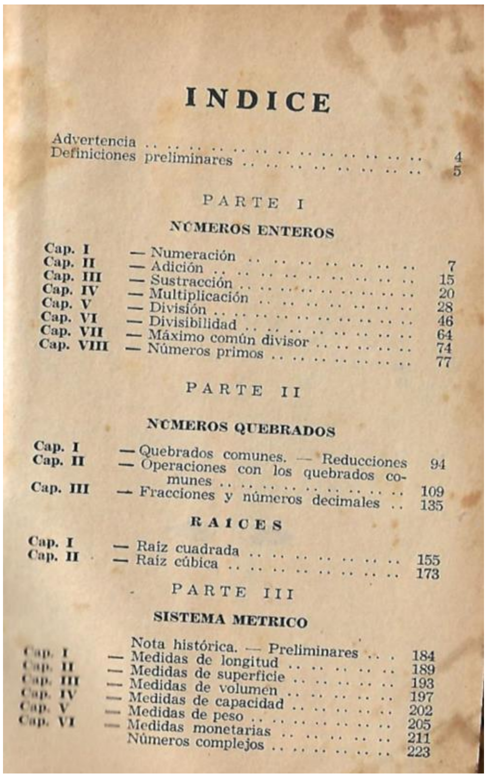


Figura 1. Portada de *Aritmética, curso superior*

En el libro, el estudio de los *números complejos* fue considerado en la parte III, dentro del estudio de los temas pertenecientes al sistema métrico decimal. Esto puede ser observado en el índice (Figura 2).



INDICE

Figura 2. Índice de *Aritmética, curso superior.*

De acuerdo al orden de los capítulos mostrado en la Figura 2, se cree que el estudiante habría arribado a los *números complejos* después de haber estudiado nociones y después de resolver problemas sobre longitud, área, volumen, capacidad, peso y unidades monetarias. Luego de lo anterior, el estudiante debería resolver muchos ejercicios y problemas. En el capítulo dedicado a los *números complejos* pueden ser observadas cuatro partes, cuyo esquema se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. *Partes del capítulo dedicadas a los* números complejos *en* Aritmética, curso superior.

PARTES	I	II	III	IV
Tema	Nociones generales (pp. 223-225)	Transformaciones de los números complejos (pp. 225-227)	Operaciones con los números complejos (pp. 227-232)	Correspondencia de las medidas métricas con las antiguas medidas (pp. 232-235)
Contenidos	401. Definición 402. Medida del tiempo 403. División de la circunferencia 404. División centesimal	405. Primer transformación 406. Nota 407. Regla 408. Segunda transformación 409. Regla	Adición (410) 411. Regla Sustracción (412) 413. Regla Multiplicación (414) 415. Regla 416. Nota División (417) 418. Regla 419. Notas	•Medidas de longitud •Medidas agrarias y de superficie •Medidas de volumen •Medidas de capacidad (para áridos y líquidos) •Medidas de peso (ordinarias, para el aceite, farmacias, oro, plata y piedras preciosas) •Relación entre la vara, el metro y la yarda

Al inicio del texto Bruño (s. f.) brinda definiciones previas de Aritmética, magnitud, número y cantidad. Precisamente, él considera a los *números complejos* dentro de aquellas nociones y enuncia sus características en el capítulo ya indicado, bajo la siguiente afirmación:

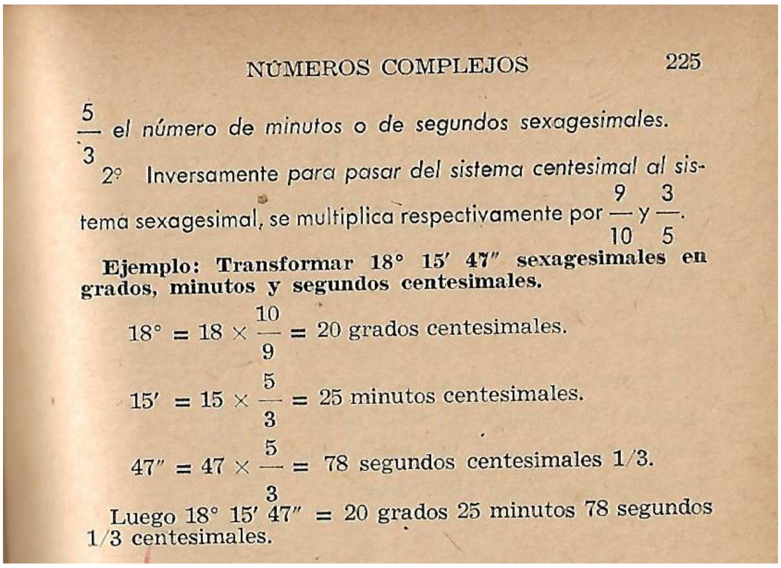
> Los números complejos se emplean en los pesos y medidas de los países que aún no han adoptado el sistema métrico, y sobre todo en la medida del tiempo, y en la división de la circunferencia y valuación de los ángulos (Bruño, s. f., p. 224).

La cita anterior evidencia los nexos con la nota histórica expuesta por Bruño (s. f.) acerca de la etapa anterior al surgimiento del estudio del sistema métrico decimal. Esta nota describe la variedad de unidades de medida en aquel momento y cómo la mencionada situación complicaba los negocios y operaciones relacionados con ellos. Este rasgo también denota las necesidades prácticas bajo las que fue escrito el texto.

Enfoque didáctico adoptado por el libro de texto

En este apartado es necesario indicar el rol jugado por los ejemplos, los problemas y la naturaleza de los contenidos. En relación con los ejemplos, es observado que ellos son usados en las partes I y II para mostrar una regla (por ejemplo, en la p. 225) o una nota, como en la parte IV. Este hecho coincidiría con el rol mencionado por Sinclair, Watson, Zazkis y Mason (2011). Estos autores indican: "[…] a mathematical example can be an instance of a mathematical class with specified properties, a worked solution to a problem, an instance of a theorem or method of reasoning" [un ejemplo matemático puede ser un caso de una clase matemática con propiedades específicas, una solución elaborada frente a un problema, un ejemplo de teorema o método de razonamiento] (p. 292).

La Figura 3 muestra un ejemplo perteneciente a la p. 225 de Bruño (s. f.).



NÚMEROS COMPLEJOS 225

$\frac{5}{3}$ *el número de minutos o de segundos sexagesimales.*

2º Inversamente para pasar del sistema centesimal al sistema sexagesimal, se multiplica respectivamente por $\frac{9}{10}$ *y* $\frac{3}{5}$.

Ejemplo: Transformar 18° 15′ 47″ sexagesimales en grados, minutos y segundos centesimales.

$18° = 18 \times \frac{10}{9} =$ 20 grados centesimales.

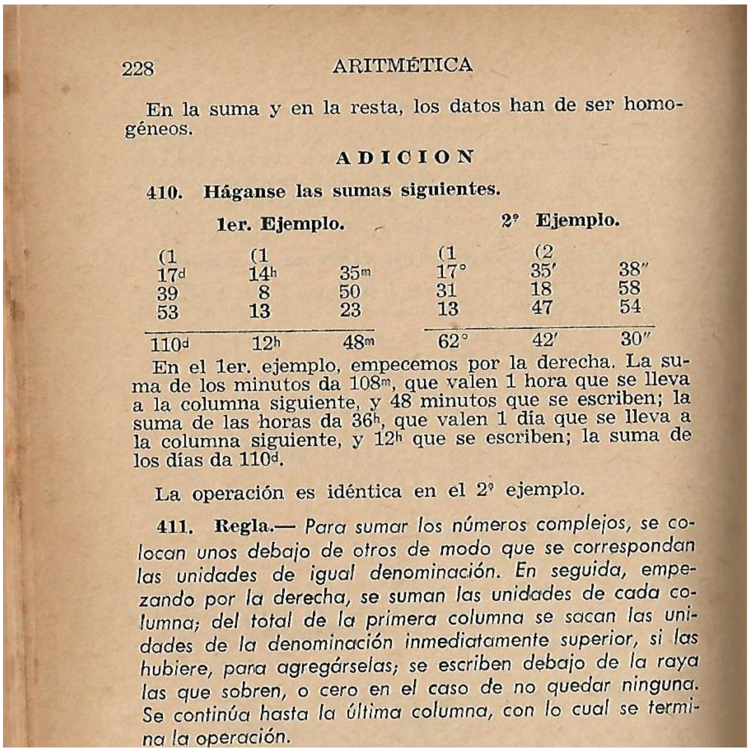
$15' = 15 \times \frac{5}{3} =$ 25 minutos centesimales.

$47'' = 47 \times \frac{5}{3} =$ 78 segundos centesimales 1/3.

Luego 18° 15′ 47″ = 20 grados 25 minutos 78 segundos 1/3 centesimales.

Figura 3. Ejemplo mostrado en la p. 225 de *Aritmética, curso superior*.

Sin embargo, durante el estudio de las operaciones con números complejos, puede observarse la presencia de un caso particular antes de enunciar la regla (por ejemplo, en la p. 228, Figura 4). Este hecho denotaría un intento del autor por iniciar un proceso vinculado a la inducción.



228 ARITMÉTICA

En la suma y en la resta, los datos han de ser homogéneos.

ADICION

410. Háganse las sumas siguientes.

1er. Ejemplo.			2º Ejemplo.		
(1	(1		(1	(2	
17^d	14^h	35^m	17°	35′	38″
39	8	50	31	18	58
53	13	23	13	47	54
110^d	12^h	48^m	62°	42′	30″

En el 1er. ejemplo, empecemos por la derecha. La suma de los minutos da 108^m, que valen 1 hora que se lleva a la columna siguiente, y 48 minutos que se escriben; la suma de las horas da 36^h, que valen 1 día que se lleva a la columna siguiente, y 12^h que se escriben; la suma de los días da 110^d.

La operación es idéntica en el 2º ejemplo.

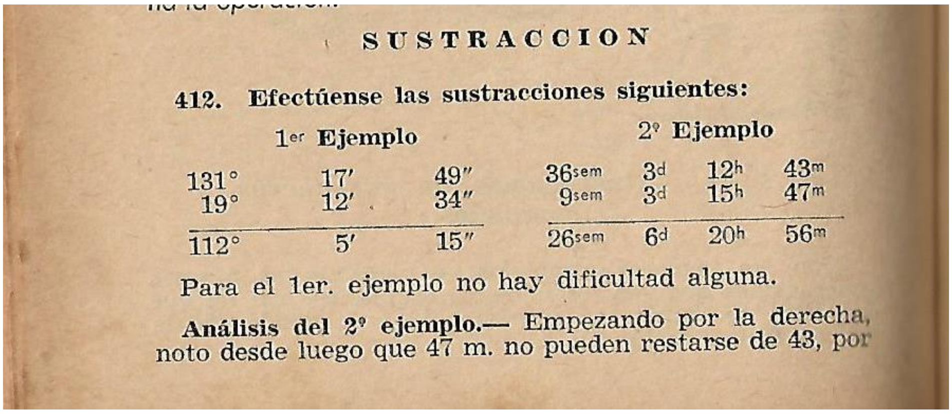
411. Regla.— *Para sumar los números complejos, se colocan unos debajo de otros de modo que se correspondan las unidades de igual denominación. En seguida, empezando por la derecha, se suman las unidades de cada columna; del total de la primera columna se sacan las unidades de la denominación inmediatamente superior, si las hubiere, para agregárselas; se escriben debajo de la raya las que sobren, o cero en el caso de no quedar ninguna. Se continúa hasta la última columna, con lo cual se termina la operación.*

Figura 4. Ejemplo mostrado en la p. 228 de *Aritmética, curso superior*

Otra faceta en el enfoque didáctico está referida a los problemas. Se observa que en relación con ellos, sus contenidos abordan operaciones con números complejos relacionados a las unidades de tiempo y, en menor cantidad, con unidades de longitud. A este respecto, es necesario enfatizar el rol jugado por los problemas. Este asunto es advertido en la sección inicial del texto: “A estos ejercicios siguen unos 1100 problemas que juntos con más de 200 de recapitulación, clasificados por géneros, no dudamos serán de suma utilidad para los jóvenes, proporcionándoles abundante material para tareas escritas” (Bruño, s. f., s. p.).

La cita anterior mostraría un propósito normado por el siguiente principio: a mayor repetición, mayor progreso académico. Sostenemos esta afirmación en base a lo afirmado por Romero, Alzate y Gómez (2015), quienes señalan que hacer (resolver) ejercicios matemáticos era una de las bases de la educación lasaliana.

No obstante, también hay dificultades. Por ejemplo, entre aquellas reconocidas por el autor, se encontraría una en el segundo ejemplo sobre la sustracción de números complejos (Figura 5).



SUSTRACCION

412. Efectúense las sustracciones siguientes:

1er Ejemplo			2º Ejemplo			
131°	17′	49″	36^{sem}	3^{d}	12^{h}	43^{m}
19°	12′	34″	9^{sem}	3^{d}	15^{h}	47^{m}
112°	5′	15″	26^{sem}	6^{d}	20^{h}	56^{m}

Para el 1er. ejemplo no hay dificultad alguna.

Análisis del 2º ejemplo.— Empezando por la derecha, noto desde luego que 47 m. no pueden restarse de 43, por

Figura 5. Ejemplo mostrado en la p. 228 de *Aritmética, curso superior*

Como es observado en la Figura 5 y es explicado por el autor, en el segundo ejemplo no se puede quitar 47 minutos de 43 minutos. Para superar este problema, se cambia una hora en minutos, los que son añadidos a los 43. El mismo proceso es seguido para restar 15 horas de 11 horas: se transforma 1 día en horas y así sucesivamente.

Además, se observa que el principal sistema de representación empleado por el autor tiene naturaleza verbal, ya que la mayoría de las nociones, reglas, notas y ejercicios son mostrados en palabras. Mientras que, para mostrar ejemplos y ejercicios, se emplea la representación numérica.

Por último, pero no menos importante, se advierte que la mayoría de los contenidos, ejercicios y problemas fueron relacionados con la medida del tiempo y, en pocos casos, con la medida de la longitud o del peso. Este hecho coincide con lo afirmado por Bruño (s. f.) acerca de la utilidad de los números complejos. Por consiguiente, de acuerdo con Romero, Alzate y Gómez (2015), los textos de Bruño "[…] desarrollan un conjunto de procedimientos –didácticos o metodológicos- cuyo fin es la apropiación del saber disciplinar por parte del usuario del libro" (p. 79).

