Matemáticas, Educación y Sociedad

ISSN: 2603-9982
Matemáticas, Educación y Sociedad
http://mesjournal.es/
editor@mesjournal.es

MES

Vol 2 No 2 (2019):

Matemáticas, Educación y Sociedad

Sagasti-Escalona, M. (2019). La ansiedad matemática. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 2*(2), 1-18

ISSN: 2603-9982

LA ANSIEDAD MATEMÁTICA

María Sagasti-Escalona, Universidad de Almería, España

Resumen

El presente trabajo es una revisión descriptiva sobre el tema de la ansiedad matemática que sufren muchas personas, y en especial los jóvenes, cuando tienen que enfrentarse a una tarea matemática donde se explican los estudios más actuales que se están realizando sobre este tema y concretamente los de las interpretaciones de amenazas que les impiden el aprendizaje en este área. Esta problemática es una de las más importantes del campo de la enseñanza de las matemáticas y en este artículo se presenta un examen conciso para que los docentes, psicopedagogos y orientadores reflexionen cómo abordar nuevas pedagogías en este área. Una visión de la tendencia de los estudios científicos más innovadores sugiere que cada vez hay más investigaciones de este tema a nivel global. Esto puede ser porque en la sociedad abundan las actitudes que fomentan la ansiedad matemática. A lo largo del trabajo se explica que los sentimientos de aprensión, tensión o incomodidad experimentados por muchos individuos al realizar actividades matemáticas o en un contexto matemático son emocionales, afectan a la memoria de trabajo y pueden explicarse a través de una apreciación de distintas formas de amenazas de estereotipos. Mediante estudios psiconeurológicos, se ha visto que la forma de intervenir más adecuada dependerá de la percepción de los estereotipos asociados en cada caso. También, se muestran recientes estudios para fomentar el cambio de pensamiento y convertir situaciones prácticas y habituales que generan ansiedad a otras que construyan una situación positiva mediante el desarrollo de la resiliencia matemática.

Palabras clave: *ansiedad matemática, amenazas de estereotipo, memoria de trabajo, bajo rendimiento en competencia matemática, resiliencia matemática*

Mathematical anxiety

Abstract

This work is a descriptive review of the mathematical anxiety that many people, and especially young people, suffer when they have to deal with a mathematical task. It shows the current studies being carried out on this subject and specifically those of interpretations of threats that prevent them from learning in this area. This problem is one of the most important in the field of mathematics teaching and this article presents a concise examination so that teachers, psychopedagogues and counselors

Recibido: 03/04/2019; Aceptado: 02/09/2019

can reflect on how to approach new pedagogies in this area. A view of the trend of the most innovative scientific studies suggests that there is more and more research on this topic at the global level. This may be because society abounds with attitudes that foster mathematical anxiety. Throughout the work it is explained that the feelings of apprehension, tension or discomfort experienced by many individuals when performing mathematical activities or in a mathematical context are emotional, can affect working memory and can be explained through an appreciation of different forms of threatening stereotypes. Psychoneurological studies have shown that the most appropriate way to intervene will depend on the perception of the associated stereotypes in each case. Also, recent studies are shown to encourage thought change and convert practical and habitual situations that generate anxiety to others that build a positive situation through the development of mathematical resilience.

***Keywords**: mathematical anxiety, maths stereotypes, maths threats, mathematical education, working memory, mathematical resilience*

INTRODUCCIÓN

Si bien las matemáticas a menudo se consideran un tema arduo, no todos los obstáculos de las matemáticas resultan ser debidos a dificultades cognitivas. Un gran número de niños y adultos experimentan sentimientos de ansiedad, angustia, inquietud o preocupación cuando se enfrentan a las matemáticas. La ansiedad causada por hacer actividades del área de las matemáticas o considerar hacerlas se conoce desde hace tiempo como ansiedad por las matemáticas [Math Anxiety, MA]. A lo largo de los años, una gran cantidad de estudios han indicado que muchas personas tienen actitudes extremadamente negativas hacia las matemáticas, lo que a veces equivale a una ansiedad severa (Hembree, 1990; Ashcraft, 2002; Maloney y Beilock, 2012). Este fenómeno fue reportado por primera vez por Tobias en 1978 y desde entonces ha sido el tema principal de numerosas publicaciones (por ejemplo, Beilock, Gunderson, Ramirez y Levine, 2010; Punaro y Reeve, 2012; Hill, Mammarella, Devine, Caviola, Passolunghi, y Szűcs, 2016), mostrando que se puede considerar un problema grave que afecta de forma parecida en todo el mundo.

La ansiedad por las matemáticas se ha considerado un problema grave en todo el mundo. Por ejemplo, en el ya que en el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) de 2012 se demostró que el 33% de los estudiantes de 15 años de edad, que es la media de los 65 países que participaron en este programa, se sentían impotentes cuando se enfrentaban a problemas matemáticos (OCDE, 2013). En particular, la ansiedad matemática ha sido un asunto de interés en los EE.UU. más que en cualquier otro lugar del mundo. La ansiedad de los jóvenes cuando estudian matemáticas se considera un grave problema educativo en dicho país y las publicaciones revelan que el 25% de los estudiantes universitarios y el 80% de los estudiantes de los colegios comunitarios tienen niveles moderados a altos de ansiedad por las matemáticas (Chang y Beilock, 2016). Ashcraft (2002), que es uno de los autores más influyentes en este campo, también explicó cómo "la cultura estadounidense abunda en actitudes que fomentan la ansiedad matemática". El gran interés de los eruditos estadounidenses por el tema de la ansiedad matemática puede surgir del intento de encontrar soluciones a este grave problema a nivel nacional. Los recientes estudios de Ersozlu, y Karakus (2019) muestran una visión de la tendencia de los estudios científicos en este área. Actualmente, existe un impulso a nivel global a realizar estudios científicos en este campo de investigación como respuesta a los crecientes problemas de la sociedad moderna en la enseñanza de las matemáticas.

Es debido a dicha importancia por lo que en el presente trabajo se pretende dar una visión general del problema. El artículo se estructura de la siguiente forma: primero se verá el método seguido para realizar la revisión. A continuación, se introduce en detalle el concepto de ansiedad matemática, los posibles factores correlacionados (edad, género, genética, etc), su impacto fisiológico, su relación con la memoria de trabajo, la percepción de las amenazas de estereotipo, se introduce el concepto de resiliencia matemática, así como otras estrategias para afrontar el problema y avances científicos en este campo de estudio. Una cuestión importante que se plantea es si la ansiedad matemática puede distinguirse con identidad propia o, si por el contrario, se trata de ansiedad general. Tras esto, se realiza la discusión y se muestran las conclusiones.

MÉTODO

El presente documento es una revisión descriptiva sobre el tema de la ansiedad matemática que sufren muchas personas, y en especial los jóvenes, cuando tienen que enfrentarse a una tarea matemática donde se explican los estudios más actuales que se están realizando sobre este tema. Esta problemática es una de las más importantes del campo de la enseñanza de las matemáticas y en este artículo se presenta un examen conciso para que los docentes, psicopedagogos y orientadores reflexionen cómo abordar nuevas pedagogías en este área. Además, daremos una visión de las tendencias de los estudios científicos más innovadores, ya que es un tema en continuo estudio y desarrollo en el que cada vez se realizan más investigaciones a nivel global.

Búsqueda bibliográfica

Para la búsqueda bibliográfica, partimos de la hipótesis de que en la sociedad abundan las actitudes que fomentan la ansiedad matemática, entonces cada vez hay más investigaciones a nivel global y más estudios científicos dedicados a este tema. En la localización de los documentos bibliográficos se han utilizado varias fuentes documentales y bases de datos científicas como Dialnet, Lantindex, Redalyc o Scopus. Las búsquedas bibliográficas se realizaron en junio de 2019 utilizando los 3 descriptores: ansiedad matemática, educación matemática y bajo rendimiento en competencia matemática. En una búsqueda inicial de artículos originales, catálogos y directorios, los registros científicos obtenidos fueron más de 20.000 tras la combinación de las diferentes palabras clave. Para reducir considerablemente este orden de magnitud se han establecido ciertos límites adicionales en la búsqueda y, finalmente, se han seleccionado del orden de 20 publicaciones de calidad, que se han utilizado como punto de partida para la realización de este estudio atendiendo a los siguientes requisitos:

- Tipo de registro: artículos y revistas revisadas por pares, compilaciones, resúmenes en revistas científicas y listados de referencias publicados en los últimos 5 años y en cualquier idioma.

-Los resultados se ordenaron atendiendo en primer lugar a su relevancia, en segundo lugar por fecha de publicación y en tercer lugar por su número de citas, ya que queremos contar con información de calidad que esté lo más actualizada posible.

-Se seleccionaron aquellos documentos que informasen sobre los aspectos formales de la ansiedad que sufren muchas personas al enfrentarse a una tarea matemática y las amenazas que impiden su aprendizaje.

-Se consideraron las fuentes documentales que contenían información útil para docentes, psicopedagogos y orientadores, para que reflexionen el abordaje de nuevas pedagogías desde un enfoque neuropsicológico, con una inclinación hacia la psicología cognitiva y la neurociencia.

Con base a estos criterios, se ha realizado una exhaustiva selección de fuentes bibliográficas de calidad para garantizar la fiabilidad y validez del estudio, ya que se pretende hacer una revisión descriptiva que proporcione al lector una puesta al día sobre conceptos útiles referidos al tema de la ansiedad matemática. Como éste es un área en constante cambio y evolución, el presente documento se presenta por su utilidad en el campo de la enseñanza de las matemáticas, aunque también puede interesar a personas de campos conexos que quieran estar al día en otras esferas generales de su interés.