Así, con un propósito basado sobre una necesidad práctica –comercio, medición, etc.-, una perspectiva disciplinar y muchos ejemplos y ejercicios, los *números complejos* fueron estudiados en el texto de G. M. Bruño.

CONCLUSIONES

La principal contribución de este trabajo consiste en mostrar la forma en que el concepto de *número complejo* era abordado en un antiguo texto para la enseñanza de las matemáticas, desde los aspectos didáctico y de la propia ciencia objeto de estudio. En esa dirección, y en base a los hechos anteriormente mencionados, se considera que la emergencia de los *números complejos o denominados* está relacionada con las necesidades prácticas de medición, comercio y enseñanza escolar, en el contexto de desarrollo científico vivido durante los siglos XVI y XVII. Estos rasgos se combinaron con el rol educativo jugado por la congregación lasaliana y G. M. Brunhes dentro de ella durante los últimos años del siglo XIX. La publicación de textos aritméticos bajo la forma españolizada de G. M. Bruño en Latinoamérica, aun cuando el autor ya había fallecido, no cortó el lazo entre las necesidades prácticas y la permanencia de los *números complejos* dentro de dichos textos.

Además, sobre el análisis didáctico, salta a la vista la variedad de ejemplos y ejercicios que el texto presenta. Este hecho habría tenido el objetivo de conseguir mejores resultados mediante la práctica repetitiva. Asís mismo, los deberes planteados al estudiante consideraron hechos relacionados con la medida del tiempo en la mayoría de los casos y estuvieron orientados por un perfil didáctico disciplinario.

Finalmente, consideramos que una investigación más profunda acerca del enfoque didáctico podría considerar la investigación de testimonios acerca de cómo se desarrollaban las clases sobre *números complejos* con el libro de texto, así como los posibles conflictos que tal estudio habría tenido con el concepto actual de número complejo. Otra posible línea de investigación podría comparar el tratamiento dado al referido tipo de números en otros textos, contemporáneos al de Bruño (s. f.).

REFERENCIAS

Abbagnano, N. y Visalberghi, A. (1964). *Historia de la pedagogía*. México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Aleksandrov, A. D. (1973). Visión general de la matemática. En *La matemática, su contenido, métodos y significado*, pp. 17-89. Madrid, España: Alianza.

Andrade, M. y Oliveira, F. (2011). A análise de textos didáticos en História da Educação Matemática. En Matos, J. y Saraiva, M. (Eds.). *Actas do I Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática*, pp. 110 – 120.

Alzate, M., Gómez, M. y Romero, F. (2012). *G. M. Bruño. La edición escolar en Colombia 1900-1930*. Bogotá, Colombia: Ecoe.

Bruño, G. (s. f.). *Aritmética, curso superior*. Lima, Perú: Bruño.

Choppin, A. (2002). O historiador e o livro escolar. *História da Educação, 11*(6): 5-24.

Compound number (s. f.). En Collins English Dictionary - Complete & Unabridged (10th ed.) Retrieved from http://www.dictionary.com/browse/compound-number

De Carvalho, J. B. P. (2014). Mathematics Education in Latin American. En Karp, A. y Schubring, G. (Eds.). *Handbook on the History of Mathematics Education*, pp. 335-359. New York, NY: Springer.

Díez, J. (1997). A Hundred Years of Numbers. An Historical Introduction to Measurement Theory 1887-1990. *Studies in History and Philosophy of Science, 28* (1): 167-185.

Ellerton, N. y Clements, M. (2012). *Rewriting the History of School Mathematics in North America 1607-1861, The Central Role of Cyphering Books*. New York, NY: Springer.

Freudenthal, G. y McLaughlin, P. (2009) (Eds.). *The Social and Economic Roots of the Scientific Revolution. Texts by Boris Hessen and Henryk Grossmann*. New York, NY: Springer.

García, E. (2008). *Aportes de La Salle a la Educación en América Latina. Simposio Historia y Pensamiento Educacional Latinoamericano*. Universidad de Santiago de Chile, Chile: s. p.

Gispert, H. (2014). Mathematics Education in France: 1800-1980. En Karp, A. y Schubring, G. (Eds.). *Handbook on the History of Mathematics Education*, pp. 229-240. New York, NY: Springer.

Gómez, B. y Puig, L. (2018). Los problemas descriptivos de fracciones en los “Solucionarios” de Bruño y Dalmau. En Carrillo, D., Sánchez, E., Matos, J., Moreno, P. y Rodrigues, W. (Eds.). *Actas del IV Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática*, pp. 102-112.

Gussi, J. (2011). O ensino da matemática no Brasil: Análise dos programas do ensino do Colégio Pedro II (1837 a 1931) (Doctoral dissertation). Universidade Metodista de Piracicaba,

Piracicaba, SP.

Jackson, L. (1906). *The Educational Significance of Sixteenth Century Arithmetic: from the point of view of the present time* (Doctoral dissertation). Columbia University, New York, NY.

Karpinski, L. (1925). *The History of Arithmetic*. New York, NY: Rand McNally.

Luzuriaga, L. (1967). *Historia de la Educación y de la Pedagogía*. Buenos Aires, Argentina: Losada.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). Santander, España: SEIEM.

Maz, A. y Rico, L. (2009). Números negativos en los siglos XVIII y XIX: fenomenología y representaciones. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1): 537-554.

Meskens, A. (2013). *Practical Mathematics in a Commercial Metropolis, Mathematical Life in Late 16th Century Antwerp*. Dordrecht, Alemania: Springer.

Ocampo, J. (2011). G. M. Bruño, San Miguel Febres Cordero, el hermano cristiano de los textos escolares. *Revista de historia de la educación latinoamericana*, 16, pp. 15-32.

Picado, M. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Picado, M., Rico, L. y Gómez, B. (2017). Mathematics textbooks for teachers training in Spain in the second half of 19th century: The metric system implementation. En Bjarnadóttir, K., Furinghetti, F., Menghini, M., Johan Prytz, J. y Schubring, G. (Eds.), *"Dig where you stand" 4, Proceedings of the Fourth International Conference on the History of Mathematics Education*, pp. 275-291. Roma, Italia: Nuova Cultura.

Ponce, A. (1972). *Educación y lucha de clases*. Lima, Perú: Amaru.

Ribnikov, K. (1984). *Historia de las matemáticas*. Moscú, URSS: Mir.

Romero, F., Alzate, M. y Gómez, M. (2015). La enseñanza racional y sistemática en Colombia: el caso de la aritmética en la obra escolar de G.M. Bruño (1900-1930). *Historia y Sociedad*, 29: 61-97.

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics*, 7, 3: 41-51.

Schubring, G. (2002). A Noçao de Multiplicaçao: um "obstáculo" desconhecido na História da Matemática. *Bolema*, *15*(18): 26-52.

Sinclair, N., Watson, A., Zazkis, R. y Mason, J. (2011). The structuring of personal example spaces. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30: 291-303.

Smith, D. (1925). *History of Mathematics, Volume II: Special Topics of Elementary Mathematics*. Boston, MA: Ginn & Company.

Swetz, F. (1992). Fifteenth and Sixteenth Century Arithmetic Texts: What can we learn from them? *Science & Education*, 1: 365 – 378.

Luis Maraví Zavaleta
Institución Educativa "Miguel Grau Seminario", Perú
a20146949@pucp.pe

Prieto, A. y López-Esteban, C. (2019). El efecto del aprendizaje basado en proyectos propio del BIE. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 2*(1), pp. 12-28

ISSN: 2603-9982

EL EFECTO DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS PROPIO DEL BIE

Andrea Prieto García, Universidad de Salamanca, España

Carmen López Esteban, Universidad de Salamanca, España

Resumen

En el desarrollo de este trabajo, se hizo un mapa de todos los Proyectos de Investigación llevados a cabo por los centros que ofertan el Bachillerato de Investigación/Excelencia (BIE) en Castilla y León. Para ello se realizó una investigación de corte cualitativo, descriptivo y ex post facto. A raíz de ello se elaboró una clasificación del contenido que se está tratando en esta comunidad. Además, se estudió mediante una investigación de corte cuantitativo si el método del Aprendizaje Basado en Proyectos utilizado en el BIE aumenta el logro académico, la motivación y la actitud hacia el aprendizaje de matemáticas.

Palabras clave: *Proyecto de investigación, Aprendizaje Basado en Proyectos, Bachillerato de Investigación/Excelencia, matemáticas, motivación y actitud.*

The effect of project-based learning typical of baccalaureate in investigation/excellence

Abstract

During the carried out of this paper, it was made a map with all the Projects of Investigation of each high school in Castilla y León, as a result of a qualitative, descriptive and ex post facto methodology. With this, we got information about curriculum that is studied in this autonomous region, in the Baccalaureate in Investigation/Excellence (BIE). Furthermore, we investigated if project-based learning used in the BIE improve the mark, the motivation and the behaviour of the students toward learning mathematics.

Keywords: *Investigation paper, Project Based Learning, Baccalaureate in Investigation/Excellence, mathematics, motivation and attitude.*

Recibido: 11/04/2019; Aceptado: 08/05/2019

INTRODUCCIÓN

El Bachillerato de Investigación/Excelencia (BIE) tiene como objetivo fundamental conseguir un aumento en el interés de los alumnos, enfocando el currículum a la realidad que les rodea, para atraer su atención y lograr un aprendizaje más efectivo (BOCyL, Orden EDU/551/2012).

El Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) en el Bachillerato de Investigación/Excelencia se convierte en un modelo de enseñanza que tiene como objetivo involucrar al estudiante en su aprendizaje y en la investigación continua, con métodos de trabajo próximos a la dinámica universitaria, que le permite elaborar, exponer y argumentar de forma razonada proyectos de investigación, convirtiendo al profesor en un facilitador del conocimiento en lugar de un mero transmisor (Ward y Lee, 2002).

Los objetivos generales de la investigación son estudiar el currículo científico-tecnológico tratado en el Bachillerato de Investigación/Excelencia, en la comunidad de Castilla y León y, determinar si hay una correlación entre el Aprendizaje Basado en Proyectos propio del BIE y el logro académico, la motivación y la actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas.

La Consejería de Educación dictó la Orden EDU/551/2012, de 9 de julio, por la que se regula la implantación y el desarrollo del Bachillerato de Investigación/Excelencia, opción educativa cuya implantación tuvo lugar en el curso académico 2012/2013. Debido a su reciente aparición, los estudios referentes al currículum de este bachillerato son escasos.

Luis Rico (1998) entendía el currículum de matemáticas, como el plan de formación en matemáticas para los niños, jóvenes y adultos de un país, que tiene lugar en el Sistema Educativo, cuya puesta en práctica corresponde a profesores y especialistas. Es durante la década de los 80 cuando se produce un gran debate sobre pensamiento curricular en España. En lo que se refiere a investigaciones curriculares en Bachillerato, no es hasta después de 1975, tras la implantación de programas de Bachillerato derivados de la Ley General de Educación, que surgen los primeros proyectos de investigación curricular para este nivel educativo: Grupo Cero, de Valencia, y el Grupo Zero, de Barcelona. En su primera etapa, estos grupos trabajan sobre propuestas alternativas al currículum convencional de matemáticas del Bachillerato. Su aportación se centra en la elaboración de materiales curriculares mediante los que superar la excesiva formalización de los programas oficiales. Estos materiales ofertan un modelo de desarrollo alternativo al oficial y lo hacen mediante una estrategia de innovación planificada. Su influencia principal se lleva a cabo mediante cursos y actividades de formación de profesorado. Más adelante, en 1984, el Grupo Cero edita su propuesta más ambiciosa para la innovación curricular: "De 12 a 16, un proyecto de currículum de matemáticas", destinada a influir y orientar las modificaciones del currículum de matemáticas, mediante el abandono del programa formalista, una orientación basada en la modelización matemática y la resolución de problemas, una fundamentación en las matemáticas para todos y una recuperación del sentido práctico y aplicado del conocimiento matemático, olvidado en los cuestionarios oficiales españoles desde la década de los 60 (Rico, 1998). Esta es la base del Bachillerato de Investigación y Excelencia, conseguir un aumento en el interés de los alumnos enfocando el currículum a la realidad que les rodea para atraer su atención y lograr un aprendizaje más efectivo.

En el desarrollo de este trabajo se analizarán los proyectos de investigación llevados a cabo por los diferentes centros que ofertan el BIE científico-tecnológico en la comunidad de Castilla y León, lo cual permitirá elaborar un análisis del contenido que se está tratando en esta comunidad.

La realidad del aula evidencia que es frecuente encontrar alumnos que requieren unas actuaciones específicas, bien porque manifiestan algún tipo de dificultad para seguir el ritmo de sus compañeros o bien porque destacan con claridad por encima de ellos. Y mientras son generalizadas y están notablemente desarrolladas las medidas para atender la educación del primer grupo, aún hay muchas líneas abiertas en la caracterización de las actuaciones idóneas para los escolares del segundo grupo, especialmente en el área de matemáticas (Lupiáñez, 2016). Según Jaime y Gutiérrez (2017), la SEIEM ha demostrado que los estudiantes con altas capacidades y superdotados tienen necesidades educativas especiales que deber ser atendidas. El Bachillerato de Investigación/Excelencia sería una medida alternativa para atender al alumnado con estas características, debiendo existir porque el sistema educativo debe ocuparse de que todos los estudiantes reciban una buena formación matemática, lo cual conlleva la necesidad de proporcionar formación diferenciada a los estudiantes con diferentes capacidades matemáticas, para que, en particular, los mejor dotados para las matemáticas puedan llegar tan lejos como su capacidad les permita (Jaime y Gutiérrez, 2017). Aunque es cierto que los alumnos que realizan este tipo de bachillerato no necesariamente son aquellos con talento matemático, podríamos decir que se encontrarían entre los más sobresalientes en 4º de la ESO.

En España, como en muchos otros países avanzados, la formación matemática se concibe como una necesidad social y un derecho de todos los ciudadanos, al menos durante el periodo de enseñanza obligatoria. Pero, por otra parte, en aquellos países en los que las autoridades educativas son conscientes de la necesidad de disponer de profesionales con una formación matemática elevada, se toman medidas para identificar a los estudiantes que muestran una alta capacidad matemática y para proporcionarles una formación específica que les permita desarrollar su potencial matemático (Diezmann y Watters, 2002; NCTM, 2003). Son muchos los alumnos que pasan por el sistema educativo sin que se noticie su alta capacidad matemática, en el Bachillerato de Investigación/Excelencia podrían prepararse de forma más acorde a sus capacidades.

Se demanda que los programas de enseñanza de todas las etapas capaciten a todos los estudiantes para: reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas; formular e investigar conjeturas matemáticas; desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones; y elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración (Battista, 2007). Existe un consenso cada vez mayor entre los grupos internacionales de profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática en que, para mejorar la calidad del aprendizaje de las matemáticas, es necesario que los profesores planteen en sus clases actividades y problemas que sean cognitivamente exigentes para sus alumnos, es decir que les induzcan a utilizar razonamiento de alto nivel (Bishop, 2008; Boston y Smith, 2009; Cai y Howson, 2013), propuesta que tendría que cobrar una mayor importancia en este bachillerato. Para conseguir estas metas, los profesores y los proyectos tendrían que incentivar el desarrollo de programas para que en los alumnos creciera la necesidad de definir conceptos, decidir sobre los términos definidos e identificar factores para determinar una conclusión, hacer progresar la habilidad de los alumnos para hacer demostraciones, enseñarles la importancia de reflexionar sobre la validez de una demostración y motivar las conjeturas y generalizaciones, entre otras. (Ramírez, 2012).

Pero no solo la planificación de tareas o problemas adecuados es importante, también lo es el método por el que se quiere que los alumnos las resuelvan. Cada vez más, la búsqueda de estrategias que coadyuven a la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje, tales como el Aprendizaje Basado en Proyectos, método centrado en actividades individuales o de grupo por un periodo determinado de tiempo, que da como resultado un producto, una presentación o un logro, es de gran preponderancia. Este método es el utilizado en el BIE para la realización del proyecto de investigación final. Según Sahin, Guven y Yurdatap (2011), este método ha sido mencionado desde el siglo XX y su principal exponente fue el psicólogo y filósofo estadounidense John Dewey, quien habló por primera vez sobre los métodos de enseñanza activos y, en particular, de los proyectos. Él abogaba por que el niño aprendiera en un contexto de formación, experiencia e interpretación de proyectos. Puede ser considerado como una estrategia central de aprendizaje, que requiere del uso de diversas habilidades como investigación, colaboración, creatividad, redacción, exposición de trabajo en clase, creación de videos o arte, o cualquier otra forma de presentación que promueva a un producto final. En esta clase de método, los proyectos son diseñados para que los estudiantes investiguen y analicen, y se vinculan casi por completo con situaciones reales o situaciones del medio ambiente del estudiante. Por esto, algunas veces, este método es mencionado como aprendizaje basado en la investigación-aprendizaje en la práctica, ya que el proceso de aprendizaje es parte integral de los conocimientos y habilidades que los estudiantes adquieren con el proyecto (Bender, 2012).

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Es el método de Aprendizaje Basado en Proyectos utilizado en el BIE, mediante instrucción diferenciada, eficaz para mejorar el aprendizaje? ¿Afecta éste al grado de motivación del alumnado y su actitud hacia el aprendizaje de matemáticas?

A fin de responder a las preguntas de investigación anteriormente formuladas, es necesario responder a los siguientes interrogantes:

1. ¿Cuál es la estructura organizativa del Bachillerato de Investigación/Excelencia en Castilla y León?

2. ¿Cuáles son los proyectos que se están desarrollando en Castilla y León en el Bachillerato de Investigación/Excelencia?

3. ¿Cómo afecta el Aprendizaje Basado en Proyectos a la motivación y actitud de los estudiantes en el aprendizaje en matemáticas?

OBJETIVO GENERAL

Analizar el contenido tratado en los proyectos de investigación llevados a cabo en la comunidad de Castilla y León y explorar el efecto del método de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), mediante instrucción diferenciada, para mejorar, motivar y cambiar las actitudes que los estudiantes tienen sobre el aprendizaje de matemáticas.

METODOLOGÍA

La obtención de la información correspondiente a los proyectos de investigación se ha conseguido a partir del Boletín Oficial de Castilla y León, así como de la página web de la Junta de Castilla y León. Tras una rigurosa lectura, se han extraído los datos más relevantes para la investigación. Mientras, en el estudio del efecto del Aprendizaje Basado en Proyectos en la motivación y actitud de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas se ha utilizado una metodología de tipo cuasi-experimental, utilizando instrumentos de recolección de la información de corte cuantitativo, que se explicarán más adelante, y analizados estadísticamente en función de un grupo experimental y un grupo de control.

Hipótesis

Las hipótesis de esta investigación fueron las siguientes:

H1: El logro académico en el aprendizaje del contenido del BIE será mayor en los estudiantes a los que se les aplica el Aprendizaje Basado en Proyectos, que en los estudiantes del Bachillerato LOE.

H2: Se genera motivación en el aprendizaje de los estudiantes de matemáticas con el método de Aprendizaje Basado en Proyectos utilizado en el BIE.

H3: La percepción de los estudiantes sobre las matemáticas se ve afectada positivamente por el Aprendizaje Basado en Proyectos propio del BIE.

Variables

Las variables que intervinieron en el estudio fueron:

- Variable independiente: El Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) utilizado en el BIE
- Variable dependiente #1: Logro académico en el aprendizaje
- Variable dependiente #2: La actitud hacia el aprendizaje
- Variable dependiente #3: La motivación hacia el aprendizaje.

Muestra

El estudio se aplicó a los 225 Proyectos de Investigación de los cuales se pudo conseguir información, llevados a cabo en Castilla y León por los diferentes centros que imparten el BIE desde el año 2014 hasta el curso 2017/2018.

En el estudio del efecto del ABP en la motivación y en la actitud de los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas el tipo de muestra fue incidental, nos hemos centrado en el IES Claudio Moyano de Zamora y, en particular, en sus 47 estudiantes del Bachillerato científico-tecnológico. 10 estudiantes del BIE conformaron el grupo experimental y 20 estudiantes del bachillerato LOE conformaron el grupo de control del estudio. Los resultados de los 17 estudiantes restantes se tuvieron que despreciar por falta de información La muestra estuvo constituida por 14 hombres y 16 mujeres que oscilaron entre los 17 y 18 años. Los estudiantes del grupo experimental cursaban Proyecto de Investigación 2 días a la semana y, tanto ellos como los del grupo de control, tenían 4 periodos a la semana de Matemáticas.

Instrumentos

A través de las páginas web de cada centro y de los periódicos digitales de cada provincia se han conseguido los títulos de los proyectos de investigación, el nombre de los alumnos autores de tales proyectos y de los profesores colaboradores, tanto del instituto como de la universidad.

El presente estudio acoge también el enfoque cuantitativo de la investigación científica, donde se seleccionaron y adaptaron instrumentos de recolección de la información para la medición de las variables contenidas en las hipótesis de la investigación que luego convergerían en triangulación de los mismos. En la triangulación de la información se conjugaron los datos sobre las calificaciones en la asignatura de Matemáticas en 1º de Bachillerato, para medir la variable #1 y, por otro lado, se utilizó un cuestionario con preguntas cerradas tipo Likert, para medir las variables #2 y #3 y recopilar información valiosa para la investigación. La validez y confiabilidad de este cuestionario, se basó en la experimentación de Lau (2009), quien aplicó las preguntas en su motivación para medir la motivación y la actitud que los estudiantes tenían. Lau construyó sus preguntas basadas en las investigaciones de Cohen y Dörnyei (2001), cuya validación también ha sido demostrada en otra investigación de Tseng, Dörnyei y Schmitt (2006), la cual pretendía mostrar la autoeficacia como estrategia de aprendizaje.

Cuestionario

El cuestionario que aparece en el Anexo I, está formado por 30 preguntas, todas ellas semi-abiertas, respondiendo a “Totalmente de acuerdo/de acuerdo/ni de acuerdo ni en desacuerdo/en desacuerdo/totalmente en desacuerdo”, con el fin de indagar sobre la percepción del aprendizaje en matemáticas y la motivación intrínseca.

Las respuestas fueron analizadas por separado y con una tabulación cruzada, clasificando lo esencial de los resultados obtenidos.

Validez de los instrumentos

Con el fin de evitar la invalidez interna y externa de los instrumentos se consideraron los siguientes puntos:

- Los dos grupos de estudiantes a los cuales se les aplicó el instrumento de recolección de datos habían sido reconocidos como alumnos del bachillerato científico-tecnológico del IES Claudio Moyano de Zamora.
- Los estudiantes que formaron parte de esta investigación realizaron las actividades sabiendo que su calificación era tenida en cuenta para la investigación, pero no para la participación en las actividades.

- El cuestionario fue relativamente corto, evitando así situaciones de distracción como cansancio, hambre o indiferencia.

PROCEDIMIENTO

Primero, por medio de la información recogida y bajo criterio propio, se han clasificado todos los proyectos dentro de las siguientes áreas: Biología, Física, Matemáticas, Química, STEM; perteneciendo algunos a varias áreas simultáneamente. Para la clasificación de cada proyecto se ha tenido en cuenta el título y el departamento al que pertenecían los profesores colaboradores de la universidad (en aquellos que se ha podido contar con tal información). El año hace referencia al momento en el que se presentó el proyecto. Esta clasificación se encuentra en el Anexo I. Simultáneamente, se redactó el cuestionario basado en el realizado por Lau (2009). Se tradujeron las cuestiones y se orientaron a las matemáticas, cambiando alguno de los enunciados para ello. Una vez hecho, nos pusimos en contacto con el centro IES Claudio Moyano de Zamora. La profesora y directora del centro IES Claudio Moyano, Dña. María del Tránsito Martín De Castro, fue la encargada de entregar los cuestionarios a todos los alumnos de 2º de Bachillerato de la rama científico-tecnológica, los cuales medirían la motivación y el efecto del Aprendizaje Basado en Proyectos en el BIE en la percepción del aprendizaje de los estudiantes hacia las matemáticas.

Finalmente, se realizaron las correspondientes tabulaciones, gráficos, análisis y conclusiones de los datos recogidos con los instrumentos aplicados.

DATOS GENERALES DEL BACHILLERATO DE INVESTIGACIÓN/EXCELENCIA

La Consejería de Educación dictó la Orden EDU/551/2012, de 9 de julio, por la que se regula la implantación y el desarrollo del bachillerato de investigación/excelencia (BIE), opción educativa cuya implantación tuvo lugar en el curso académico 2012/2013 (BOCyL, Orden EDU/551/2012).

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, dispone en su artículo 32.1 que el bachillerato tiene como finalidad proporcionar a los alumnos formación, madurez intelectual y humana, conocimientos y habilidades que les permitan desarrollar funciones sociales e incorporarse a la vida activa con responsabilidad y competencia, indicando que, asimismo, capacitará a los alumnos para acceder a la educación superior. De otra parte, al regular los principios pedagógicos de esta etapa, el artículo 35 establece que las actividades educativas en el bachillerato favorecerán la capacidad del alumnado para aprender por sí mismo, para trabajar en equipo y para aplicar los métodos de investigación apropiados. Así como la metodología, ya que en esta etapa adquiere especial interés la apuesta por una metodología que fomente la aplicación de métodos de investigación apropiados y el trabajo cooperativo y en equipo.

El BIE es una opción para promover la educación de calidad y el éxito educativo, primando y reconociendo el esfuerzo del alumnado con mejores resultados y fomentando y estimulando el talento en las diferentes materias educativas.

Criterios para acceder al BIE en Castilla y León

La selección del alumnado para el acceso al primer curso del Bachillerato de Investigación/Excelencia en los centros docentes de Castilla y León en el curso 2017-2018 tuvo dos partes. Los alumnos que quisieran cursar este bachillerato tenían que cumplir los siguientes requisitos mínimos: haber obtenido el título de graduado en educación secundaria obligatoria por la opción de enseñanzas académicas, haber accedido a la evaluación final con calificación positiva en todas las materias y tener una calificación final igual o superior a 7 en la etapa. Una vez superadas estas condiciones, pasarían a un proceso de selección desarrollado en dos fases:

- La primera fase consistirá en una entrevista personal, que tendrá como objetivo apreciar la madurez e idoneidad de los candidatos para seguir con éxito los estudios en los que tiene interés y será realizada por al menos tres de los miembros de la comisión contemplada en el apartado 2 en las fechas que se establezcan al efecto.

- La segunda fase consistirá en la baremación de al menos dos de los siguientes criterios, a elección del claustro de profesores:
  - Materias cursadas, y calificación obtenida, a elección del alumno en cuarto curso de educación secundaria obligatoria que estén relacionadas con la modalidad o especificidad de bachillerato de investigación/excelencia que el centro imparta. Las materias a considerar se harán públicas con antelación al inicio del procedimiento de acceso.
  - Nota media del expediente académico de los cursos que se puedan acreditar en el momento de formular la solicitud.
  - Participación en certámenes, concursos, olimpiadas, y procedimientos de naturaleza análoga, de ámbito superior al local, relacionados con la modalidad o especificidad de bachillerato de investigación/excelencia a la que se pretende acceder.
  - La valoración del proceso de selección se realizará otorgando una puntuación máxima de 5 puntos a cada una de las fases, siendo necesaria una puntuación mínima de 3 puntos en la primera fase y de 2 en la segunda para superar dicho proceso.

Todo lo anterior se puntuará, teniendo que sacar el alumno solicitante al menos 5 puntos para poder acceder al Bachillerato de Investigación/Excelencia.

Centros que imparten el BIE de Ciencias y tecnología en cada provincia de Castilla y León

El estudio realizado en el trabajo solamente se basa en el Bachillerato de Investigación/Excelencia de Ciencias y Tecnología, por lo que hemos despreciado la información de los centros que imparten el específico de Idiomas, Artes, Humanidades y Ciencias Sociales.

Ávila:

- IES Isabel de Castilla (Ciencias)

Burgos:

- IES Félix Rodríguez de la Fuente (Ciencias y Tecnología)

- IES Comuneros de Castilla (Específico en Tecnologías)

León:

- IES Claudio Sánchez Albornoz (Ciencias y Tecnología)

- IES Gil y Carrasco (Ciencias y Tecnología)

Palencia:

- IES Trinidad Arroyo (Ciencias y Tecnología)

Salamanca:

- IES Vaguada de la Palma (Ciencias y Tecnología)

Segovia:

- IES Andrés Laguna (Ciencias y Tecnología)

Soria:

- IES Politécnico (Ciencias y Tecnología

Valladolid:

- IES Diego de Praves (Ciencias y Tecnología)

Zamora:

- IES Claudio Moyano (Ciencias y Tecnología)

Organización del BIE en Castilla y León

El BIE se imparte en dos opciones, de modalidad o específico. Las modalidades, materias troncales y específicas son idénticas a las del Bachillerato ordinario. Cursan una materia más en el espacio de las de libre configuración autonómica y disponen de periodos de disposición. Así mismo, en todas ellas se potencia el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).