DESARROLLO

La Ansiedad Matemática

Hace casi medio siglo, Richardson y Suinn (1972) describieron la ansiedad matemática como sentimientos de aprensión, tensión o incomodidad experimentados por un gran número de individuos al realizar tareas matemáticas o en un contexto matemático. Numerosos estudios a lo largo de los años han indicado que bastantes personas tienen actitudes extremadamente negativas hacia las matemáticas, que a veces equivalen a ansiedad severa (Hembree, 1990; Ashcraft, 2002; Maloney y Beilock, 2012). El concepto de ansiedad matemática se ha asociado con dificultades cognitivas para realizar tareas matemáticas, potencialmente porque la ansiedad interfiere con nuestra capacidad de mantener y manipular la información en mente (memoria de trabajo), pero es predominantemente un problema emocional (Ashcraft y Krause, 2007). Los estudios sugieren que las actitudes hacia las matemáticas tienden a deteriorarse con la edad durante la infancia y la adolescencia (Wigfield y Meece, 1988; Ma y Kishor, 1997). Aunque muchos estudios tratan la ansiedad matemática como una sola entidad, parece que puede consistir en más de un componente. Wigfield y Meece (1988) encontraron dos dimensiones separadas de la ansiedad matemática en 4 estudiantes de sexto grado y de secundaria; encontraron dos dimensiones diferentes: cognitiva y afectiva, que eran similares a las que habían sido previamente identificadas en el área de ansiedad por exámenes por Liebert y Morris en 1967. La dimensión cognitiva, denominada "preocupación", se refiere a la preocupación por el rendimiento y las consecuencias del fracaso, y la dimensión afectiva, denominada "emocionalidad", se refiere al nerviosismo y la tensión en las situaciones de prueba y las respectivas reacciones autónomas (Liebert y Morris, 1967).

La ansiedad matemática es diferente de la discalculia del desarrollo, una dificultad cognitiva para adquirir habilidades matemáticas (Carey, Hill, Devine, & Szűcs, 2017). Desde un punto de vista clínico, Málaga Diéguez (2014, p.46.) explica que la ansiedad matemática es un trastorno que puede aparecer en personas discalcúlicas como consecuencia de las dificultades que genera este trastorno de aprendizaje, pero también en personas sanas, lo que podría inducir a un diagnóstico erróneo. No se trata de un trastorno menor, ya que las personas afectadas evitan las matemáticas, lo que repercute en su rendimiento académico y puede llegar a condicionar su futuro, ya que tienden a elegir actividades o carreras universitarias que no precisan de esta materia (Ashcraft y Krause, 2007). De acuerdo con Málaga Diéguez, en la ansiedad matemática, una intervención psicológica puede resolver el problema, mientras que la discalculia precisa un enfoque terapéutico distinto. La ansiedad interfiere con el rendimiento y el bajo rendimiento aumenta la ansiedad, actuando como un círculo vicioso (Carey, Hill, Devine, y Szűcs, 2016). Mientras que la ansiedad matemática parece estar asociada con un déficit en memoria de trabajo verbal y quizás también memoria de trabajo visuoespacial, la discalculia es asociada con déficits en la memoria visuoespacial; en ambos casos, la memoria a corto plazo y de trabajo se ven afectados (Mammarella, Hill, Devine, Caviola y Szűcs, 2015).

Edad y género

La ansiedad matemática se ha observado en niños de alrededor de 6 años (Beilock, Gunderson, Ramírez y Levine, 2010; Krinzinger, Kaufmann y Willmes, 2009; Thomas y Dowker, 2000; Vukovic Kieffer, Bailey y Harari, 2013). Las actitudes negativas hacia las matemáticas parecen empeorar conforme el sujeto aumenta de edad. La ansiedad matemática aumenta cuando los niños alcanzan la Educación Secundaria, persistiendo en la educación posterior y durante toda la edad adulta (Wigfield y Meece, 1988; Ma y Kishor, 1997), lo que tiene consecuencias negativas para el desarrollo de las matemáticas, la educación matemática y la participación de adultos en actividades relacionadas con las matemáticas.

Aunque hoy en día existen pocas diferencias de género en el rendimiento matemático real en los países que ofrecen igualdad de oportunidades educativas a los niños y las niñas, las mujeres de todas las edades siguen tendiendo a calificarse a sí mismas como inferiores en matemáticas y a experimentar una mayor ansiedad con respecto a las matemáticas que los hombres.

En 2010, Beilock, Gunderson, Ramírez y Levine, realizaron un estudio que mostraba que cuando las personas con ansiedad matemática son maestras de escuela primaria, su ansiedad matemática conlleva consecuencias negativas en el rendimiento en matemáticas de sus alumnas. Las maestras de primaria en los Estados Unidos son casi exclusivamente mujeres (>90%), y en su estudio proporcionaron evidencias de que la ansiedad de estas maestras se relaciona con los logros de las niñas en matemáticas a través de las creencias de las niñas sobre quién es bueno en matemáticas. Al principio del año escolar, se evaluó el rendimiento en matemáticas de los estudiantes, y se confirmó que no había relación entre la ansiedad de una maestra de matemáticas y el rendimiento de sus estudiantes en matemáticas. Sin embargo, al final del año escolar, cuanto más ansiosas estaban las maestras con las matemáticas, más probable era que las niñas (pero no los niños) apoyaran el estereotipo común de que "los niños son buenos en matemáticas y las niñas son buenas en la lectura" y menor era el rendimiento de estas niñas en matemáticas. De hecho, al final del año escolar, las niñas que creían este estereotipo tuvieron un rendimiento matemático significativamente peor que las niñas que no lo hicieron y que los niños en general. Según este estudio, en la escuela primaria temprana, donde los maestros son casi todos mujeres, la ansiedad matemática de las maestras tiene consecuencias para el logro matemático de las niñas al influir en sus creencias sobre quién es bueno en matemáticas.

De acuerdo a lo anterior, es importante comprender las actitudes y emociones de los niños y adultos con respecto a las matemáticas si queremos eliminar importantes barreras al aprendizaje y al progreso en esta materia.

Otros factores

Además de la edad y el género, algunos factores posibles en la ansiedad matemática son la genética o la cultura. Diversos investigadores han incluido el estudio de las causas de la ansiedad matemática en sus trabajos y se ha visto que afecta tanto a jóvenes como a adultos, a profesores y a alumnos, a mujeres y hombres, etc. Gresham (2009) sugiere que la eficacia de los maestros está correlacionada negativamente con la ansiedad matemática.

Como acabamos de ver, Beilock et al. (2010) mostraron una correlación negativa entre la ansiedad matemática de las maestras y el logro de sus alumnas. Los profesores a los que las matemáticas les generan intranquilidad también pueden impulsar a sus alumnos a desarrollar ansiedad matemática, como lo demostraron Markovits (2011) y Ramirez, Hooper, Kersting, Ferguson y Yeager (2018).

Wang et al (2014) presentaron pruebas de que algunos factores genéticos juegan un papel importante junto con varios factores ambientales en el desarrollo de la ansiedad matemática.

Ma y Xu (2004) y Gunderson, Park Maloney, Beilock y Levine (2018) encontraron que las escasas habilidades matemáticas y los bajos niveles de rendimiento en matemáticas tienen efectos adversos en los niveles de autoeficacia de los estudiantes y hacen que éstos desarrollen ansiedad matemática.

Maloney, Ramírez, Gunderson, Levine y Beilock (2015) descubrieron que los padres con altos niveles de ansiedad matemática provocan que sus hijos también la desarrollen.

Si los padres proporcionan apoyo firme y mantienen altas las expectativas de los hijos, pueden reducir la ansiedad de sus hijos y aumentar sus logros en matemáticas (Vukovic, Roberts y Green Wright, 2013).

Si los maestros y los padres aumentan los niveles de motivación matemática de los estudiantes ansiosos y les dan claves de evaluación apropiadas, pueden superar los antecedentes cognitivos y afectivos de la ansiedad y aumentar su rendimiento matemático (Wang et al., 2015).

Impacto fisiológico

Hembree (1990), Ashcraft (2002) y Maloney y Beilock (2012) sostienen que la ansiedad matemática que sufren muchas personas, a veces, equivale a ansiedad severa. Los niveles de ansiedad se han correlacionado con un aumento significativo en la dificultad respiratoria, tensión en el cuello y los hombros, dolores de cabeza, depresión y ansiedad, lo que confirmó que los estudiantes con mayor ansiedad matemática tienen una mayor activación fisiológica, como la activación neuronal, la frecuencia cardíaca y el aumento de cortisol (Faust, 1992; Lyons y Beilock, 2012; Pletzer, Kronbichler, Nuerk, y Kerschbaum, 2015). Lo más probable es que los estudiantes gestionen estas reacciones fisiológicas como el aumento del ritmo cardíaco y los cambios respiratorios de manera negativa, lo que amplifica su autopercepción negativa y recrudece sus síntomas de ansiedad; esto puede inhibir su capacidad cognitiva para realizar tareas matemáticas.

Ansiedad matemática y memoria de trabajo

Algunos aspectos de las matemáticas parecen ser cognitivamente difíciles de adquirir para muchas personas; y algunas personas tienen discapacidades de aprendizaje en matemáticas específicas moderadas o severas. Pero no todas las discapacidades matemáticas son el resultado de dificultades cognitivas. Un número considerable de niños y adultos tienen ansiedad por las matemáticas, lo que puede interrumpir gravemente su aprendizaje y rendimiento matemático, tanto al evitar las actividades matemáticas como al sobrecargar e interrumpir la memoria de trabajo durante las tareas matemáticas.

Desde un punto de vista neurocientífico, Etchepareborda y Abad-Mas (2005) explican que la memoria de trabajo (también llamada memoria mediata, memoria a corto plazo o memoria funcional) es la que guarda y procesa durante breve tiempo la información que viene de los registros sensoriales y actúa sobre ellos y también sobre otros. Etchepareborda y Abad-Mas concluyen que:

> La afectación de los mecanismos básicos propios de la memoria de trabajo provocará una disfunción que influirá en un sinnúmero de procesos de aprendizaje formal académico: dificultad en el manejo de la dirección de la atención, dificultad en inhibir estímulos irrelevantes, dificultad en el reconocimiento de los patrones de prioridad, falta de reconocimiento de las jerarquías y significado de los estímulos (análisis y síntesis), impedimento en formular una intención, dificultad en reconocer y seleccionar las metas adecuadas para la resolución de un problema; imposibilidad de establecer un plan de consecución de logros, falta de análisis sobre las actividades necesarias para la consecución de un fin y dificultades para la ejecución de un plan, no logrando la monitorización ni la posible modificación de la tarea según lo planificado. (Etchepareborda y Abad-Mas, 2005, p.83)

Ashcraft y Kirk (2001) expusieron que los individuos con una alta ansiedad matemática demostraron tener una memoria de trabajo más pequeña, especialmente cuando fueron evaluados con una tarea de cálculo. Esta reducción de la capacidad de la memoria de trabajo condujo a un aumento pronunciado del tiempo de reacción y a un aumento de errores en los cálculos cuando la adición mental se realizaba simultáneamente con una tarea de carga de memoria. Los efectos de la reducción también se generalizaron a una tarea de transformación con uso intensivo de memoria. En general, los resultados demostraron que una variable de diferencia individual, la ansiedad matemática, afecta el rendimiento en línea en tareas relacionadas con las matemáticas y que este efecto es una interrupción transitoria de la memoria de trabajo. Los autores consideran un posible mecanismo subyacente a este efecto -la interrupción de los procesos ejecutivos centrales- y sugieren que las variables de diferencia individuales como la ansiedad matemática merecen una mayor atención empírica, especialmente en las evaluaciones de la capacidad y el funcionamiento de la memoria de trabajo.