Las materias de libre configuración autonómica son Iniciación a la investigación para el primer curso y Proyecto de investigación para el segundo curso. La primera asignatura estará orientada a desarrollar la habilidad del alumnado para investigar y comunicar oralmente y por escrito, los resultados de los proyectos de investigación que se vayan a desarrollar en 2º de bachillerato. Mientras el Proyecto de Investigación persigue que el alumno se inicie en las actividades de investigar, escribir y exponer oralmente. Estará dirigido por un profesor perteneciente a un departamento universitario y será tutelado por un profesor perteneciente al departamento al cual el equipo directivo haya asignado el proyecto, oído el coordinador de este bachillerato.

RESULTADOS

Los resultados muestran que tan solo el 13,78% de los 225 proyectos de investigación analizados son puramente de matemáticas. A esto hay que añadir el bajo nivel de los contenidos (deduciendo esta afirmación meramente del título de dichos proyectos), pues encontramos algunos como “Paseo matemático por Salamanca” y, simultáneamente en el mismo centro, en otra área “Optimización de la capacidad inmunoduladora de las células madre mesenquimales: estudio preclínico” o “¿Matemáticas en dibujos animados? (Los Simpson y Futurama)” y mientras en Biología y Química encontramos: “Estudio de la trombocitopenia grave en el síndrome mielodisplásico de bajo riesgo”, ambos del mismo centro y año.

La mayor parte de los proyectos que se han clasificado dentro del área de matemáticas se centran en la parte de álgebra. Aquellos proyectos que se clasifican en varias áreas están dentro del bloque de estadística, con análisis estadísticos de tablas y gráficos estadísticos. Los proyectos dentro del área STEM son mucho más interesantes y atrayentes para los estudiantes, como pueden ser, por ejemplo: “La firma electrónica. Utilización del DNIe para firmar documentos”, “Sistema automático para la toma de decisiones en primeros auxilios”, “Análisis e investigación de métodos de clasificación automática de información”, “Utilización de cámaras fotográficas de teléfonos móviles como instrumentos de medición”, “Sistemas de reconocimiento facial, Sistemas de inteligencia artificial en juegos”, etc.

Los datos extraídos del estudio han sido representados para visualizar la proporcionalidad del número de proyectos de cada área.

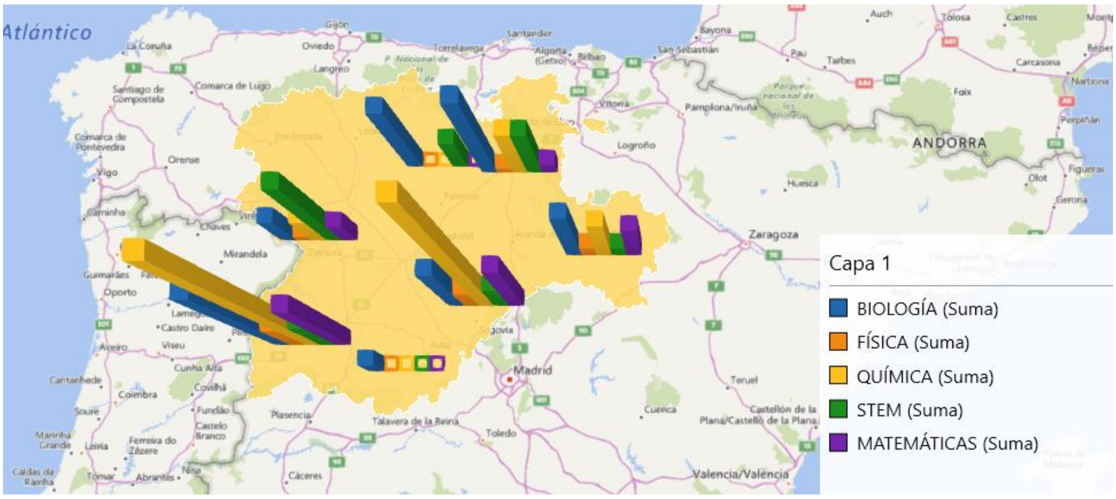


Figura 1. Distribución de los proyectos por áreas en cada provincia

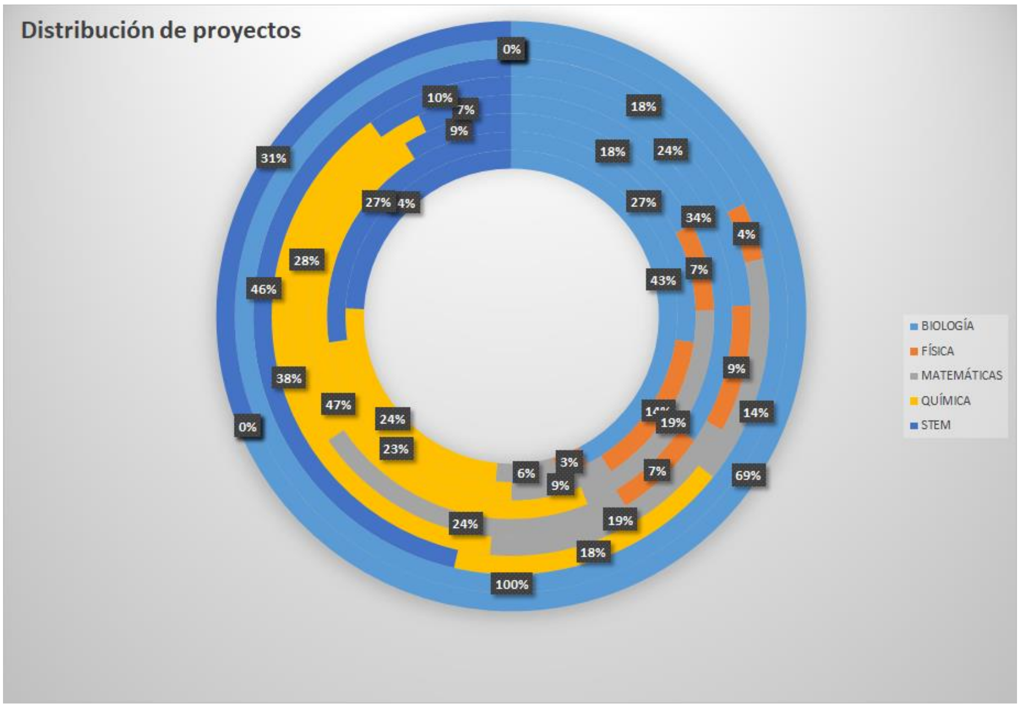


Figura 2. Distribución de los proyectos de cada provincia por áreas

Desafortunadamente, del centro IES Diego de Praves de Valladolid no se ha podido obtener información alguna sobre los proyectos de investigación que llevan a cabo. Algo similar ha ocurrido con el IES Isabel de Castilla de Ávila, del cual solo se ha podido encontrar información relativa a dos de ellos.

En el proceso de clasificación quedaba de manifiesto que las provincias en las cuales hay unos grados determinados y no pueden abarcar todos aquellos de ciencias y tecnología, trabajan solo en proyectos de sus especialidades, como se podía prever. Por este motivo, debido a que el grado en Física solo se imparte en Valladolid y Salamanca, el número de proyectos dentro de esta materia es tan reducido. El resto de materias sí se tratan de forma homogénea, ya que en todas las provincias se imparten grados de ingeniería y grados relacionados con la salud o la biología.

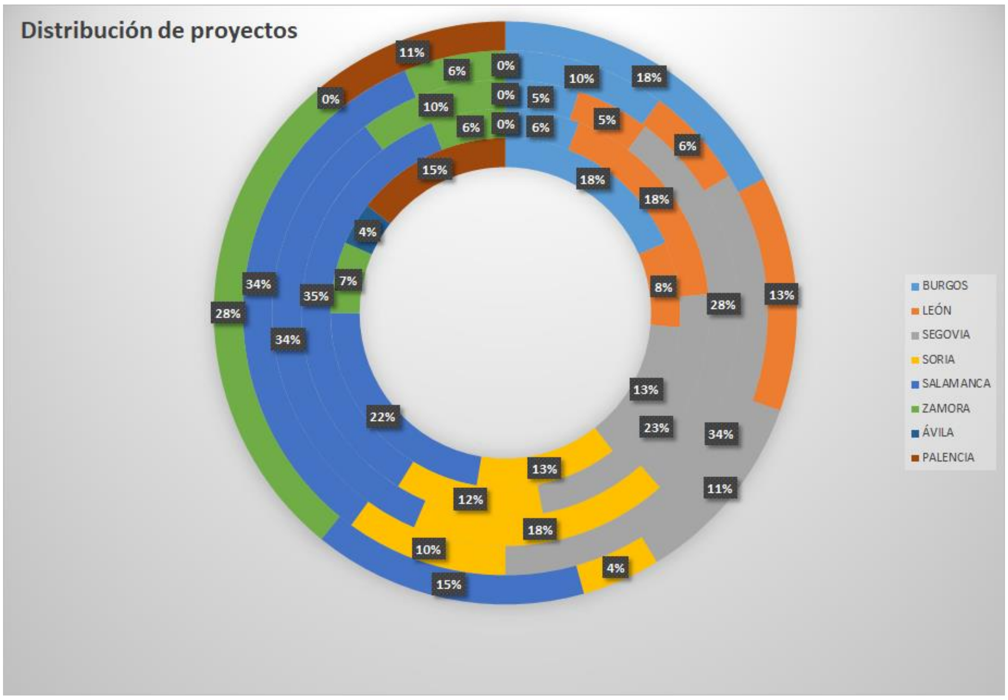


Figura 3. Distribución de los proyectos de cada provincia por áreas

Por otro lado, ha resultado interesante comprobar que algunos centros han querido trabajar los contenidos de diferentes materias visualizándolos en el entorno. Los centros IES Politécnico de Soria y el IES Gil y Carrasco de Ponferrada han sobresalido por llevar a cabo esta medida, con proyectos de investigación como: “Determinación de la calidad del agua de la provincia de Soria”, “Análisis de la variación de las características morfológicas de hoja de encina en dos poblaciones diferentes de Castilla y León”, “Fenología otoñal del Populus spp. en el parque del Plantío de Ponferrada”, “Estudio y análisis comparativo de la flora rupícola en el casco histórico de Ponferrada”, “Contaminación y limpieza del aire por acción de la lluvia en Ponferrada”, “Las mariquitas de las zonas verdes del municipio de Ponferrada (Coleoptera: Coccinellidae)”, “Estudio comparativo de las aves de dos parques de Ponferrada: La Concordia y El Plantío”, “Incidencia del “tigre del plátano” (Hem., Tingidae) en los plátanos de sombra en el municipio de Ponferrada”, “La Tebaida vista desde el espacio antes y después del incendio de abril de 2017” y “Evaluación de la regeneración vegetal post-incendio a partir de imágenes de muy alta resolución tomadas desde un Drone”.

Variable logro académico

Al examinar las relaciones entre la variable independiente y el logro académico, se pudo comprobar que el rendimiento/aprendizaje de los estudiantes de ambos grupos fue el mismo, en cuanto a calificación obtenida en Matemáticas de 1º de bachillerato se refiere. Por lo tanto, y de acuerdo con los resultados, podemos afirmar que el Aprendizaje Basado en Proyectos propio del BIE no influye en el aprovechamiento y aprendizaje de los contenidos de matemáticas, al menos en el primer curso del bachillerato. Sería recomendable realizar el mismo estudio con las calificaciones obtenidas en 2º de bachillerato por los mismos alumnos, tras haber realizado el Proyecto de Investigación.

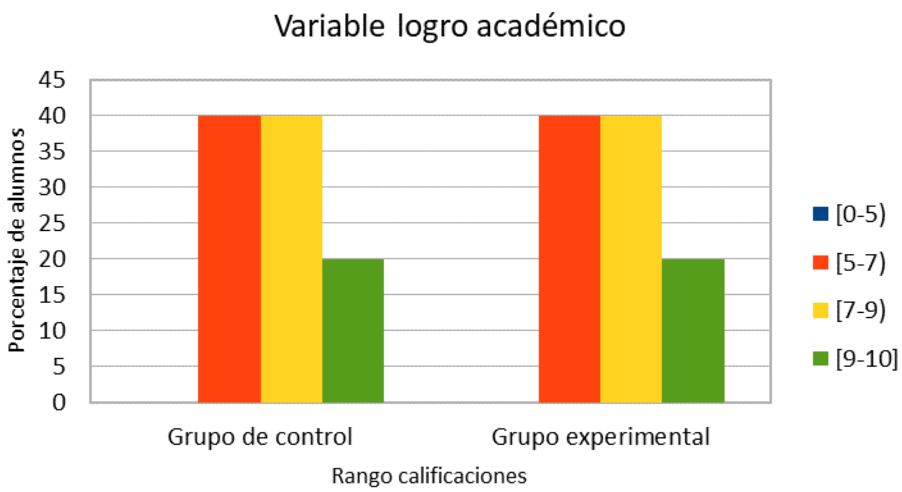


Figura 4. Variable logro académico. Rango de calificaciones obtenidas en 1º de bachillerato por los alumnos del grupo de control y experimental.

Calificación obtenida en Matemáticas en 1º de Bachillerato por cada sexo

Como puede evidenciarse en la Figura 4, mientras la mayoría de los hombres obtienen notable en la calificación de 1º de bachillerato, en las mujeres se reparten entre los tres intervalos de notas, predominando el suficiente. Pero, si nos centramos únicamente en el rango de calificaciones de sobresaliente, el porcentaje de mujeres es cuatro veces mayor que el de los hombres.

Las mujeres son mejores que los hombres en matemáticas

A pesar de que el porcentaje de mujeres con calificación de sobresaliente es cuatro veces mayor que el de los hombres, la mayoría de los alumnos de sexo masculino no creen que las mujeres sean mejores que los hombres en matemáticas. Esto puede ser ambiguo, pues pueden creer o bien que ser bueno en matemáticas no esté relacionado con el sexo, o bien que son los hombres los que son mejores en matemáticas. De una u otra forma, los resultados abalan que, en este caso concreto, las mujeres destacan frente a los hombres. Por el contrario, las mujeres sí ponen de manifiesto que el sexo no está ligado a un mayor control de las matemáticas, pues el 88,2% de ellas responde “Ni en acuerdo, ni en desacuerdo”.