Qin, Hermans, van Marle, Luo y Fernández (2009) mostraron que "el estrés agudo inducido resultó en una reducción significativa de la actividad relacionada con la memoria de trabajo y fue acompañado de una menor desactivación en las regiones cerebrales que se conocen conjuntamente como la red de modo por defecto". El estrés crónico, como percepciones repetidas de amenazas asociadas con un pobre rendimiento matemático, influye en la corteza prefrontal, causa el desramado y encogimiento de las dendritas, lo cual está relacionado con la rigidez cognitiva (McEwen et al., 2015). Con la disminución de la memoria de trabajo, así como la contracción crónica de las dendritas, se produce un deterioro no sólo en el rendimiento matemático, sino también en otros procesos cognitivos (McEwen et al., 2015). Cuando los individuos son hipervigilantes o anticipan el peligro, su capacidad de pensamiento abstracto se ve inhibida a favor de movilizar recursos para responder inmediatamente a una amenaza física percibida (Sapolsky, 2015).

La percepción de amenazas de estereotipo en el estudio de las matemáticas

Peper, Harvey, Mason, y Lin (2018) explican que muchos estudiantes tienen problemas al desempeñar tareas cognitivas como la aritmética mental cuando se encuentran o se perciben en situaciones de amenaza y hay diversos estudios que corroboran estas afirmaciones (Moore, Vine, Wilson y Freeman, 2012; Schmader, Hall y Croft, 2015). La ansiedad matemática generalmente se refiere a un conjunto de reacciones hacia las amenazas percibidas relacionadas con el desempeño en tareas matemáticas. Por ejemplo, el término amenaza de estereotipo se refiere a un tipo de disminución del rendimiento que se aplica cuando las personas tienen un rendimiento inferior al esperado en relación con su capacidad por el mero hecho de ser conscientes de un estereotipo negativo a cómo deben desempeñarse, por ejemplo, una niña estudiante puede rendir menos cuando es consciente del estereotipo de que "los niños son mejores que las niñas en matemáticas" (Maloney, Schaeffer y Beilock, 2013, p. 116). Cuando a las personas se les presenta una afirmación basada en estereotipos, que suponga una presión adicional para tener éxito o que amenace su autointegridad o su sentido de pertenencia, se provocan reacciones de ansiedad que reducen su rendimiento en las tareas matemáticas (Spencer, Logel y Davies, 2016).

Ramírez, Shaw y Maloney (2018, p. 9) ofrecen una lista de ejemplos de interpretaciones de amenazas:

● Estereotipos culturales (por ejemplo, "Las mujeres odian las matemáticas, así que yo también debo odiar las matemáticas"; Bieg, Goetz, Wolter y Hall, 2015).

● Estereotipos de creencias sociales en torno al aprendizaje obstruido (por ejemplo, "Si tienes problemas para aprender algo, es probable que no te vaya a ir muy bien"; Benjamin, Bjork y Schwartz, 1998; Koriat y Bjork, 2006; Stigler y Hiebert, 2004).

● Estereotipos de interacciones sociales en el hogar (por ejemplo, "Mis padres siempre me ayudan con la tarea de matemáticas porque no me siento muy cómodo haciéndola por mi cuenta"; Maloney, Ramírez, Gunderson, Levine y Beilock, 2015).

● Estereotipos de interacciones sociales en clase (por ejemplo, "Mi maestro se estresa mucho enseñando matemáticas"; Beilock, Gunderson, Ramírez y Levine, 2010).

● Estereotipos de enseñanza de pedagogía (por ejemplo, "Mi maestro no nos hace preguntas ni nos anima a pensar profundamente en las matemáticas porque cree que no todos pueden ser buenos en matemáticas"; Ramírez, Hooper, Kersting, Ferguson,y Yeager, 2018).

● Estereotipos de creencias sobre el significado de una mayor excitación fisiológica (por ejemplo, "Mi corazón está latiendo rápido, debo estar muy nervioso"; Jamieson, Nock, y Mendes, 2012).

Los efectos de la amenaza del estereotipo surgen cuando un individuo se siente en riesgo de confirmar un estereotipo negativo sobre él mismo o sobre su grupo y, en consecuencia, tiene un rendimiento inferior en tareas relevantes (Steele, 2010).

Diversos autores han tratado de desentrañar la actividad cerebral asociada a la ansiedad matemática. Para ello, algunos autores (Lamont, Swift, y Abrams, 2015; Ramirez, Shaw, et al., 2018) estudian las amenazas debidas a cogniciones basadas en hechos (p. ej., "Todavía no he aprendido cómo obtener la respuesta a ese problema matemático, sin embargo, soy capaz de aprender") frente a las debidas a cogniciones que son relevantes para los estereotipos (p. ej., "No se espera que tenga un buen desempeño debido a un estereotipo").

Recientemente se han publicado estudios como el de Peper, Harvey, Mason, y Lin (2018), que sugieren que la postura del cuerpo puede cambiar la respuesta a la amenaza de estereotipo ya que, según estos autores, un tipo de postura parece inhibir el rendimiento cognitivo mientras que la otra postura aumenta el rendimiento. Tras estudiar la actividad cerebral asociada con las reacciones de ansiedad matemática, proponen intervenciones que incluyen cambios ergonómicos en el lugar de trabajo (silla, ordenador, ratón), la transformación de los pensamientos autocríticos en pensamientos de empoderamiento, y tomar un descanso o hacer ejercicio, según convenga. Este tipo de tareas dan lugar a un aumento de la confianza, una disminución en los niveles de estrés y una mejora en la salud y el rendimiento. Los mismos autores afirman que igualmente de importante es enseñar a los participantes estrategias de autorregulación somática para reducir las quejas somáticas. Estos pueden incluir una respiración más lenta, entrenamiento de la variabilidad de la frecuencia cardíaca y relajación muscular. La capacitación debe ser generalizada y debe enseñarse cómo hacerlo en el hogar, la escuela o el trabajo.

Resiliencia matemática

Como se ha visto anteriormente, los sentimientos de aprensión, tensión o incomodidad experimentados por una gran cantidad de individuos al realizar actividades matemáticas o en un contexto matemático son emocionales, afectan a la memoria de trabajo y pueden explicarse a través de una apreciación de distintas formas de amenazas de estereotipos. Algunos autores plantaron una semilla hace años para fomentar el cambio de pensamiento y convertir situaciones prácticas y habituales que generan ansiedad a otras que construyan una situación positiva. Esta semilla ha crecido en un grupo de profesores e investigadores que trabajan para superar la ansiedad matemática y construir resiliencia matemática.

Este grupo usa la resiliencia matemática como concienciación. Afirman que todos nacemos con una capacidad innata de resiliencia, mediante la cual podemos desarrollar competencia social, habilidades para resolver problemas, conciencia crítica, autonomía y un sentido de propósito (Benard, 1995). Del mismo modo, todos nacemos con una capacidad innata de resiliencia matemática que se puede aplicar al aprendizaje de las matemáticas. Pero una gran cantidad de personas crecen en una cultura con una mentalidad fija prevalente (Dweck, 2000) en la que el bajo rendimiento se considera inevitable, y en lugar de aunar fuerzas y aumentar la fuerza de voluntad para resolver los problemas, no actúan y la situación no cambia (Tobias, 1991).

Johnston-Wilder & Lee (2010) realizaron un trabajo sobre el desarrollo de la resiliencia matemática donde se involucraron a varios maestros que llevaban a cabo proyectos de investigación-acción diseñados para reducir la ansiedad y desarrollar la resiliencia. En este trabajo, definieron la resiliencia matemática como "la capacidad de mantener la autoeficiencia frente a las amenazas personales o sociales al bienestar matemático" (Johnston-Wilder y Lee, 2010). Estos autores afirman que la resiliencia matemática necesariamente incluye salvaguardarse de las características habituales de la educación matemática que generan ansiedad matemática.

Actualmente hay una amplia variedad de grupos de trabajo dedicados trabajar la resiliencia matemática. Cabe destacar que, recientemente, Johnston-Wilder y Moreton (2018) han publicado una interesante serie de prácticas que pueden llevar a cabo los profesores para promover y desarrollar la resiliencia matemática. Este trabajo se basa en los resultados de un grupo de trabajo que formaron durante los meses de enero a julio de 2018 formaron con varios profesores y personas de la comunidad educativa. El trabajo se centró en desarrollar la conciencia de los maestros y profesores sobre las barreras afectivas para aprender las matemáticas, como la ansiedad y la evitación de las matemáticas, y en cómo desarrollar una mayor resiliencia en los estudiantes de matemáticas. Los conceptos clave que incluyen son: el modelo del cerebro del Dr. Daniel Siegel " Hand Model of the Brain" para comprender el impacto de la ansiedad en el pensamiento; el modelo de zona de crecimiento (Lee y Johnston-Wilder, 2018) como un medio para ayudar a los estudiantes a comprender y articular sus sentimientos al aprender matemáticas y, además, para promover la autoprotección y la seguridad de los estudiantes de matemáticas; también se incluyeron algunas técnicas de atención plena (mindfulness) para desencadenar una respuesta de relajación cuando un alumno comienza a experimentar ansiedad. La enseñanza para la resiliencia también implica que los docentes desarrollen en los alumnos: una mentalidad de crecimiento; fuerza de voluntad; conocimiento de cómo trabajar las matemáticas cuando se está está cansado y cómo conseguir apoyo; comprensión del significado, valor, relevancia personal y propósito de las matemáticas.