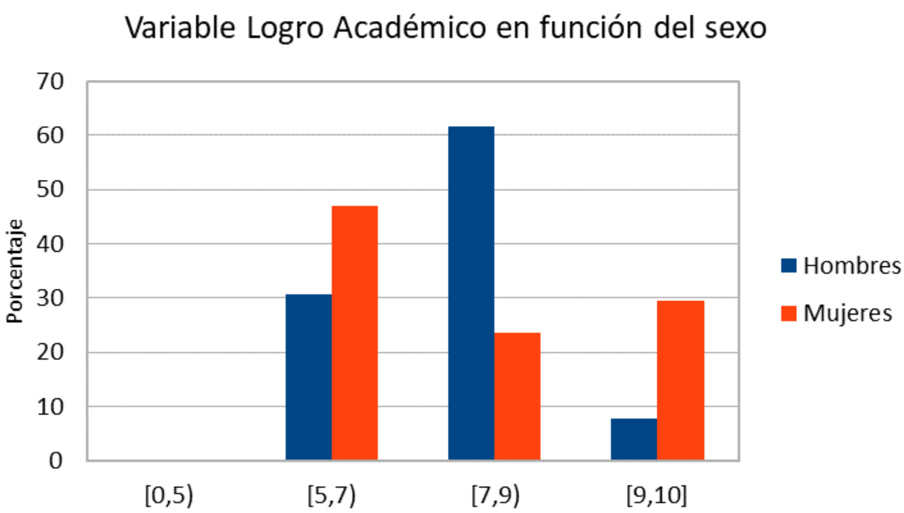


Figura 5. Variable logro académico en función del sexo. Rango de calificaciones obtenidas en 1º de bachillerato por los alumnos del grupo de control y experimental.

Variable de motivación y actitud hacia el aprendizaje

Para medir la motivación hemos escogido las respuestas a las cuestiones 5, 13, 15, 20, 26. 28 y 29 (7 preguntas). Mientras, para el análisis de la actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas se han elegido el resto de respuestas (21 preguntas, ya que las cuestiones 4 y 14 se puntúan de forma diferente).

Debido a que “Totalmente de acuerdo” se ha valorado con la mínima puntuación y “Totalmente en desacuerdo” con la máxima, se considerará que hay una mayor motivación o actitud para aquellos valores próximos a 0 y serán nulas para valores cercanos a la unidad. En los gráficos IV y V se ha tenido esto en cuenta y se han representado para plasmar correctamente el índice de motivación y actitud de los estudiantes.

Del mismo modo y en contra de las hipótesis que se habían planteado, la media de motivación y actitud hacia el aprendizaje han sido en el grupo de control y experimental prácticamente idénticas. No se ha reflejado un crecimiento en la motivación a través de la aplicación del ABP propio del BIE. De hecho, en contra de las hipótesis planteadas, es incluso unas décimas mayor la motivación y actitud del grupo de control.

Los gráficos reflejan que la motivación es mayor que la actitud hacia el aprendizaje en ambos grupos, estando la media de la actitud por debajo de 0,5.

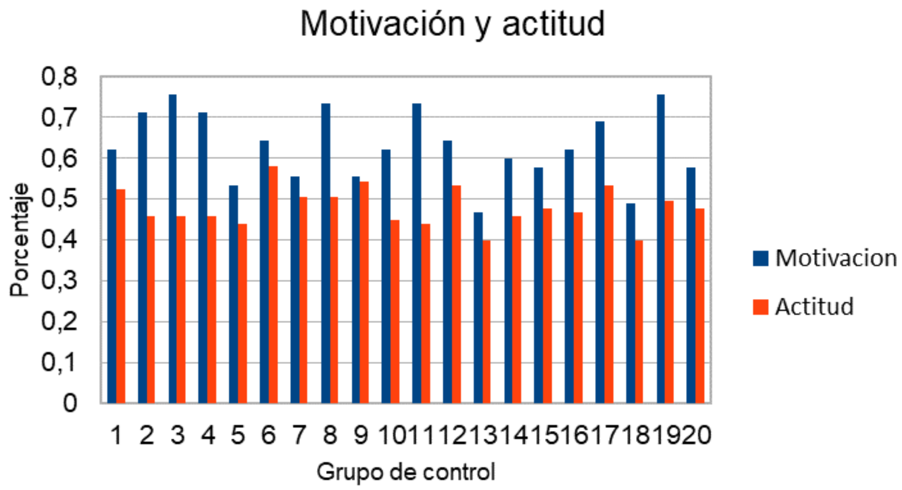


Figura 6. Índice de motivación y actitud del grupo de control.

Correlación Motivación, Actitud y Logro Académico

¿Tendrán el grupo experimental de alumnos del BIE mayor motivación que los del grupo de control? De nuevo, excepto para el grupo de control en la actitud, no hay evidencias significativas sobre una correlación entre la motivación y actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas y la calificación obtenida. Sí que hay una relación entre la motivación y el logro académico en los hombres y entre la actitud y el logro académico en las mujeres.

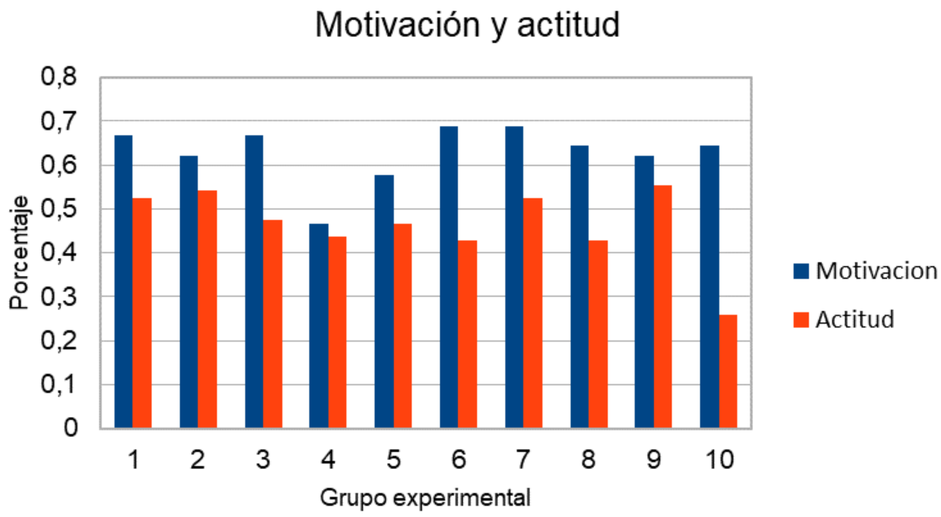


Figura 7. Índice de motivación y actitud del grupo experimental.

Tabla 1. *Coeficiente de correlación*

	Coeficiente de correlación Motivación- Logro Académico	Coeficiente de correlación Actitud- Logro Académico
Grupo de control	0,30417449	0,91382616
Grupo experimental	0,72499752	0,76817945

Tabla 2. *Coeficiente de correlación diferenciando en sexos*

	Coeficiente de correlación Motivación- Logro Académico	Coeficiente de correlación Actitud- Logro Académico
Hombres	0,98321674	0,82697783
Mujeres	0,23274677	0,93090782

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Como indicaba Bender (2012), el Aprendizaje Basado en Proyectos es la forma más efectiva de involucrar a los estudiantes en el aprendizaje, ya que los estudiantes participan activamente en la selección de muchos aspectos de sus tareas, asignaciones o trabajos, además de que son motivados por problemas del mundo real relacionados con su comunidad y sus intereses; por tanto, hay que fomentar los proyectos de investigación que abarquen todas las asignaturas posibles y que consigan que el alumno vea la utilidad de lo que trabaja en clase, lo cual suele ser la principal causa de pérdida del interés. Es importante que los alumnos de bachillerato entren en contacto con la investigación con la ayuda de los profesores involucrados en el proyecto, pero la finalidad de este bachillerato también es favorecer la mentalidad científica rigurosa, ordenada y crítica y conseguir que el aprendizaje del alumnado sea eficaz y cada vez más autónomo (BOCyL, Orden EDU/551/2012).

Es necesario aumentar el número de proyectos en los que aparezcan las matemáticas. Aunque no solo tienen que aumentar en cantidad, si no en calidad. Existe un pensamiento mayoritario sobre la inutilidad fuera del aula de las matemáticas, un método para eliminar esta creencia sería proponer proyectos de investigación en los que, por ejemplo, fenómenos reales sean explicados mediante ellas. De forma paralela deberían realizarse proyectos multidisciplinares, para conseguir que los alumnos consigan las competencias básicas en ciencia y tecnología, tales como saber emplear lenguaje científico, aplicar los principios y procesos matemáticos en distintos contextos, usar datos y procesos científicos, tomar decisiones basadas en pruebas y argumentos o apoyar la investigación científica y valorar el conocimiento científico, entre otras (Delgado, 2017). Por ello es importante el análisis de los proyectos llevados a cabo en el BIE, con el fin de conseguir un bachillerato de calidad y a la altura de las necesidades del alumnado.

Hemos observado que las universidades que se localizan en la provincia son un elemento clave a la hora de realizar los proyectos de investigación. Debido a que en cada provincia no se puede disponer de toda la variedad de grados de ciencias y tecnología, debería intentarse que el número de proyectos de cada área fuera homogéneo en todas ellas, para que los alumnos de cada provincia tuvieran las mismas oportunidades.

Por otra parte, la presente investigación permite afirmar que el Aprendizaje Basado en Proyectos no influye en la actitud y motivación en estudiantes del Bachillerato de Investigación/Excelencia científico-tecnológico del IES Claudio Moyano, Zamora. Este hecho particular contradice las investigaciones de Bender (2012), quien mencionó que, en estudios realizados por Scott (1994), Stepien y Gallagher (1993), Strobel y Van Barneveld (2008), Tassinari (1996) y Walker y Leary (2009), el uso del ABP incrementaba el logro y el aprendizaje de los estudiantes.

Aunque la muestra de estudiantes es reducida, no se han cumplido ninguna de las hipótesis planteadas. El logro académico extraído de las calificaciones de 1º de bachillerato en la asignatura de Matemáticas fue el mismo en el grupo de control y el experimental y los valores del índice de motivación y actitud hacia el aprendizaje en el grupo de control no difieren de los del grupo experimental.

Por lo tanto, debido a las numerosas investigaciones presentadas a lo largo del trabajo que avalan la eficacia del método ABP, hace que nos planteemos el motivo por el cual no se han cumplido las expectativas esperadas. Teniendo en cuenta los proyectos de investigación llevados a cabo este curso por los estudiantes del grupo experimental, no parecen ser los culpables de este hecho, ya que abarcan todas las áreas salvo física y tratan temas relacionados con el entorno y la actualidad; la razón por la cual la aplicación de que esta estrategia no haya conseguido las ventajas que se han obtenido en otros estudios, puede que sea la errónea aplicación de esta metodología.

REFERENCIAS

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 2 (pp. 843-908). Charlotte, NC: NCTM/Information Age Publishing.

Bender, W. (2012). *Differentiating Instruction for Students with Learning Disabilities: New Best Practices for General and Special Educators* (Third edition). Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Bishop, A. J. (2008). Research, effectiveness, and the practitioners' world. En P. Clarkson y N. Presmeg (Eds.). *Critical issues in mathematics education. Major contributions of Alan J. Bishop* (pp. 191-203). Nueva York: Springer.

BOCyL (2012). Orden EDU/551/2012, de 18 de julio de 2012, por la que se regula la implantación y el desarrollo del Bachillerato de Investigación/Excelencia en la Comunidad de Castilla y León.

Boston, M. D. & Smith, M. S. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(2), 119-156.

Cai, J. & Howson, G. (2013). Toward an international mathematics curriculum. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 949-974). Nueva York: Springer.

Cohen, A. D. & Dörnyei, Z. (2001). *Taking my motivational temperature on a language task*.

Minneapolis, MN: Center for Advanced Research on Language Acquisition, University of Minnesota.

Diezmann, C. M. & Watters, J. J. (2002). Summing up the education of mathematically gifted students. En B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch y M. O. J. Thomas (Eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia MERGA* (pp. 219-226). Sydney, Australia: MERGA.

Delgado, L. (2017). *Educación Matemática y Buenas Prácticas* [Apuntes académicos]. Usal-Moodle2.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2017). Investigación en Educación Matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). Zaragoza: SEIEM.

Lau, M. A. (2009). *TBL in english language learning in Macau: Effects on chinese terniary learners' beliefs and motivationsn* (Tesis doctoral). University of Nottingham, Inglaterra. http://eprints.nottingham.ac.uk/10969/

Lupiáñez, J.L. (2016). Lo ordinario y lo extraordinario en el aula de Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. *15*(11), 253-268.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *A research companion to principles and standards for school mathematics*. J. Kilpatrick, W.G. Martin & D. Schifter, (Eds.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ramírez, R. (2012) *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada.

Rico, L. (1998). Concepto de Currículum desde la Educación Matemática. *Revista de Estudios del Currículum, 1*(4), 7-42.

Sahin, F., Güven, I. & Yurdatap, M. (2011). *Development impact of the scientific process skills in preschool children of project-based training applications*. Avaible on: http://ecc.isc.gov.ir/showJournal/26501/52686/696913

Scott, C. A. (1994). Project-based science: Reflections of a middle school teacher. *The Elementary School Journal*, *1*(1), 75-94

Stepien, W., & Gallagher, S. (1993). Problem-based learning: As authentic as it gets. *Educational leadership*, *50*(7), 25-28.

Strobel, J. y A. van Barneveld (2008). When is PBL More Effective? A Meta-synthesis of Meta-analyses Comparing PBL to Conventional Classrooms. *Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning*, *3*(1), 44-58.

Tassinari, M. (1996). Hands-On Projects Take Students Beyond the Book. *Social Studies Review*, *34*(3), 16-20

Tseng, W. T., Dörnyei, Z., & Schmitt, N. (2006). A new approach to assessing strategic learning: The case of self-regulation in vocabulary acquisition. *Applied linguistics*, *27*(1), 78-102 https://doi.org/10.1093/applin/ami046

Walker, A. y H. Leary (2009). A Problem Based Learning Meta-Analysis: Differences Across Problem Types, Implementation Types, Disciplines, and Assessment Levels. *Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning*, *3*(1), 6-28.

Ward, J. D. & Lee, C. L., (2002). *A review of problem based learning.* Journal of Family and Consumer Sciences Education. 20(1), 16-20.

ANEXO 1

CUESTIONARIO MOTIVACIÓN Y ACTITUD

A continuación, aparecen algunas de las ideas que la gente tiene acerca de estudiar matemáticas. Lee cada apartado y decide si tú estás:

(1) Totalmente de acuerdo, (2) de acuerdo, (3) ni acuerdo ni en desacuerdo, (4) en desacuerdo, (5) totalmente en desacuerdo.