Estrategias de afrontamiento

El desarrollo de estrategias para reducir el estrés y regular las emociones permite a los estudiantes optimizar el rendimiento en muchas tareas cognitivas (Arroyo, Woolf, Burelson, Muldner, Rai y Tai, 2014). Por ejemplo, los estudiantes que tienen un autoconcepto positivo de su habilidad en matemáticas se desenvuelven mejor en las clases de matemáticas, posiblemente porque no atribuyen el desempeño deficiente en matemáticas como un hecho, sino que interpretan el fracaso como información y como una oportunidad para aprender y crecer. Un método para entrenar a los estudiantes a interpretar el desempeño deficiente en matemáticas es a través de la retroalimentación positiva. Shapiro, Williams y Hambarchyan (2013) han propuesto un Marco de Amenazas Múltiples como una herramienta para ilustrar cómo diferentes influencias personales y sociales impactan el interés y el desempeño de las niñas en el aprendizaje de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés). En sus experimentos 1 y 2, revelaron que las intervenciones del modelo a seguir fueron exitosas en la protección sólo contra las amenazas de estereotipos de grupo, y los experimentos 3 y 4 revelaron que las intervenciones de autoafirmación fueron exitosas en la protección sólo contra las amenazas de estereotipos de autoestima. La investigación proporciona una prueba experimental del Marco de amenazas múltiples en diferentes grupos estereotipados negativamente (estudiantes negros, estudiantes mujeres), diferentes dominios estereotipados negativamente (inteligencia general, STEM) y obtiene diferentes resultados. Esta investigación sugiere que las intervenciones deben abordar el rango de posibles estereotipos de amenazas para proteger eficazmente a las personas contra estas amenazas. A través de una apreciación de las distintas formas de amenazas de estereotipos y las formas en que las intervenciones trabajan para reducirlas, esta investigación pretende facilitar una comprensión más completa de la amenaza de estereotipos.

Para afrontar la situación de ansiedad matemática, hay múltiples posibilidades y técnicas innovadoras. En este estudio hemos mostrado algunas de ellas, como las que sugieren Peper, Harvey, Mason, y Lin (2018), sobre cómo la postura corporal puede cambiar la respuesta del cuerpo frente a la ansiedad matemática y también se ha considerado interesante incluir las aportaciones de Johnston-Wilder sobre cómo afrontarla, quién en el 2010 introdujo el concepto de resiliencia matemática que es el eje principal de sus estudios hasta la actualidad.

Debido a que los desafíos son omnipresentes, la resiliencia es esencial para el éxito en la escuela y en la vida. En este artículo revisamos algunas investigaciones (Tobias, 1991; Benard, 1995; Dweck, 2000; Johnston-Wilder y Lee, 2010; Johnston-Wilder y Moreton, 2018) que demuestran el impacto de la mentalidad de los estudiantes en su capacidad de recuperación frente a los desafíos en el aprendizaje de las matemáticas. Los estudiantes que creen (o se les enseña) que las habilidades intelectuales son cualidades que se pueden desarrollar (a diferencia de las cualidades que se fijan) tienden a mostrar un mayor rendimiento en las transiciones escolares desafiantes y mayores tasas de finalización en cursos de matemáticas. Desarrollar atributos sociales puede reducir la agresión y el estrés de los adolescentes en respuesta a la victimización o exclusión de sus compañeros, y puede mejorar el rendimiento escolar en el área de matemáticas. Por todo esto, las intervenciones psicológicas que cambian la mentalidad de los estudiantes son efectivas y los educadores deben fomentar estas mentalidades y crear resiliencia en los entornos educativos.

Además, el hecho de que a una persona le gusten las matemáticas o las tema influirá claramente en el hecho de que tome cursos de matemáticas más allá de la edad de finalización de la escuela obligatoria, y que siga carreras que requieran conocimientos matemáticos (Chipman, Krantz, y Silver, 1992; Brown et al., 2008). Por lo tanto, la ansiedad matemática es un problema de gran importancia para el futuro aprendizaje, desarrollo y uso de las habilidades matemáticas, y también es importante en sí misma, como causa de gran estrés y angustia para las personas que la padecen.

Cada vez son más los estudios que se están llevando a cabo para comprender cómo funciona el cerebro frente a las amenazas de estereotipos cuando se realizan tareas matemáticas. También son abundantes los avances que se han registrado en los últimas décadas, en parte gracias a las nuevas tecnologías que se disponen en el ámbito de la neurociencia, y que permiten realizar estudios como, por ejemplo, Bull, Espy, y Wiebe (2008) vieron que mediante análisis correlacionales y de regresión de la memoria visual a corto plazo y de trabajo que mostraban niños de preescolar, podían predecir específicamente el logro matemático de estos mismos sujetos en años posteriores, por esto, la posibilidad de una intervención temprana puede ser fundamental en el aprendizaje y en los logros matemáticos futuros.

Avances científicos

Respecto a los avances científicos en este campo de estudio, el continuo y rápido crecimiento de la tecnología aplicada a las neurociencias, para comprender el funcionamiento del cerebro, ha dado lugar a numerosos estudios y avances en el desarrollo de nuevas teorías sobre la ansiedad matemática. Por ejemplo, Young, Wu y Menon (2012) utilizaron un procedimiento relativamente nuevo, el IRM funcional (que se basa en imágenes por resonancia magnética), en su estudio con niños de 7 a 9 años de edad para comprender la base del desarrollo neurológico de la ansiedad matemática. Gracias a sus estudios, encontraron una actividad reducida en regiones del cerebro, que son típicamente activas durante el razonamiento matemático, y vieron que estos efectos eran específicos de la ansiedad matemática y no estaban relacionados con la ansiedad general, la inteligencia, la memoria de trabajo o la capacidad de lectura.

Expertos en neuroimagen y en modelado predictivo también están tratando de ver como la ansiedad matemática afecta al cerebro. El objetivo del modelado predictivo es típicamente estimar un estado o rasgo (fenotípico) característico de un individuo a partir de sus datos de neuroimagen. Erickson (2015), en su tesis doctoral sobre ansiedad matemática y metacognición en la educación matemática, señala que Danker y Anderson (2007) sugieren que los modelos cognitivos son capaces de distinguir entre la ansiedad matemática y otras representaciones en la corteza parietal y la corteza prefrontal; su resultado sorprendente fue que ambas regiones del cerebro estaban activas pero con diferentes niveles de activación (p. 23). Otros investigadores han examinado varios tipos de actividad cerebral asociada con la ansiedad matemática debido a interpretaciones evaluativas negativas o a evaluaciones de amenazas como "Nunca me motivaré para aprender matemáticas porque no siento que las matemáticas sean útiles", que se centra en la amígdala, la corteza parietal posterior y la corteza prefrontal dorsolateral.

Ansiedad y ansiedad matemática

La ansiedad matemática se ha definido como "un sentimiento de tensión y ansiedad que interfiere con la manipulación de los números y la resolución de problemas matemáticos en la vida cotidiana y las situaciones académicas" (Richardson y Suinn, 1972) pero lo que no está del todo claro es si se trata de un problema de ansiedad general o hay una forma específica de ansiedad para las matemáticas con características propias.

Pese a que diversos estudios muestran que la ansiedad matemática es separable de otras formas de ansiedad, otros autores sostienen que esta afirmación no se puede determinar. Varios estudios sugieren que la ansiedad matemática está más estrechamente relacionada con otras medidas de ansiedad, especialmente la ansiedad en los exámenes, que con las medidas de capacidad y rendimiento académico (Hembree, 1990; Hopko, Ashcraft et al., 1998). Estos estudios suelen mostrar correlaciones entre las medidas de ansiedad en matemáticas y la ansiedad en los exámenes. Sin embargo, la ansiedad en las matemáticas no puede reducirse ni a ansiedad en los exámenes ni a ansiedad general. Las personas pueden mostrar ansiedad en el desempeño no sólo con respecto a los exámenes y pruebas, sino también con respecto a una variedad de temas escolares o de la vida. Por lo general, se supone que las matemáticas provocan reacciones emocionales más fuertes, y especialmente ansiedad, que la mayoría de las otras materias académicas, pero esta suposición todavía necesita estudios más detallados y ser investigada con más profundidad (Punaro y Reeve, 2012). Aunque, la suposición general es que las personas muestran más ansiedad y actitudes negativas hacia las matemáticas que hacia otras materias académicas, no ha habido apenas estudios que comparen directamente las actitudes hacia las matemáticas con las de otras materias. Dowker, Sarkar y Looi (2016) afirman que, ciertamente, existe ansiedad hacia realizar otras tareas que no son las matemáticas, especialmente cuando el desempeño de estas tareas se lleva a cabo frente a otras personas. Se ha descubierto que las personas con dislexia muestran ansiedad acerca de la alfabetización (Carroll & Iles, 2006). Es bien sabido que el aprendizaje y uso de lenguas extranjeras, especialmente por parte de los adultos, a menudo se ve inhibido por la ansiedad (Horwitz et al., 1986). Los estudiantes de música, e incluso los músicos exitosos, a menudo demuestran ansiedad por la interpretación musical (Kenny, 2011). Punaro y Reeve (2012) sugieren que aunque las matemáticas no son la única asignatura que provoca ansiedad, la ansiedad puede ser más severa y, posiblemente, afectar más al rendimiento para las matemáticas que para otras asignaturas.

Dowker, Sarkar y Looi (2016) dicen que las actitudes hacia las matemáticas, incluso las actitudes negativas, no pueden equipararse con la ansiedad matemática, ya que las primeras se basan en factores motivacionales y cognitivos, mientras que la ansiedad es un factor específicamente emocional. Sin embargo, las medidas de actitud tienden a correlacionarse bastante estrechamente con la ansiedad matemática. Esto puede ser porque las personas que piensan que son malas en matemáticas son más propensas a estar ansiosas. La mayoría de los estudios indican una relación negativa entre el autoconcepto matemático y la ansiedad matemática (Hembree, 1990), pero en esta relación es difícil establecer la dirección de la causalidad: ¿lleva la ansiedad a una falta de confianza en la propia capacidad matemática, o la falta de confianza en la propia capacidad matemática hace que uno se sienta más ansioso?