No hay respuestas correctas ni erróneas. Solamente estamos interesados en tu opinión. Marca cada respuesta en el espacio reservado para ello. Las preguntas 4 y 15 son diferentes y deben ser contestadas como se indica.

Puntos:	
1. Es más fácil para los niños que para los adultos aprender matemáticas.	1 2 3 4 5
2. Hay gente que tiene una habilidad especial para entender las matemáticas.	1 2 3 4 5
3. Hay áreas de las matemáticas (álgebra, análisis, estadística, etc) más fáciles de aprender que otras.	1 2 3 4 5
4. La asignatura de matemáticas es: 1) muy complicada 2) complicada 3) de dificultad media 4) fácil 5) muy fácil	1 2 3 4 5
5. Creo que entenderé las matemáticas muy bien.	1 2 3 4 5
6. Los españoles son buenos en matemáticas.	1 2 3 4 5
7. Es importante ser bueno en matemáticas.	1 2 3 4 5
8. Es necesario saber sobre la historia de las matemáticas para saber matemáticas.	1 2 3 4 5
9. No debes aplicar las matemáticas para resolver algún problema hasta que no las domines correctamente.	1 2 3 4 5
10. Es más fácil para la gente que sabe matemáticas comprender otras ciencias.	1 2 3 4 5
11. Los que son buenos aprendiendo idiomas no son buenos en matemáticas.	1 2 3 4 5
12. Lo mejor es aprender matemáticas en el instituto.	1 2 3 4 5
13. Disfruto resolviendo problemas matemáticos que se me plantean en mi vida cotidiana.	1 2 3 4 5
14. Si alguien estuviera una hora al día aprendiendo matemáticas, ¿cuánto tiempo le llevaría dominar las matemáticas muy bien?: 1) menos de un año 2) 1-2 años	1 2 3 4 5

3) 3-5 años 4) 5-10 años 5) No puedes dominar las matemáticas con solo una hora de estudio al día	
15. Tengo una habilidad especial para aprender matemáticas.	1 2 3 4 5
16. Lo más importante para aprender matemáticas es saberte las fórmulas.	1 2 3 4 5
17. Es importante repetir y practicar mucho.	1 2 3 4 5
18. Las mujeres son mejores que los hombres en matemáticas.	1 2 3 4 5
19. Los españoles creen que es importante aprender matemáticas.	1 2 3 4 5
20. Me siento inseguro al resolver problemas delante de la gente.	1 2 3 4 5
21. Si los estudiantes principiantes se les permitiera tener errores en matemáticas, sería difícil para ellos aprender correctamente matemáticas a la larga.	1 2 3 4 5
22. Lo más importante al aprender matemáticas es aprender a razonar.	1 2 3 4 5
23. Es más fácil resolver problemas matematizados que contextualizados.	1 2 3 4 5
24. Aprender matemáticas es diferente a aprender otras asignaturas.	1 2 3 4 5
25. Lo más importante de las matemáticas es aprender a resolver todo tipo de problemas.	1 2 3 4 5
26. Si aprendo matemáticas muy bien, tendré más oportunidades de conseguir un buen trabajo.	1 2 3 4 5
27. La gente que domina más de una ciencia son gente muy inteligente.	1 2 3 4 5
28. Quiero saber matemáticas muy bien.	1 2 3 4 5
29. Me gustaría tener amigos que fueran buenos en matemáticas.	1 2 3 4 5
30. Todo el mundo puede aprender matemáticas.	1 2 3 4 5

Andrea Prieto García
Universidad de Salamanca, España
prietogarcia.andrea@gmail.com

Carmen López-Estaban
Universidad de Salamanca, España
lopezc@usal.es

Meavilla Seguí, V., Oller-Marcén, A.M. (2019). Ejemplos de análisis-síntesis en un contexto geométrico. El *Analysis Geometrica* de Antonio Hugo de Omerique. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 2*(1), pp. 29-39

ISSN: 2603-9982

EJEMPLOS DE ANÁLISIS-SÍNTESIS EN UN CONTEXTO GEOMÉTRICO. EL *ANALYSIS GEOMETRICA* DE ANTONIO HUGO DE OMERIQUE

Vicente Meavilla Seguí, Universidad de Zaragoza (jubilado), España

Antonio M. Oller-Marcén, Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, España

Resumen

Entre los matemáticos españoles del siglo XVII brilla con luz propia el geómetra andaluz Antonio Hugo de Omerique, autor del Analysis geometrica (1689). En dicha obra, alabada por el propio Isaac Newton, Omerique se sirve de un método "nuevo y verdadero para la resolución tanto de problemas geométricos como de cuestiones aritméticas". Se trata precisamente del método de análisis y síntesis. En este artículo realizamos una breve descripción de esta obra y presentamos algunos ejemplos en los que el matemático sanluqueño aplica el análisis a la resolución de problemas geométricos de construcción. Además, presentamos algunas reflexiones que podrían contribuir al diseño de una actividad para ser llevada a cabo con profesorado de secundaria en formación.

Palabras clave: *geometría, siglo XVII, España, análisis*

Analysis and synthesis in a geometrical context. Antonio Hugo de Omerique's *Analysis geometrica*

Abstract

Among the Spanish mathematicians of the seventeenth century the Andalusian geometer Antonio Hugo de Omerique, author of the geometric analysis (1689) shines with its own light. In this work, praised by Isaac Newton himself, Omerique uses a "new and true method for the resolution of both geometric problems and arithmetic issues." It is the method of analysis and synthesis. In this article we briefly describe this book and we present some examples in which the mathematician from Sanlúcar applies the analysis to the resolution geometric construction problems. In addition, we present some reflections that could contribute to the design of an activity to be carried out with pre-service secondary school teachers.

Keywords: *geometry, 17th century, Spain, analysis*

Recibido: 09/04/2019; Aceptado: 04/06/2019

INTRODUCCIÓN

A partir de los trabajos de Polya (1945) y de Lakatos (1978) el método de análisis-síntesis se presenta como una útil herramienta heurística para la resolución de problemas en matemáticas. De hecho, el uso estos métodos puede encontrarse en ámbitos no necesariamente relacionados con las matemáticas constituyendo así parte fundamental del denominado método científico (Ritchey, 1991).

Desde un punto de vista histórico, el método de análisis-síntesis se origina en la Grecia clásica. Se sabe que el método era conocido por Aristóteles y algunas fuentes lo remontan a Platón (Hinitikka y Reme, 1974). Aunque aparece una descripción en un breve texto, probablemente interpolado, en el Libro XIII de los *Elementos*; la primera descripción detallada se encuentra en una obra de Pappus (Gulley, 1958). Behboud (1994) realiza un estudio muy detallado del texto original en el que, además de clarificar su estructura desde un punto de vista lógico, presenta en detalle diversos ejemplos y señala, algunas claves que contribuyeron al "éxito heurístico" de este método en la geometría de la Grecia clásica. Para una traducción completa del texto de Pappus, del que a continuación mostramos un fragmento, remitimos al libro de Puig y Cerdán (1988, pp. 143-144):

> El análisis, pues, considera aquello que se busca como si fuera algo aceptado y pasa desde ello, a través de sus consecuencias sucesivas, a algo que es aceptado como resultado de la síntesis […]. Pero en la síntesis, invirtiendo el proceso, tomamos como ya dado aquello a lo que llegamos en último término en el análisis y, alineando en su orden natural como consecuencias lo que antes eran antecedentes […] llegamos finalmente a la construcción de lo que se buscaba.

En la Europa del Renacimiento, la aplicación de este método a una geometría cada vez más algebraica y analítica, tuvo un momento álgido. Sin embargo, hacia el siglo XIX se había convertido prácticamente en un tema de interés puramente histórico (Mahoney, 1968).

Desde el punto de vista educativo, el interés del método de análisis-síntesis sigue vigente dentro del ámbito de la resolución de problemas. Sin embargo, su uso se circunscribe principalmente a un contexto aritmético y, en particular, de problemas de varias operaciones combinadas. De hecho, autores como Puig y Cerdán (1990) plantean que el carácter aritmético o algebraico de dichos problemas depende, en cierto modo, del proceso de análisis y síntesis realizado para su resolución. Kalmykova (1975) presenta un detallado trabajo en el que, entre otros aspectos, se muestran estudios empíricos relacionados con el uso del método de análisis-síntesis en la escuela que ilustran su potencialidad.

En este trabajo queremos alejarnos del ámbito aritmético para presentar algunos ejemplos del método de análisis-síntesis en un contexto más cercano al de su origen. Para ello, utilizaremos la obra de un matemático español del siglo XVII. De este modo, el trabajo tiene tres partes claramente diferenciadas. En primer lugar, damos una breve reseña bio-bibliográfica del autor, Antonio Hugo de Omerique, y describimos brevemente su Analysis geométrica. En segundo lugar, extraemos del citado texto algunos ejemplos ilustrativos del uso del método de análisis-síntesis. Por último, presentamos algunos comentarios e ideas generales orientadas al posible diseño de una actividad de formación de profesorado.

ANTONIO HUGO DE OMERIQUE Y SU *ANALYSIS GEOMETRICA*

El gaditano Antonio Hugo de Omerique nació en Sanlúcar de Barrameda el 7 de enero de 1634 y murió el 27 de febrero de 1705. En su fe de bautismo leemos (Barroso Rosendo y Saborido Piñero, 2018, p. 25):

> A siete del mes de enero de mil seiscientos y treinta y cuatro años, yo el Bachiller Francisco Celeña y Margilla, cura propio de esta ciudad, bauticé a Hugo, hijo de Hugo Antonio y de su legítima mujer María David, fue su padrino Antonio Vicente, mercader flamenco, a quien advertí el parentesco espiritual, y lo firmé fecha ut supra. Francisco Celaña.

Mantuvo una estrecha relación con los jesuitas y posiblemente estudió en el Colegio de la Compañía de Jesús de Cádiz. Jacobo Kresa[1], catedrático de Matemáticas en los Estudios Reales del Colegio Imperial de Madrid, lo elogia en sus *Elementos geometricos* con las siguientes palabras (Kresa, 1689, p. 250):

> Don Antonio Hugo, natural de Sanlúcar de Barrameda, amigo nuestro, de quien espera la Geometría en este siglo de cultísimos ingenios su mayor pulimento, con el cual tiene resueltos los más difíciles problemas, que han ejercitado los ingenios de los pasados geómetras, cuyos trabajos verán muy pronto la pública luz.

Estuvo casado en primeras nupcias con Doña Ana Caro y en segundas con Doña Magdalena Lazarraga y Eguizavar. El primer matrimonio no tuvo descendencia, pero del segundo nacieron tres hijos: Máximo Antonio Hugo, Xavier Esteban Hugo e Ignacio Próspero.

Fue Contador de cuentas y particiones de la Real Hacienda y, al parecer, publicó en 1691 un opúsculo titulado *Comercio de barras de plata. Tablas artificiales para ajustar breve, fácil y puntualmente el valor de una barra, conforme los estilos de España y de las Indias* del que no hemos sido capaces de localizar ejemplar alguno. Además, atendiendo a su propio testimonio, sabemos que escribió un texto sobre aritmética[2] y otro sobre trigonometría[3]. Sin embargo, ninguna de dichas obras ha llegado hasta nosotros.

La única publicación de la que se conserva algún ejemplar es la titulada *Analysis geometrica sive nova, et vera methodus resolvendi tam problemata geometrica, quam arithmeticas quaestiones. Pars prima de planis*[4], que fue editada en 1698. La estructura general de esta obra consiste en: frontispicio, portada, dedicatoria a José Bonet Campodarve[5], censura de Jacobo Kresa, licencia ordinaria y tasa, juicio de José Cañas[6], juicio de Carlos Powell[7], carta al lector, fe de erratas y cuatrocientas cuarenta páginas de texto matemático.

Es destacable que esta obra mereció el elogio de Isaac Newton quien, en una carta con fecha y destinatario desconocidos, se expresaba en los siguientes términos (Pelseneer, 1930, p. 156):

> He estudiado el *Analysis Geometrica* de De Omerique y lo encuentro una obra juiciosa y de valor que responde a su título, porque expone las bases para restaurar el análisis de los antiguos, que es más sencillo, más ingenioso y más adecuado para un geómetra que el álgebra de los modernos. Puesto que le conduce más fácil y directamente a la resolución de los problemas y la resolución a la que llega es generalmente más simple y elegante que aquella a la que se llega mediante el álgebra.

---

[1] Jesuita de origen moravo nacido en 1648. Fue catedrático de matemáticas en el Colegio Imperial de Madrid en 1686-1687 y 1689-1701. También profesó matemáticas en el Colegio de la Compañía de Jesús de Cádiz. Llevó a cabo una importante e intensa labor científica y diplomática a lo largo de su vida. Murió en su Moravia natal en 1715 (O'Neill y Domínguez, 2001).

[2] *A quo nos etiem ultro abstinemus, quia hac de re plura habemus in nostra Arithmetica, quae nondum prelum subiuit* (Omerique, 1698, p. 434).

[3] *Vlterius nos progredimur, nostra enim Analysis trigonometrica datis in vnoquoque triangulorum tribus quibuscumque conditionibus mappam statuit, per analogías arguit, brevissimis lineis problema solvit, & per logarithmos calculum instituit* (Omerique, 1698, p. 435).

[4] Una traducción aproximada del título podría ser la siguiente. *Análisis geométrico, nuevo y verdadero método para resolver cuestiones geométricas y aritméticas. Primera parte: el plano*.

[5] El zaragozano José Bonet Campodarve fue tesorero real del comercio de Indias en Cádiz. Tuvo un notable talento para resolver cuestiones aritméticas y se le conocía con el apodo de "el Contador" (Fernández de Navarrete, 1871, pp. 144-145).

[6] Nació en Jerez de la Frontera (Cádiz) el 19 de marzo de 1646. Ingresó en la Compañía de Jesús en 1660 y fue catedrático de Matemáticas en el Colegio de la Compañía de Jesús de Cádiz. Escribió una *Trigonometría esférica* (1691) que no se llegó a publicar. Murió en Sevilla el 9 de febrero de 1735 (O'Neill y Domínguez, 2001).

[7] Jesuita de origen británico. Profesor Real de análisis geométrico en el Colegio de la Compañía de Jesús de Cádiz en 1698 (O'Neill y Domínguez, 2001).

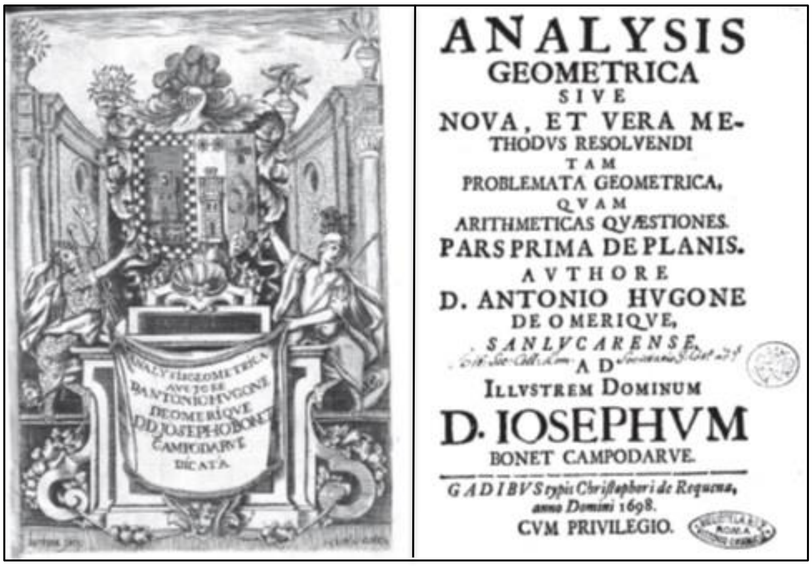

ANALYSIS
GEOMETRICA
SIVE
NOVA, ET VERA ME-
THODVS RESOLVENDI
TAM
PROBLEMATA GEOMETRICA,
QVAM
ARITHMETICAS QVÆSTIONES.
PARS PRIMA DE PLANIS.
AVTHORE
D. ANTONIO HVGONE
DE OMERIQVE,
SANLVCARENSE,
AD
ILLVSTREM DOMINUM
D. IOSEPHVM
BONET CAMPODARVE.
GADIBVS typis Christophori de Requena, anno Domini 1698.
CVM PRIVILEGIO.

Figura 1. Frontispicio del ejemplar conservado en la Biblioteca Nacional de España (izda.) y portada del ejemplar proveniente de la Biblioteca del Colegio de los Jesuitas de Roma (dcha.)

El *Analysis* de Omerique está escrito en latín, incluye numerosas figuras intercaladas en el texto (algo poco usual en la época) y su contenido matemático se divide en una introducción, cuatro libros y un apéndice. En la Tabla 1 se presenta un breve resumen de los contenidos de la obra.

Tabla 1. *Resumen de los contenidos de la obra de Omerique*

	Título	Temática	Extensión
Introducción	-	Definición de análisis y síntesis. Resolución de problemas básicos para el resto de la obra	96 pág. 24 prop.
Libro I	*Agens de resolutione per proportionales* (Que trata sobre la resolución por proporciones)	Resolución de problemas geométricos haciendo uso de la proporcionalidad de segmentos rectilíneos	142 pág. 50 prop.
Libro II	*Agens adhuc de resolutione per proportionales* (Que trata de nuevo sobre la resolución por proporciones)	Resolución de problemas geométricos haciendo uso de la proporcionalidad compuesta y semejanza de figuras	66 pág. 33 prop.
Libro III	*Agens de resolutione per comparationem planorum* (Que trata sobre la resolución por comparación de planos)	Resolución de problemas de comparación de números planos	84 pág. 37 prop.
Libro IV	*Agens de conditionibus problematum* (Que trata sobre las condiciones de los problemas)	Estudio de la compatibilidad (existencia o no de solución) de los problemas	46 pág. 14 prop.
Apéndice	-	Resolución de problemas de trigonometría y logaritmos	6 pág. 3 prop.

A lo largo de su discurso, Antonio Hugo de Omerique utiliza el análisis como método para la resolución de los problemas geométricos. En la introducción de la obra, el autor define dicha técnica en los siguientes términos (Omerique, 1698, p. 3): “Assumptio quaesiti tanquam concessit, per necesarias consequentias ad certum, & determinatum finem progrediens”; cuya traducción es “adoptar una cuestión como conclusión, avanzando mediante consecuencias necesarias a lo que es cierto y determinado”. En otras palabras, para Omerique el método analítico consiste en suponer el problema resuelto y establecer relaciones entre los datos y las incógnitas que permitan determinar el valor de éstas.

El lenguaje simbólico utilizado por el autor no es habitual en la época. Los puntos se designan por letras minúsculas, el cuadrado de un segmento rectilíneo *ab* (o el cuadrado construido sobre el segmento *ab*) se representa mediantela expresión *aba*, mientras que la expresión *axb* representa el producto *ax* · *xb* (o el rectángulo de lados *ax* y *xb*) y la proporción *ax*/*xc* = *xc*/*bx* se denota mediante la expresión *ax. xc. xc. bx*. Omerique utiliza generalmente las primeras letras del alfabeto para los datos conocidos y las últimas para los elementos desconocidos que aparecen en las figuras y las construcciones. Adicionalmente, el signo de la igualdad (ver Figura 2) es similar al utilizado por Joseph Zaragoza en su *Arithmetica Vniversal* (Zaragoza, 1669).

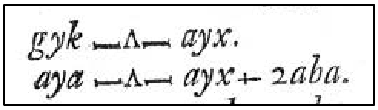


Figura 2. Ejemplos del simbolismo utilizado por Omerique.
gy · yk = ay · yx (arriba)
ay^2 = ay · yx + $2ab^2$ (abajo)

Las 161 proposiciones que contiene la obra se abordan según una estructura similar (ver Figura 3, por ejemplo):

- En primer lugar se presenta el enunciado y una o varias figuras ilustrativas.
- A continuación se vuelve a platear la situación pero introduciendo lenguaje simbólico.
- En tercer lugar se realiza el análisis, es decir, se establecen relaciones entre los datos y las incógnitas que permitan determinar el valor de éstas.
- Por último se lleva a cabo la construcción geométrica que resuelve el problema y se demuestra la corrección de la solución así determinada.

En muchas ocasiones se presenta más de una figura relativa a la misma proposición en la que se ilustra la situación con datos diferentes. También es relativamente habitual que un mismo problema se resuelva de más de una forma. En esos casos, los puntos tercero y cuarto anteriores se repiten tantas veces como soluciones distintas al problema se estén presentando.

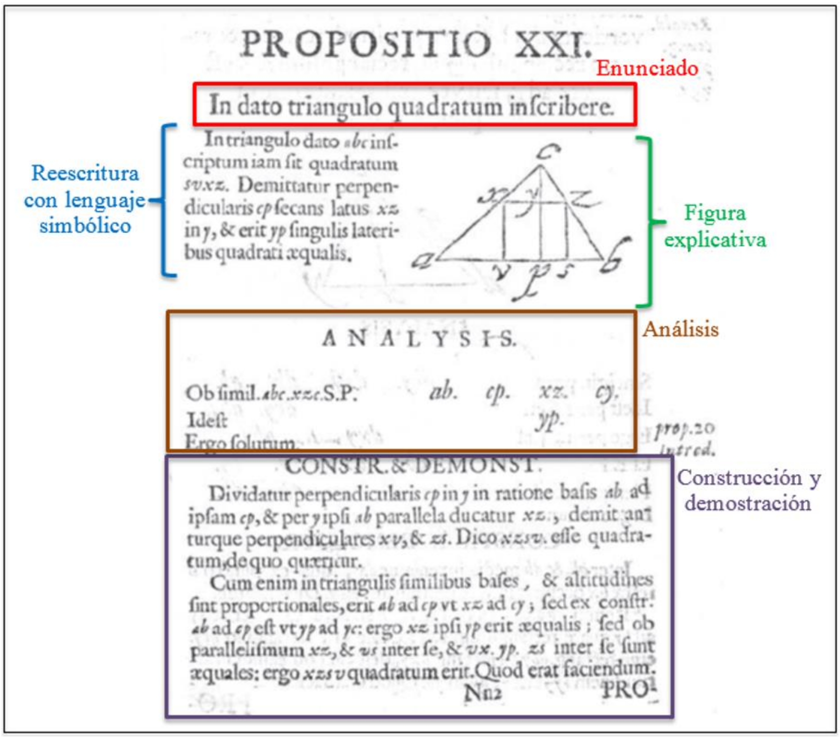


Figura 3. Estructura genérica de una proposición de la obra de Omerique

Observamos también en la Figura 3 que es frecuente encontrar referencias internas a otras proposiciones anteriores. Especialmente a proposiciones de la introducción pues, como ya hemos mencionado, la introducción incluye un buen número de proposiciones que se utilizan como herramientas básicas para resolver el resto de problemas del texto.

Por último, señalamos que la obra de Omerique incluye también problemas de aritmética que, sin embargo, se resuelven utilizando técnicas geométricas representando los números mediante segmentos y aplicando las proposiciones presentadas en el texto (véase el ejemplo de la Figura 7 más adelante).

ALGUNOS EJEMPLOS

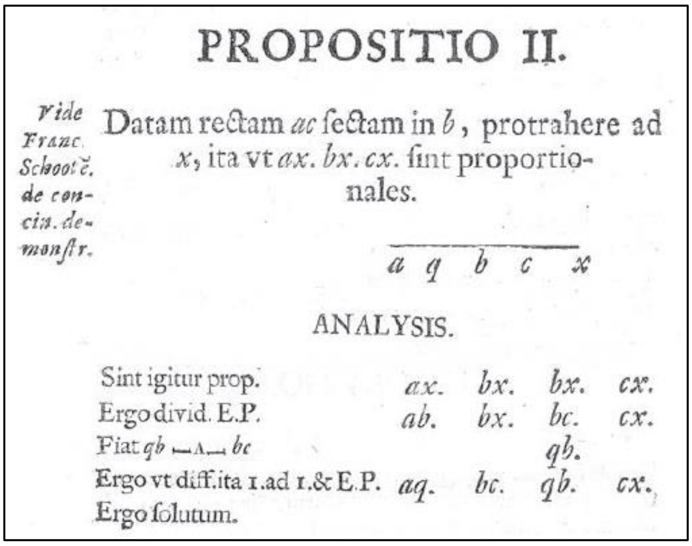
En esta sección vamos a presentar algunos ejemplos extraídos de cada uno de los cuatro libros de la obra de Omerique que nos parecen especialmente interesantes o representativos.

Un ejemplo del Libro I

En el Libro I se resuelven problemas relacionados con la proporcionalidad de segmentos. Asi, por ejemplo, la Proposición II del Libro I dice lo siguiente (Omerique, 1689, p. 112): “Dado un segmento *ac*, dividido por un punto *b*, prolongarlo hasta un punto *x* de forma que *ax*, *bx* y *cx* estén en proporción continua”.

Según la notación de la Figura 4, el análisis llevado a cabo por el autor procede del siguiente modo (siendo q un punto tal que *qb* = *bc*)[8]:

1) Supongamos que *ax*/*bx* = *bx*/*cx*
2) Por tanto, *ab*/*bx* = *bc*/*cx*
3) Sustituimos *bc* por *qb*
4) Por tanto *aq*/*bc* = *qb*/*cx* y a partir de aquí se obtiene la solución.


PROPOSITIO II.

Vide Franc. Schoot. c. de concin. demonstr.

Datam rectam *ac* sectam in *b*, protrahere ad *x*, ita vt *ax*. *bx*. *cx*. sint proportionales.

a q b c x

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ax*.	*bx*.	*bx*.	*cx*.
Ergo divid. E.P.	*ab*.	*bx*.	*bc*.	*cx*.
Fiat *qb* —∧— *bc*			*qb*.	
Ergo vt diff. ita 1. ad 1. & E.P.	*aq*.	*bc*.	*qb*.	*cx*.
Ergo solutum.				

Figura 4. Enunciado, figura y análisis de la Proposición II del Libro I

Observamos que el proceso de análisis ha convertido el problema inicial en un nuevo problema en el que, dados los segmentos *aq*, *bc* y *qb* (todos ellos datos o construibles inmediatamente a partir de los

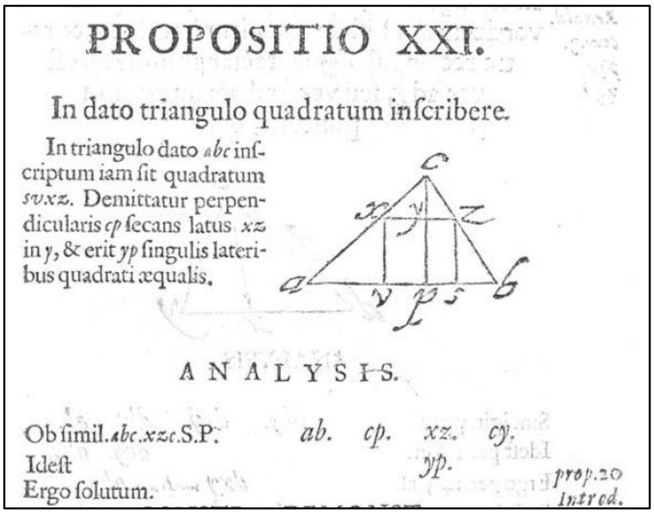
[8] En notación moderna: $\frac{ax}{bx}=\frac{bx}{cx}\xRightarrow[\substack{ax=ab+bx\\ bx=bc+cx}]{}\frac{ab}{bx}=\frac{bc}{cx}\Rightarrow\frac{bc}{cx}=\frac{ab-bc}{bx-cx}=\frac{aq+qb-bc}{bc}\xRightarrow[bc=qb]{}\frac{qb}{cx}=\frac{aq}{bc}$

datos) se debe calcular un cuarto proporcional a ellos. Esta construcción es elemental y, por ello, Omerique considera resuelto el problema llegados a ese punto.

Un ejemplo del Libro II

En el Libro II se resuelven problemas de geometría plana utilizando generalmente técnicas relacionadas con la semejanza de figuras y con la proporcionalidad compuesta. Por ejemplo, la Proposición XXI del Libro II dice lo siguiente (Omerique, 1689, p. 283): "Inscribir un cuadrado en un triángulo dado".

Para abordar este problema, Omerique denota por *abc* el triángulo dado y por *svzx* el cuadrado buscado. Se traza la altura *cp* del triángulo dado y se denota por *y* el punto de corte de dicha altura con el lado *xz*. En esa situación, el segmento *yp* mide lo mismo que el lado del cuadrado que se pretende construir (ver Figura 5).



PROPOSITIO XXI.

In dato triangulo quadratum inſcribere.