DISCUSIÓN

Tal y como se ha planteado, esta problemática parece afectar a nivel global y son numerosos los estudios que se están llevando a cabo actualmente. Carey, Devine, Hill, Dowker, McLellan y Szucs (2019) opinan que la ansiedad matemática puede estar contribuyendo a un nivel relativamente bajo en aritmética matemática en los adultos del Reino Unido. Ersozlu y Karakus (2019), en su análisis bibliométrico, han visto que pese a la prevalencia de los EE.UU en la literatura de ansiedad matemática, otros países como Inglaterra, Alemania, España, Canadá, Turquía, Italia, Australia, Israel, Austria, Países Bajos, República Popular China y Singapur también muestran gran actividad de investigación en este área. Según los años de publicación de los estudios, Inglaterra, Italia, Holanda, España e Israel han tenido las publicaciones más recientes sobre ansiedad matemática, y esto indica que hay una preocupación por parte de estos países sobre esta problemática actual.

La literatura cognitiva muestra cómo el rendimiento matemático depende críticamente de la memoria de trabajo y que las personas que se ponen muy nerviosas al hacer matemáticas no pueden demostrar sus habilidades en el área matemática por el miedo que sienten (Ashcraft y Krause, 2007). Esto no debe ser confundido con una dificultad cognitiva, porque como hemos visto, una posibilidad es que se trate de un fenómeno fundamentalmente emocional. Diversos autores (Steele, 2010; Beilock, Gunderson, Ramírez y Levine, 2010; Maloney, Ramírez, Gunderson, Levine y Beilock, 2015; Ramírez, Hooper, Kersting, Ferguson, y Yeager, 2018) han estudiado cómo la percepción de los estereotipos culturales, sociales, de género, etc. pueden estar asociados a la ansiedad matemática y al rendimiento matemático.

Sobre que existe una relación entre la ansiedad matemática y el rendimiento matemático no hay duda, pero, ¿es la ansiedad matemática separable de otras formas de ansiedad? De momento, la pregunta está en el aire. Como se ha visto en los estudios, no está claro hasta qué punto la ansiedad matemática causa dificultades matemáticas, y hasta qué punto las dificultades matemáticas y las experiencias resultantes de fracaso causan ansiedad matemática; existen pruebas significativas de que la ansiedad matemática interfiere con la realización de tareas matemáticas, especialmente aquellas que requieren memoria de trabajo sin embargo, es difícil definir la prevalencia de la ansiedad matemática, ya que en las medidas de ansiedad matemática no hay un límite claro establecido sobre si un individuo padece ansiedad matemática o no (Devine, Hill, Carey, y Szűcs, 2018). Desde una perspectiva aplicada, pedagógica, investigadora y diagnóstica es necesario avanzar en la ordenación de los indicadores de la ansiedad matemática. La urgencia de esta labor es ampliamente reconocida desde un punto de vista educativo, pues la educación inclusiva y personalizada de los niños y adolescentes con ansiedad matemática necesita resolver este problema para que esos alumnos puedan realizar sus estudios adecuadamente. Sin duda, numerosos investigadores (por ejemplo Ashcraft y Krause, 2007; Carey, Hill, Devine, y Szűcs, 2016; Chang y Beilock, 2016; Dowker, Sarkar y Looi, 2016) mantienen que los individuos a los que las matemáticas les generan preocupación se caracterizan por una fuerte tendencia a evitar las matemáticas, que en última instancia, reduce su competencia matemática y les excluye importantes trayectorias profesionales. Recientemente se han desarrollado varias intervenciones para aliviar la relación entre la ansiedad matemática y el bajo rendimiento matemático. Es posible que las futuras intervenciones podrían beneficiarse si se enfocan de una forma integral y se actúa a la vez, tanto en lo que se corresponde con en el plano individual como en aquello que se corresponda con los factores ambientales que rodean a los individuos, ya que las investigaciones actuales sobre el comportamiento y la psicofisiología revela que el vínculo entre la ansiedad matemática y el rendimiento matemático está relacionado con factores individuales (cognitivos, afectivos/fisiológicos, motivacionales) y ambientales (sociales/contextuales), (Chang y Beilock, 2016).

Finalmente, en base a lo expuesto hasta aquí, surge de forma natural establecer una serie de líneas de trabajo:

- Sería conveniente que los padres y los maestros intentasen modelar actitudes positivas hacia las matemáticas y evitar expresar actitudes negativas hacia los niños, sin embargo, esto puede ser difícil si los padres o los profesores están muy preocupados por las matemáticas. Esto es un doble problema, porque no sólo no ayuda a solucionar el problema de ansiedad matemática del niño, sino que podría agravarlo porque, como se ha visto en este documento, la ansiedad de los padres y profesores se puede trasladar a los niños fácilmente.

- Podría ser ventajoso en el rendimiento aplicar técnicas de relajación antes de los exámenes de matemáticas para bajar el nivel de ansiedad de los alumnos. Al obtener mejores resultados académicos podría disminuir la ansiedad matemática, y así sería más fácil salir del círculo vicioso.

- Incrementar y mejorar la divulgación y promoción de las matemáticas en los medios de comunicación por ser interesantes e importantes podría ayudar a combatir los estereotipos de su aprendizaje y a facilitar la comprensión de éstas.

- Además, habría que considerar que las matemáticas tienen diversos componentes (cálculo, estadística, geometría, análisis, conceptos abstractos, resolución de problemas...) y que diferentes estrategias pueden ser efectivas atendiendo a los diferentes componentes.

CONCLUSIÓN

En este artículo se ha realizado una revisión del tema de la ansiedad matemática que sufren muchas personas, y en especial los jóvenes, cuando tienen que enfrentarse a una tarea matemática. Se han incluido artículos científicos actuales donde se explican los estudios más recientes y las tendencias que se están realizando en el ámbito internacional, ya que la investigación sobre la ansiedad matemática está en continuo desarrollo y cada vez se realizan más investigaciones a nivel global. También se ha visto que esta problemática es una de las más importantes del campo de la enseñanza de las matemáticas y este documento se ha presentado como una revisión descriptiva que proporcione al lector una puesta al día sobre conceptos útiles referidos a la ansiedad matemática, y para que los docentes, psicopedagogos y orientadores reflexionen cómo abordar nuevas pedagogías en este área teniendo en cuenta, por ejemplo, de acuerdo a lo que hemos visto, que es muy probable que las intervenciones tempranas para niños con dificultades matemáticas puedan ayudar a prevenir una espiral viciosa, donde las dificultades matemáticas causan ansiedad, lo que causa dificultades adicionales con las matemáticas.

En base a todas estas consideraciones, es importante que los educadores, las familias y los orientadores hagan un esfuerzo para que el miedo y la ansiedad de los individuos hacia las matemáticas no tengan un efecto negativo en sus logros en matemáticas, motivarles, darles apoyo y mantener altas sus expectativas dándoles los incentivos apropiados. Mejorar las actitudes hacia las matemáticas significa no sólo reducir la ansiedad y otras emociones negativas hacia las matemáticas, sino también aumentar las emociones positivas hacia las matemáticas.

Otra conclusión importante es la necesidad de ampliar la investigación sobre la eficacia de las diferentes estrategias para mejorar las actitudes ante las matemáticas.

REFERENCIAS

Arroyo, I., Woolf, B. P., Burelson, W., Muldner, K., Rai, D., y Tai, M. (2014). A multimedia adaptive tutoring system for mathematics that addresses cognition, metacognition and affect. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 24(4), 387-426.

Ashcraft, M. H., y Kirk, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. Journal of experimental psychology: General, 130(2), 224.

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. Current directions in psychological science, 11(5), 181-185.

Ashcraft, M. H., y Krause, J. A. (2007). Working memory, math performance, and math anxiety. Psychonomic bulletin & review, 14(2), 243-248.

Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., y Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. Proceedings of the National Academy of Sciences, 107(5), 1860-1863.

Benard, B. (1995). Fostering Resilience in Children. ERIC Digest.

Benjamin, A. S., Bjork, R. A., y Schwartz, B. L. (1998). The mismeasure of memory: when retrieval fluency is misleading as a metamnemonic index. Journal of Experimental Psychology: General, 127(1), 55.

Bieg, M., Goetz, T., Wolter, I., y Hall, N. C. (2015). Gender stereotype endorsement differentially predicts girls' and boys' trait-state discrepancy in math anxiety. Frontiers in psychology, 6, 1404.

Brown, M., Brown, P., y Bibby, T. (2008). "I would rather die": reasons given by 16-year-olds for not continuing their study of mathematics. Research in Mathematics Education, 10(1), 3-18.

Bull, R., Espy, K. A., y Wiebe, S. A. (2008). Short-term memory, working memory, and executive functioning in preschoolers: Longitudinal predictors of mathematical achievement at age 7 years. Developmental neuropsychology, 33(3), 205-228.

Carey, E., Hill, F., Devine, A., y Szücs, D. (2016). The chicken or the egg? The direction of the relationship between mathematics anxiety and mathematics performance. Frontiers in psychology, 6, 1987.

Carey, E., Hill, F., Devine, A., y Szűcs, D. (2017). The modified abbreviated math anxiety scale: A valid and reliable instrument for use with children. Frontiers in psychology, 8, 11.

Carey, E., Devine, A., Hill, F., Dowker, A., McLellan, R., y Szucs, D. (2019). Understanding Mathematics Anxiety: Investigating the experiences of UK primary and secondary school students.

Carroll, J. M., y Iles, J. E. (2006). An assessment of anxiety levels in dyslexic students in higher education. Br. J. Educ. Psychol. 76, 651–662.

Chang, H., y Beilock, S. L. (2016). The math anxiety-math performance link and its relation to individual and environmental factors: A review of current behavioral and psychophysiological research. Current Opinion in Behavioral Sciences, 10, 33-38.

Chipman, S. F., Krantz, D. H., y Silver, R. (1992). Mathematics anxiety and science careers among able college women. Psychological science, 3(5), 292-296.

Danker, J. F., y Anderson, J. R. (2007). The roles of prefrontal and posterior parietal cortex in algebra problem solving: A case of using cognitive modeling to inform neuroimaging data. Neuroimage, 35(3), 1365-1377.

Devine, A., Hill, F., Carey, E., y Szűcs, D. (2018). Cognitive and emotional math problems largely dissociate: Prevalence of developmental dyscalculia and mathematics anxiety. Journal of Educational Psychology, 110(3), 431.

Dowker, A., Sarkar, A., y Looi, C. Y. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years?. Frontiers in psychology, 7, 508.

Dweck, C. S. (2000). Self-Theories: Their Role in Motivation, Personality, and Development. Essays in Social Psychology.