In triangulo dato *abc* inſcriptum iam ſit quadratum *svxz*. Demittatur perpendicularis *cp* ſecans latus *xz* in *y*, & erit *yp* ſingulis lateribus quadrati æqualis.

A N A L Y S I S.

Ob ſimil. *abc.xzc*. S.P. *ab. cp. xz. cy.*
Ideſt *yp*.
Ergo ſolutum. *prop.20 Introd.*

Figura 5. Enunciado, figura y análisis de la Proposición XXI del Libro II

Una vez plateada la situación, el análisis del problema procede según los pasos siguientes:

1) Como *abc* es semejante a *xzc*, se tiene que *ab*/*cp* = *xz*/*cy*
2) Se tiene que *yp* = *xz* y a partir de aquí se obtiene la solución.

El análisis realizado permite concluir a Omerique que el problema planteado (encontrar el segmento *yp*) se puede reducir al problema de dividir el segmento *cp* (que es un dato) en dos partes que estén en la misma razón que *ac*/*cp* (que también es un dato). Este problema elemental aparece resulto en la Introducción, por lo que el problema planteado queda resuelto.

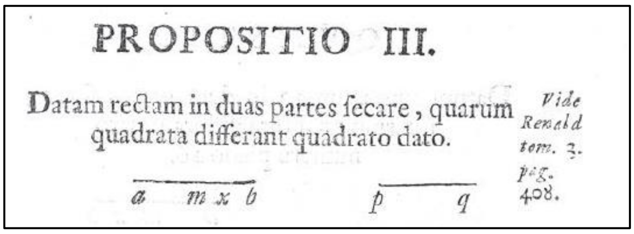
Un ejemplo del Libro III

En el Libro III se resuelven problemas de comparación de números planos. Por ejemplo, la Proposición III del Libro III dice lo siguiente (Omerique, 1689, p. 313): "Dividir un segmento dado, de forma que los cuadrados de cada parte difieran en un cuadrado dado".

Omerique denota por *ab* el segmento dado que hay que dividir mediante un punto *x* y denota por *pq* el lado del cuadrado dado. Además, se denota por m el punto medio del segmento *ab* (Figura 6). A partir de aquí, en términos modernos, el autor procede con el análisis de la situación del siguiente modo[9]:

[9] En notación moderna: $(ax)^2 - (bx)^2 = (pq)^2 \Rightarrow (ax+bx)(ax-bx) = (pq)^2 \xRightarrow[\substack{ax=am+mx\\ bx=bm-mx\\ am=bm}]{ax+bx=ab} (ab)(2mx) = (pq)^2$

1) Supongamos que se tiene que $ax^2 – bx^2 = pq^2$
2) Entonces, se tiene que $ab \cdot 2mx = pq^2$
3) Por lo tanto, $ab/pq = pq/2mx$ y a partir de aquí se obtiene la solución.


PROPOSITIO III.

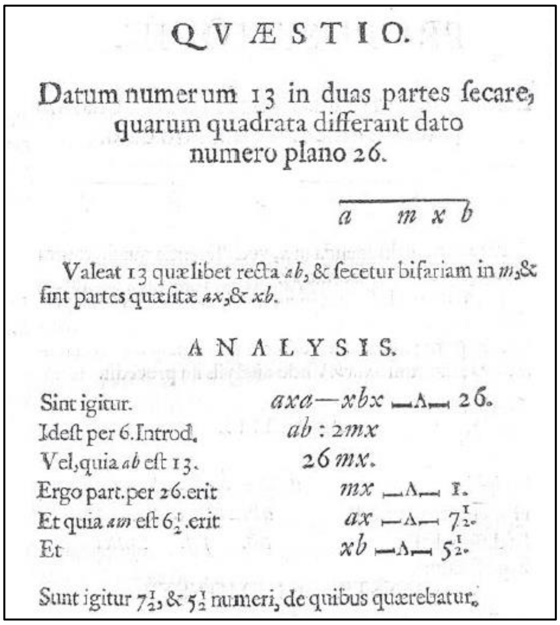
Datam rectam in duas partes secare, quarum quadrata differant quadrato dato.

Vide Renald tom. 3. pag. 408.

Figura 6. Enunciado y figura de la Proposición III del Libro III

Vemos como el análisis del problema convierte la situación inicial (paso 1) en una situación nueva (paso 3) en la que se debe calcular un cuarto proporcional a tres valores conocidos. Esta construcción aparece abordada en la Introducción y de ahí que, llegados a ese punto, el autor considere resuelto el problema.

Es interesante señalar que, como sucede en otras partes del texto, Omerique da una particularización del resultado general anterior a una situación concreta con valores numéricos dados. En concreto en este caso se resuelve la situación con los valores ab = 13 y pq^2 = 26. En la Figura 7 mostramos el texto original.


QVÆSTIO.

Datum numerum 13 in duas partes secare, quarum quadrata differant dato numero plano 26.

Valeat 13 quælibet recta *ab*, & secetur bifariam in *m*, & sint partes quæsitæ *ax*, & *xb*.

ANALYSIS.

Sint igitur.	$axa - xbx = 26$.
Idest per 6. Introd.	$ab : 2mx$
Vel, quia *ab* est 13.	$26\,mx$.
Ergo part. per 26. erit	$mx = 1$.
Et quia *am* est $6\frac{1}{2}$. erit	$ax = 7\frac{1}{2}$.
Et	$xb = 5\frac{1}{2}$.

Sunt igitur $7\frac{1}{2}$, & $5\frac{1}{2}$ numeri, de quibus quærebatur.

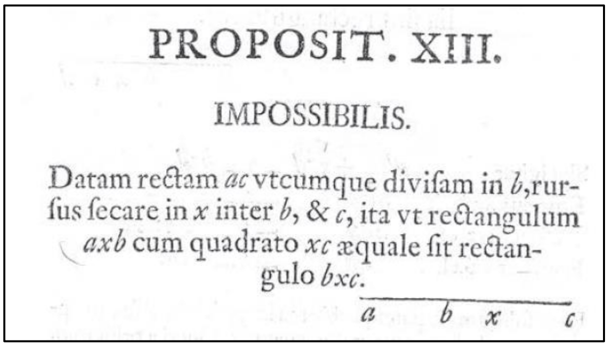
Figura 7. Caso particular de la Proposición III del Libro III

Observamos que el autor comienza siguiendo los mismos pasos que en la Proposición III pero, una vez llegados a la igualdad $ab \cdot 2mx$ = 26, abandona el enfoque geométrico que le llevaba a buscar un cuarto proporcional para plantear y resolver una ecuación.

Un ejemplo del Libro IV

En el Libro IV se aborda el estudio de la existencia o no de solución a ciertos problemas. Por ejemplo, la Proposición XIII del Libro IV dice lo siguiente (Omerique, 1689, p. 420):

Dado un segmento *ac* dividido en dos partes por un punto *b*, encontrar un punto *x* entre *b* y *c* de forma que la suma de las áreas del rectángulo de lados *ax* y *bx* y del cuadrado de lado *xc* sea igual al área del rectángulo de lados *bx* y *xc*.



PROPOSIT. XIII.

IMPOSSIBILIS.

Datam rectam *ac* vtcumque diuisam in *b*, rursus secare in *x* inter *b*, & *c*, ita vt rectangulum *axb* cum quadrato *xc* æquale sit rectangulo *bxc*.

Figura 8. Enunciado y figura de la Proposición XIII del Libro IV

En términos modernos, y utilizando la notación de la Figura 8, la solución de Omerique procede del siguiente modo:

1) Supongamos que se tiene que $ax \cdot bx + xc^2 = bx \cdot xc$
2) Entonces, se tiene que $bx \cdot xc > ax \cdot bx$
3) Dividiendo por bx, se sigue que $xc > ax$
4) Pero también se tiene que $bx \cdot xc > xc^2$
5) Dividiendo por xc, se sigue que $bx > xc$
6) Por lo tanto, $bx > ax$
7) Pero esto es imposible por cuanto x está entre b y c.

A diferencia de los tres ejemplos presentados en los apartados anteriores, en este caso el punto final del análisis no lleva a una situación que se puede resolver con facilidad y que implica la solución del problema original, sino que se llega a una contradicción. Es decir, el proceso de análisis supone en este caso una demostración de imposibilidad por reducción al absurdo.

CONCLUSIONES FINALES Y POSIBLES IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORADO

El *Analysis Geometrica* del gaditano Antonio Hugo de Omerique fue uno de los textos matemáticos más importantes de la España del siglo XVII. Es un libro de difícil lectura por estar escrito en lengua latina, por la notación utilizada y por los contenidos que aborda. No obstante, pensamos que su importancia histórica justifica el acercamiento al mismo y creemos que se puede utilizar como base para el diseño de actividades de formación de profesorado de secundaria.

A este respecto, utilizando la categorización de Jankvist (2009) la obra de Omerique puede utilizarse tanto para diseñar actividades que tengan la historia como un fin, como para realizar tareas que la utilicen como medio para abordar distintos contenidos matemáticos o competencias profesionales (Mosvold, Jakobsen y Jankvist, 2014).

Algunas ideas con las que desarrollar actividades con la historia de la matemática como fin podrían estar relacionadas con:

- Investigar sobre la figura de Antonio Hugo de Omerique.
- Investigar sobre las matemáticas en la España del siglo XVII.
- Buscar información sobre el método de análisis-síntesis.
- Investigar sobre la importancia intelectual de los jesuitas en la Europa del siglo XVII.

Como vemos, se pueden proponer actividades con distintos grado de concreción y que, en muchos casos, pueden dar pie a trabajos de índole multidisciplinar que relacionen las matemáticas con materias como la filosofía, la historia, el latín, etc.

En cuanto a actividades que utilicen la historia como medio, podemos presentar algunas ideas al hilo de los cuatro ejemplos presentados anteriormente. En cada una de ellas se pueden trabajar distintos dominios del marco MKT (Ball, Thames y Phelps, 2008).

- El ejemplo extraído del Libro I puede servir para poner a prueba los conocimientos geométricos de los estudiantes. Dado el abandono actual de la geometría es esperable que les ponga en ciertas dificultades, lo que puede dar lugar a un debate interesante sobre el estado de la geometría en la enseñanza actual. También puede ser interesante enunciarlo de la forma original (en un contexto puramente geométrico) y pedir a los estudiantes que lo traduzcan en términos aritméticos o algebraicos.
- El ejemplo del Libro II, en el que se pide inscribir un cuadrado en un triángulo puede dar lugar a una actividad en la que se pida futuros maestros resolver el problema por su cuenta usando primero únicamente lápiz y papel y después usando GeoGebra. A continuación se les puede presentar la solución original de Omerique y abrir una discusión sobre ventajas e inconvenientes de cada uno de los tres posibles enfoques, niveles para los que podría ser adecuado uno u otro, competencias que se desarrollan, etc.
- Con el ejemplo del Libro III, comparando diversas resoluciones de un mismo problema, se pueden platear las posibles relaciones entre aritmética, álgebra y geometría. Puede abrirse de nuevo una discusión sobre potencialidades y debilidades de las diversas aproximaciones al problema.
- Por último, el ejemplo del Libro IV permite plantear una actividad relacionada con la justificación y la demostración. Además de pedir a los estudiantes que resuelvan el problema ellos mismos, a partir del texto original se puede abrir una discusión sobre la reducción al absurdo, sus posibles dificultades o la posibilidad de reescribir la demostración de imposibilidad original de forma directa.

No proporcionamos más detalles y dejamos en manos de los lectores interesados el trabajo de diseñar actividades concretas a partir de las ideas anteriores (o de otras similares).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de investigación del Plan I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad EDU2016-78764-P y ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (Grupo S36_17D).

REFERENCIAS

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Barroso Rosendo, J.R. y Saborido Piñero, S. (2018). *Antonio Hugo de Omerique*. Madrid: Fundación Ignacio Larramendi.

Behboud, A. (1994). Greek Geometrical Analysis. *Centaurus*, *37*, 52-86.

Fernández de Navarrete, M. (1871). *Biblioteca Marítima Española* (tomo I). Madrid: Imprenta de la viuda de Calero.

Gulley, N. (1958). Greek geometrical analysis. *Phronesis*, *3*(1), 1-14.

Hinitikka, J. y Reme, U. (1974). *The Method of Analysis. Its Geometrical Origin and Its General*

Significance. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 235-261.

Kalmykova, Z. I. (1975). Processes of analysis and synthesis in the solution of arithmetic problems. En M.G. Kantowski (Ed.). *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*. *Vol. XI* (pp. 1-171). Chicago: University of Chicago.

Kresa, J. (1689). *Elementos geometricos de Euclides, los seis primeros libros de los planos; y el onzeno, y dozeno de los solidos: con algunos selectos theoremas de Archimedes*. Bruselas: Francisco Foppens.

Lakatos, I. (1978). The method of analysis-synthesis. En J. Worall y G. Curry (Eds.). *Mathematics, science and epistemology* (pp. 70-104). Cambridge: Cambridge University Press.

Mahoney, M. S. (1968). Another look at Greek geometrical analysis. *Archive for History of Exact Sciences*, *5*(3), 318-348.

Mosvold, R., Jakobsen, A., & Jankvist, U. T. (2014). How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. *Science & Education*, *23*, 47-60.

Omerique, A. H. de (1689). *Analysis geometrica sive nova, et vera methodus resolvendi tam problemata geometrica, quam arithmeticas quaestiones. Pars prima de planis*. Cádiz: Cristóbal de Requena.

O'Neill, Ch.E. y Domínguez J.M. (2001). *Diccionario Histórico de la compañía de Jesús. Biográfico-Temático*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Pelseneer, J. (1930). Une opinion inédite de Newton sur «l'Analyse des Anciens» à propos de l'Analysis geometrica de Hugo de Omerique. *Isis*, *14*(1), 155-165.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Puig, L. y Cerdán, F. (1999). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.) *Memorias del Segundo Simposio Internacional en Educación Matemática* (pp. 34-58). Cuernavaca, Morelos: PNFAPM.

Ritchey, T. (1991). Analysis and synthesis: on scientific method-based on a study by Bernhard Riemann. *Systems Research*, *8*(4), 21-41.

Zaragoza, J. (1669). *Arithmetica Vniversal que Comprehende el Arte Menor y Maior, Algebra Vvlgar, y especiosa*. Valencia: Geronimo Vilagrasa.

Vicente Meavilla Seguí
Universidad de Zaragoza (jubilado) , España
vmeavill@hotmail.com

Antonio M. Oller-Marcén
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, España
oller@unizar.es

MES