Etchepareborda, M. C., y Abad-Mas, L. (2005). Memoria de trabajo en los procesos básicos del aprendizaje. Revista de neurología, 40(1), 79-83.

Erickson, S. L. (2015). Math Anxiety and Metacognition in Mathematics Education (Tesis Doctoral, UC Merced).

Ersozlu, Z., y Karakus, M. (2019). Mathematics anxiety: mapping the literature by bibliometric analysis. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15, 2.

Faust, M. W. (1992). Analysis of physiological reactivity in mathematics anxiety. (Tesis Doctoral sin publicar). Bowling Green State University, Bowling Green, OH.

Gresham, G. (2009). An Examination of Mathematics Teacher Efficacy and Mathematics Anxiety in Elementary Pre-service Teachers. Journal of Classroom Interaction, 44.

Gunderson, E. A., Park, D., Maloney, E. A., Beilock, S. L., y Levine, S. C. (2018). Reciprocal relations among motivational frameworks, math anxiety, and math achievement in early elementary school. Journal of Cognition and Development, 19(1), 21-46.

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. Journal for research in mathematics education, 33-46.

Hill, F., Mammarella, I. C., Devine, A., Caviola, S., Passolunghi, M. C., y Szűcs, D. (2016). Maths anxiety in primary and secondary school students: Gender differences, developmental changes and anxiety specificity. Learning and Individual Differences, 48, 45-53.

Hopko, D. R., Ashcraft, M. H., Gute, J., Ruggiero, K. J., y Lewis, C. (1998). Mathematics anxiety and working memory: Support for the existence of a deficient inhibition mechanism. Journal of anxiety disorders, 12(4), 343-355.

Horwitz, E. K., Horwitz, M. B., y Cope, J. (1986). Foreign language classroom anxiety. The Modern language journal, 70(2), 125-132.

Jamieson, J. P., Nock, M. K., y Mendes, W. B. (2012). Mind over matter: Reappraising arousal improves cardiovascular and cognitive responses to stress. Journal of Experimental Psychology: General, 141(3), 417.

Johnston-Wilder, S., y Lee, C. (2010). Developing mathematical resilience.

Johnston-Wilder, S., y Moreton, J. (2018). Developing Mathematical-Resilience-Promoting Practices in Teachers.

Kenny, D. (2011). The psychology of music performance anxiety. OUP Oxford.

Koriat, A., & Bjork, R. A. (2006). Mending metacognitive illusions: A comparison of mnemonic-based and theory-based procedures. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 32(5), 1133.

Krinzinger, H., Kaufmann, L., y Willmes, K. (2009). Math anxiety and math ability in early primary school years. Journal of psychoeducational assessment, 27(3), 206-225.

Lamont, R. A., Swift, H. J., y Abrams, D. (2015). A review and meta-analysis of age-based stereotype threat: Negative stereotypes, not facts, do the damage. Psychology and aging, 30(1), 180.

Lee, C., y Johnston-Wilder, S. (2018). Getting into and staying in the Growth Zone.

Liebert, R. M., y Morris, L. W. (1967). Cognitive and emotional components of test anxiety: a distinction and some initial data. Psychol. Rep. 20, 975–978

Lyons, I. M., y Beilock, S. L. (2012). When math hurts: math anxiety predicts pain network activation in anticipation of doing math. PloS one, 7(10), e48076.

Ma, X., y Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A meta-analysis. Journal for research in mathematics education.

Ma, X., y Xu, J. (2004). The causal ordering of mathematics anxiety and mathematics achievement: a longitudinal panel analysis. Journal of adolescence, 27(2), 165-179.

Málaga Diéguez, I. (2014). 1. Los trastornos del aprendizaje. Definición de los distintos tipos y sus bases neurobiológicas.

Maloney, E. A., y Beilock, S. L. (2012). Math anxiety: Who has it, why it develops, and how to guard against it. Trends in cognitive sciences, 16(8), 404-406.

Maloney, E. A., Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. C., y Beilock, S. L. (2015). Intergenerational effects of parents' math anxiety on children's math achievement and anxiety. Psychological Science, 26(9), 1480-1488.

Maloney, E. A., Schaeffer, M. W., &yBeilock, S. L. (2013). Mathematics anxiety and stereotype threat: shared mechanisms, negative consequences and promising interventions. Research in Mathematics Education, 15(2), 115-128.

Mammarella, I. C., Hill, F., Devine, A., Caviola, S., y Szűcs, D. (2015). Math anxiety and developmental dyscalculia: a study on working memory processes. Journal of clinical and experimental neuropsychology, 37(8), 878-887.

McEwen, B. S., Bowles, N. P., Gray, J. D., Hill, M. N., Hunter, R. G., Karatsoreos, I. N., y Nasca, C. (2015). Mechanisms of stress in the brain. Nature neuroscience, 18(10), 1353.

Moore, L. J., Vine, S. J., Wilson, M. R., y Freeman, P. (2012). The effect of challenge and threat states on performance: An examination of potential mechanisms. Psychophysiology, 49(10), 1417-1425.

OECD (2013), PISA 2012 Results: Ready to Learn (Volume III): Students' Engagement, Drive and Self-Beliefs, PISA, OECD Publishing, Paris

Peper, E., Harvey, R., Mason, L., y Lin, I. M. (2018). Do better in math: How your body posture may change stereotype threat response. NeuroRegulation, 5(2), 67-67.

Pletzer, B., Kronbichler, M., Nuerk, H. C., y Kerschbaum, H. H. (2015). Mathematics anxiety reduces default mode network deactivation in response to numerical tasks. Frontiers in human neuroscience, 9, 202.

Punaro, L., y Reeve, R. (2012). Relationships between 9-year-olds' math and literacy worries and academic abilities. Child Development Research, 2012.

Qin, S., Hermans, E. J., van Marle, H. J., Luo, J., y Fernández, G. (2009). Acute psychological stress reduces working memory-related activity in the dorsolateral prefrontal cortex. Biological psychiatry, 66(1), 25-32.

Ramirez, G., Hooper, S. Y., Kersting, N. B., Ferguson, R., y Yeager, D. (2018). Teacher math anxiety relates to adolescent students' math achievement. AERA Open, 4(1), 2332858418756052.

Ramirez, G., Shaw, S. T., y Maloney, E. A. (2018). Math anxiety: Past research, promising interventions, and a new interpretation framework. Educational Psychologist, 53(3), 145-164.

Richardson, F. C., y Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: psychometric data. Journal of counseling Psychology, 19(6), 551.

Sapolsky, R. M. (2015). Stress and the brain: individual variability and the inverted-U. Nature neuroscience, 18(10), 1344.

Schmader, T., Hall, W., y Croft, A. (2015). Stereotype threat in intergroup relations. APA handbook of personality and social psychology, 2, 447-471.

Shapiro, J. R., Williams, A. M., y Hambarchyan, M. (2013). Are all interventions created equal? A multi-threat approach to tailoring stereotype threat interventions. Journal of Personality and Social Psychology, 104(2), 277.

Spencer, S. J., Logel, C., y Davies, P. G. (2016). Stereotype threat. Annual review of psychology, 67, 415-437.

Steele, C. M. (2011). Whistling Vivaldi: How stereotypes affect us and what we can do. WW Norton & Company.

Stigler, J. W., y Hiebert, J. (2004). Improving mathematics teaching. Educational leadership, 61(5), 12-17.

Thomas, G., y Dowker, A. (2000, September). Mathematics anxiety and related factors in young children. In British Psychological Society Developmental Section Conference.

Tobias, S. (1978). Overcoming math anxiety. New York: W. W. Norton & Company, Inc.

Tobias, S. (1991). Math mental health: Going beyond math anxiety. College Teaching, 39(3), 91-93.

Vukovic, R. K., Kieffer, M. J., Bailey, S. P., y Harari, R. R. (2013). Mathematics anxiety in young children: Concurrent and longitudinal associations with mathematical performance. Contemporary educational psychology, 38(1), 1-10.

Vukovic, R. K., Roberts, S. O., y Green Wright, L. (2013). From parental involvement to children's mathematical performance: The role of mathematics anxiety. Early Education & Development, 24(4), 446-467.

Wang, Z., Lukowski, S. L., Hart, S. A., Lyons, I. M., Thompson, L. A., Kovas, Y., ... y Petrill, S. A. (2015). Is math anxiety always bad for math learning? The role of math motivation. Psychological science, 26(12), 1863-1876.

Wigfield, A., y Meece, J. L. (1988). Math anxiety in elementary and secondary school students. Journal of educational Psychology, 80(2), 210.

Young, C. B., Wu, S. S., y Menon, V. (2012). The neurodevelopmental basis of math anxiety. Psychological Science, 23(5), 492-501.

María Sagasti Escalona
Universidad de Almería, España
mariasagasti@gmail.com

Santágueda Villanueva, M. y Lorenzo-Valentín, G. (2019). Historia de las matemáticas para la formación inicial de maestros. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 2*(2), pp. 19-32

ISSN: 2603-9982

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS

María Santágueda Villanueva, Universitat Jaume I, España

Gil Lorenzo-Valentín, Universitat Jaume I, España

Resumen

Gran parte del alumnado que nos encontramos en las aulas del grado de maestro o maestra en educación primaria es desconocedor de los hechos históricos que ocurrieron alrededor del personaje que produjo el contenido matemático que trabajamos, ni tampoco las consecuencias que se han plasmado en el currículo que trabajarán con sus futuros alumnos y alumnas. Siguiendo la teoría de Jankvist (2009) y la experiencia de Furinghetti (2007), emulamos una pequeña experiencia con nuestro alumnado para observar cómo es de útil la historia matemática en el momento de enseñar y aprender matemáticas La consecuencia principal ha sido que nuestro alumnado fue más consciente del proceso histórico-evolutivo de las matemáticas y su perfil más humano y dinámico reforzando así las múltiples miradas que su futuro alumnado pueda tener sobre los contenidos matemáticos.

Palabras clave*: matemáticas, didáctica, grado universitario, enseñanza primaria, historia.*

History of mathematics for the formation of teachers

Abstract

The great part of the students of the grade of teacher in primary education is unknowingly of contemporary historical events to the personages who developed certain mathematical content, nor the consequences that have been shaped in the curriculum that will work with their future students. We use the theory of Jankvist (2009) and the experience of Furinghetti (2007), we emulate a small experience with our students to observe how useful mathematical history is when teaching and learning mathematics. The main consequence was that our students were more aware of the historical-evolutionary process of mathematics and their more human and dynamic profile thus reinforcing the multiple looks that your future student may have about mathematical content.

Keywords*: mathematics, didactics, degrees, primary education, history.*

Recibido: 09/05/2019; Aceptado: 04/09/2019

INTRODUCCIÓN

El alumnado que recibimos en nuestro grado, mayoritariamente, desconoce esta historia "matemática" y también las consecuencias que han producido en el currículum que trabajarán en un futuro. Con esta pequeña propuesta, se pretende que nuestro alumnado del Grado de maestro/a de educación primaria vea la historia matemática como una herramienta para sus futuras clases. Siguiendo la teoría de Jankvist (2009), intentamos que, con esta pequeña experiencia, nuestro alumnado vea cómo de útil es la historia de las matemáticas para enseñar y aprender precisamente esta disciplina. Como dice Guzmán (1992) creemos que la historia les puede servir para enmarcar los diferentes contenidos que se trabajan de esta materia y responde al por qué de la importancia de estos contenidos.

Nuestra experiencia es similar a la realizada por Furinghetti (2007) donde el autor explica que no podemos ignorar el problema de la preparación de nuestros futuros maestros y maestras en la historia de las matemáticas. Procuramos que la historia se introduzca en nuestro curso como un *artefacto*, según Verillon y Rabardel (1995), un *artefacto* que se convierte en una herramienta cuando los usuarios pueden usarla para sus propios fines.

La propuesta metodológica que presentamos se llevó a cabo en el primer semestre del curso 2017/2018, y con ella nuestro alumnado fue más consciente del proceso histórico-evolutivo de las matemáticas, de los grandes avances científicos que se han realizado y de que la historia puede ser un instrumento motivador, dinamizador y que dé sentido a lo que se está trabajando en el aula de primaria.

POR QUÉ Y CÓMO NOS SIRVE LA HISTORIA MATEMÁTICA PARA ENSEÑAR Y APRENDER MATEMÁTICAS

En el artículo de Jankvist (2009) se explica de forma teórica el por qué y cómo usar la historia de las matemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de las mismas, así como las interrelaciones entre los argumentos a favor y en contra de usarla. La siguiente sección queremos hacer una síntesis de lo que se expone en este artículo.

Para Jankvist el hecho de usar la historia en la metodología habitual de la clase de matemáticas atiende a dos escenarios distintos: uno es el uso de la historia como herramienta que permita mejorar la actitud del estudiantado frente a las matemáticas y el otro es el uso de la historia como objetivo en sí misma, queriendo conseguir que el alumnado conozca hechos históricos matemáticos.

Los argumentos que da Jankvist sobre el uso de la historia como herramienta, pone la atención sobre cómo se aprende matemáticas, pudiendo ser ésta un factor motivador para los y las estudiantes en su aprendizaje y estudio de las matemáticas. Por ejemplo, que los y las estudiantes conozcan los diferentes contextos históricos de aquellas matemáticas que están trabajando puede ayudarles a mejorar o al menos mantener el interés por la materia (así lo determinan, Farmaki y Paschos, 2007; Taimina, 2004; Tattersall y McMurran, 2004), también humanizar y desdramatizar las matemáticas (Russ et al., 1991). Descubrir que precisamente donde se tienen dificultades en la materia también supusieron quebraderos de cabeza para matemáticos en tiempos pretéritos (recogido por, Bakker & Gravemeijer, 2006; Bartolini Bussi y Bazzini, 2003; Fauvel, 199; Tzanakis y Thomaidis, 2000), consuela y da perspectiva al esfuerzo que hubo que hacer para "crear" los contenidos matemáticos que ahora les suponen una dificultad (Bakker y Gravemeijer, 2006).

Para Jankvist, además de tener estos efectos motivantes y más afectivos, la historia también puede desempeñar el papel de una herramienta cognitiva para apoyar el aprendizaje real de las matemáticas. Por ejemplo, un argumento afirma que la historia puede mejorar el aprendizaje y la enseñanza al proporcionar un punto de vista o modo de presentación diferente (por ejemplo, Helfgott, 2004; Jahnke, 2001; Kleiner, 2001). Otros argumentos dicen que una fenomenología histórica puede preparar el desarrollo de una trayectoria de aprendizaje hipotética, o que la historia "puede ayudarnos a mirar a través de los ojos de los estudiantes" (Bakker 2004).

Según Jankvist la categoría de argumentos de la historia como objetivo contiene los que afirman que aprender aspectos de la historia de las matemáticas tiene un propósito en sí mismo. Se ha de tener en cuenta que, el hecho de referirse a la historia de las matemáticas como una meta en sí misma, no debe confundirse con el conocimiento de la historia de las matemáticas en general como un tema independiente. El enfoque está en los aspectos de desarrollo y evolución de las matemáticas como disciplina.

En este sentido, Jankvist (2009) considera, por ejemplo, que la historia de las matemáticas es una meta para mostrar al alumnado que las matemáticas existen y evolucionan en el tiempo y el espacio (por ejemplo, Tzanakis & Thomaidis, 2000; Barabash y Guberman-Glebov, 2004); que es una disciplina que ha experimentado una evolución y no algo que ha surgido de la nada (por ejemplo, Niss y Jensen, 2002; Philippou y Christou, 1998); que los seres humanos han participado en esta evolución (por ejemplo, Gulikers y Blom, 2001; Thomaidis y Tzanakis, 2007); que las matemáticas han evolucionado a través de muchas culturas diferentes a lo largo de la historia, y que estas culturas han tenido una influencia en la configuración de las matemáticas, y viceversa (por ejemplo, Tzanakis y Thomaidis, 2000).

Desde el punto de vista de la historia como objetivo, conocer la historia de las matemáticas no es una herramienta principal para aprender matemáticas mejor y más a fondo. Al usar la historia como una meta, el aprendizaje de los aspectos evolutivos de las matemáticas sirve en sí mismo para ilustrar otros aspectos históricos de la disciplina.

LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS COMO RECURSO DIDÁCTICO

Si profundizamos un poco más en el recurso de la historia de las matemáticas, Yves Chevallard, en 1991, dice que el docente ha de tener la capacidad suficiente para adaptar el objeto del saber sabio a su alumnado y que estos puedan llegar a completar el aprendizaje del mismo interiorizándolo. También, en 1981 Freudenthal se plantea la necesidad del conocimiento de la historia de las matemáticas por parte de los docentes y cuál debería ser el uso de la historia en esta materia. Sugiere que la historia facilita la inmersión en aquello que se va a enseñar y aprender. Guzmán (1992) afirma que la historia sirve para enmarcar los diferentes contenidos que se trabajan y responde al por qué de la importancia de estos proporcionando unas aplicaciones de cada uno de ellos. Para hacer esto posible propone complementar la formación de los docentes en historia de la matemática para, de este modo, entender las dificultades que llevaron a desarrollar nuevos conceptos. Además, observa la historia de las matemáticas como un recurso de aplicación obligatoria, ya que puede ser de ayuda para la motivación del alumnado, entre otros aspectos.

En primer lugar, Gómez (1994) propone un análisis de los elementos por separado de la enseñanza de las matemáticas y de la historia de esta disciplina. Con este análisis lo que pretende es encontrar todas las posibles relaciones entre la historia de las matemáticas y su enseñanza, ya que hasta el momento considera que no se ha matizado esta relación.

Existen otros autores como González-Urbaneja (2004) que indican de que la historia de las matemáticas facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje en la asignatura de matemáticas, es fuente de numerosos materiales didácticos que fomentan “el recreo intelectual”, y sirve de enriquecimiento cultural a la enseñanza de esta materia, favoreciendo la interdisciplinariedad en el currículo; también Sánchez (1997) propone que el aprendizaje de las matemáticas debe empezar por plantear un problema que satisfaga unas necesidades prácticas o técnicas del mismo modo al que los grandes matemáticos/as tuvieron que dar respuesta; o Lupiáñez (2002) que expone algunas de las aplicaciones de la historia de las matemáticas y cómo incorporar la historia de las mismas en el aula. Todos ellos vienen a reforzar la idea del uso de la historia de las matemáticas como recurso para utilizar en el aula de primaria.

Jankvist (2009) explica el uso de la historia para diseñar material. Por ejemplo, esa historia puede servir como fuente de inspiración para un diseñador determinado de materiales didácticos, incluidos libros de texto, hojas de trabajo, etc., (así lo reflejan: van Maanen, 1997; Gravemeijer y Doorman, 1999; Radford, 2000b; Kleiner, 2001; Streefland, 2003; Van Amerom, 2003; Fung, 2004; Bakker y Gravemeijer, 2006; Barbin, 2007). Es posible que estos diseñadores no estén interesados en restringirse a usar la historia como herramienta o como objetivo. Posiblemente, querrían hacer ambas cosas. Sin embargo, aunque la categorización puede no abarcar todos los argumentos de diseño de material didáctico para el uso de la historia, aún puede tener algo que ofrecer al diseñador del material didáctico. Por ejemplo, conocer las diferentes interrelaciones de los *por qué* y *cómo* puede ayudar a los diseñadores de materiales a elegir un enfoque para usar la historia que se adapte a su propósito. En cualquier caso, las categorías de *por qué* y *cómo* y la discusión de sus interconexiones presentadas en el artículo de Jankvist (2009) aún pueden usarse para analizar el material producido por un diseñador determinado, por ejemplo, como una forma de revelar el propósito del diseñador de usar la historia. Pero, lo que es más importante, también puede ser una forma de explicar en qué medida el diseñador, al elegir un enfoque determinado, descarta algunos de los *por qué* de usar la historia.

Weldeana y Abraham (2014) explican la experiencia de Mac y Bhaird (2009), que consistía en evaluar el impacto de introducir la historia de las matemáticas al alumnado que había tenido dificultades con la materia. Se produce un cambio ya que pasan de unas matemáticas más enfocadas en la memorización de reglas y procedimientos a comprender los contenidos que están trabajando. La historia de las matemáticas les ha proporcionado un enfoque alternativo para enfrentarse a la resolución de los problemas.

Por otro lado, la historia proporciona problemas de contexto que promueven el pensamiento del alumnado en la resolución de problemas y la escritura reflexiva (Katz, 2000). En el estudio de Weldeana y Abraham (2014), al estudiantado se les muestra una metodología un poco contradictoria, ya que se les muestra visiones de trabajarlas en conflicto. Subyace el método tradicional de otros más progresistas y se les alienta para que reflexionen sobre su visión actual de los contenidos de matemáticas y cómo transmitirlos, así como la manera de resolver estas contradicciones. Conocer la historia les lleva a una mejor comprensión y una mejora de resultados (Furinghetti 2000; Kenschaft 2005; Klyve y Stemkoski 2009; Knoebel et al. 2007). Thompson (1992) sostiene que el conocimiento de la historia de las matemáticas conduce a posturas más progresistas cuando se partía de otras más tradicionales.

OBJETIVO

Este estudio evalúa la efectividad de una actividad novedosa en la asignatura de didáctica de la matemática en la Universidad de Valencia, concretamente en Didáctica de la Geometría y la Probabilidad y la Estadística, para alumnado de 4.º del Grado en maestro o maestra de educación primaria. En particular, el estudio aborda dos preguntas de investigación (PI):

PI1: ¿Fue atractiva la actividad propuesta sobre historia? ¿Se modificaron las creencias y sus actitudes hacia la historia de las matemáticas con esta actividad?
PI2: ¿La actividad fue lo suficientemente atractiva para proponerla en las otras didácticas de las matemáticas qué impartimos?

DISEÑO DEL EXPERIMENTO

Como docentes de diversas asignaturas Didáctica de la Matemática en la Universidad Jaume I de Castellón y en la Universidad de Valencia Estudio General hemos observado que nuestro alumnado es desconocedor de la evolución histórica de los contenidos matemáticos que trabajan habitualmente y de los personajes matemáticos y diversos hechos históricos que los generaron.

En nuestras clases de la Universitat Jaume I, aunque es cierto que en los materiales didácticos que les proponemos (Alcalde, Pérez & Lorenzo., 2014; Pérez, Alcalde & Lorenzo., 2014; Lorenzo, Alcalde & Lorenzo., 2015) hay un resumen histórico que ocupa la primera parte de cada bloque de contenidos, es también cierto que el alumnado no acaba de darle la suficiente importancia, por este motivo en el curso 2016-2017 pensamos que sería una gran idea que trabajaran de un modo diferente la historia de la matemática en nuestras aulas, para que tuvieran recursos de cómo trabajarlas en sus futuras aulas como maestros y maestras. La intención es trabajar la historia de la matemática como herramienta como dice Jankvist (2009).

Para lograr nuestro objetivo, en el curso 2017-2018 en la asignatura de Didáctica de la Geometría, Medida y Probabilidad y Estadística de la Universidad de Valencia Estudio General se realizó una experiencia con el alumnado de 4.º curso de la mención de música, el grupo estaba formado por 21 mujeres y 11 hombres, todos accedieron a la universidad por la prueba de acceso PAU salvo un alumno que venía de ciclo formativo.

Diseño general

Los pasos que seguimos fueron los siguientes:

1. Se preparó un pre-test (anexo 1) no validado que se les paso a través del aula virtual la primera semana de clase, con el que queríamos saber la predisposición que tenían a realizar la experiencia.
2. Una vez analizados los resultados obtenidos se decide realizar la actividad del anexo 3, en la que han de reflexionar sobre la relevancia histórica de la aparición de los contenidos matemáticos. Se les proporciona un listado de autores matemáticos ilustres (anexo 4), aunque se les da la oportunidad de proponer otros, si quieren.
3. Durante dos sesiones de clase, de 120 minutos de duración cada una, el alumnado trabajó la actividad. Se les animó a que la implementaran en sus estancias en prácticas externas en los distintos centros de educación primaria, dado que la asignatura era el primer semestre y la estancia tenía lugar en el segundo.
4. Una vez entregada la actividad se les pasó el post-test (anexo 2) para saber el grado de satisfacción y conocer si creían que podía ser novedoso el uso de este recurso en el aula.

Estudiantado

El alumnado se agrupó en grupos de máximo 5 componentes. Sus tareas fueron, inicialmente, contestar el pre-test en el aula de informática y en 2 sesiones de 120 minutos cada una posteriores tuvieron que escoger un personaje matemático ilustre que hubiera hecho algún avance en geometría y otro personaje en estadística o probabilidad. Para facilitar la tarea se les proporcionó una lista con nombres, aunque algunos prefirieron escoger autores diferentes a los de la lista.

Una vez seleccionados, debían estudiar su vida y sus avances matemáticos. Dado que ya habían estado dos períodos de prácticas externas en dos centros educativos diferentes, debían realizar un esbozo de dos unidades didácticas donde el eje central de cada una de ellas fuera el matemático escogido, con la condición de que debían darle continuidad, es decir, que su vida y su obra estuvieran integradas en las actividades propuestas.

Nuestra intención era que cada trabajo se hubiera presentado en el aula delante de sus compañeros y compañeras, pero por motivos de organización de la asignatura, no fue posible.

Después de la entrega de la actividad, el alumnado contestó el post-test.

METODOLOGÍA

Al describir nuestro experimento, similar al realizado por Furinghetti (2007), debemos ser conscientes que nuestro estudiantado tiene unos conocimientos mínimos en historia de las matemáticas. Nuestro objetivo no es solo aumentarlos, sino que los usen para mejorar el trabajo que hacen de las matemáticas en clase (Verillon y Rabardel, 1995). Además, la calidad de estos conocimientos que acumulen los futuros maestros y maestras será el resultado de las fuentes que utilicen. Por esto es recomendable utilizar fuentes originales para no ser influenciados por otros investigadores que ya hayan hecho tratados sobre estas fuentes originales (Arcavi y Bruckheimer, 2000; Jahnke et al., 2000).

RESULTADOS

Resultados del pre-test

Las frecuencias absolutas del pre-tests (anexo 1) se encuentran en la tabla 1, donde 1 era el valor que designa muy desacuerdo y 5 muy de acuerdo. Cuando se analizan las respuestas se observa que este alumnado es desconocedor de la historia de la matemática, que nunca o casi nunca han realizado ninguna actividad donde se trabaje y suponemos que a la pregunta de si les parece buena idea utilizar este recurso como elemento motivador en el aula han contestado 16 personas de forma neutral, pero hay una tendencia positiva, dado que cualquier elemento motivador dentro del aula creen que puede ser interesante.

Tabla 1. *Frecuencias absolutas de los resultados de la realización del pre-test de los 32 alumnos que cursaban la asignatura*

Preguntas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Conozco la historia de las matemáticas	2	15	12	2	1
En mi instituto se realizaban actividades para conocer la historia de las matemáticas	13	14	4	0	1
En mi colegio se realizaban actividades para conocer la historia de las matemáticas	13	13	5	0	1
Creo que la historia de las matemáticas es un buen recurso para introducir conceptos matemáticos en el aula de Primaria	0	4	15	10	3
Utilizaría la historia de las matemáticas para realizar una unidad didáctica globalizada para trabajar algún concepto	0	4	16	9	4

Algunas propuestas didácticas

Finalmente hubo 8 grupos que participaron en el estudio siendo conocedores que utilizaríamos sus propuestas de manera anonimizada. En la tabla 2 se puede observar las elecciones realizadas. Para geometría el personaje más veces escogido fue Pitágoras, mientras que para probabilidad y estadística hay bastante más variedad de personajes, aunque también se repiten. De los 8, 2 relacionaron el personaje histórico con la unidad didáctica, cumpliendo realmente la finalidad que perseguíamos. De los 6 restantes, aunque si proponen un autor, el contenido a trabajar y actividades, no hay ninguna relación entre ellos. Fue en la explicación por parte de la profesora de las propuestas planteadas por los diversos grupos en el aula donde aquellos grupos que no habían establecido conexión se percataron de este hecho y el aprendizaje del objetivo buscado cobró sentido.

Tabla 2. *Matemáticos escogidos por los grupos de trabajo*

	Geometría	**Probabilidad y Estadística**
Grupo 1	Fermat	Laplace
Grupo 2	Pitágoras	Galileo
Grupo 3	Pitágoras	Laplace
Grupo 4	Pitágoras	Huygens
Grupo 5	Matemáticas en el antiguo Egipto	Fermat y Pascal
Grupo 6	Euclides	Pascal
Grupo 7	Aristóteles	Galileo
Grupo 8	Egipcios	Bernoulli

Creemos que una de las mejores propuestas presentadas fue la de un grupo que trabajó a Galileo Galilei a través del cómic y la experimentación consistente en la construcción de un telescopio sencillo, asociando cada parte del telescopio con una figura geométrica correspondiente. Una vez construido el telescopio, los niños y niñas se meten en el papel de Galileo por unos minutos y observan las constelaciones que él pudo ver también, así aprenden, además de la historia de Galileo, qué hacía, qué aprendía y qué observaba por el telescopio. También proponen el visionado del video de “Erase una vez… los inventores” (Barillé, 1994) donde el protagonista es Galileo y con las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles fueron los principales inventos y descubrimientos de Galileo Galilei? Enuméralos.
2. ¿Por qué no fueron comprendidos algunos de ellos?

Para finalizar, la actividad central consistía en estudiar las constelaciones y buscar las semejanzas que tienen con los cuerpos geométricos.

Resultados del post test

El 23 de octubre de 2017, después de haber entregado la actividad se les pasó el siguiente post-test (anexo 2) donde podían escribir sus opiniones de la actividad. Las respuestas fueron las siguientes.

Un estudiante a la primera pregunta (tabla 3) respondió: “*Porque así los alumnos y las alumnas pueden entender mejor de dónde vienen los conceptos que van a estudiar, metiéndose en la época de los autores que desarrollaron las teorías matemáticas y así llegar de mejor forma al conocimiento* *de estas.*" El mismo estudiante a la segunda pregunta (tabla 3) añade: "*Porque he podido comprobar que se entienden los conceptos de mejor manera si tienen una mejor contextualización.*"

Tabla 3. *Frecuencias absolutas del post-test de los 32 alumnos que cursaban la asignatura*

Preguntas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Creo que la historia de las matemáticas es un buen recurso para introducir conceptos matemáticos en el aula de primaria.	1	3	11	12	4
¿Utilizaría la historia de las matemáticas para trabajar algún contenido de matemáticas con mi futuro alumnado de primaria?	0	3	4	18	4
¿Les reconoces más importancia a los contenidos matemáticos que nos han aportado los autores de la actividad por el hecho de saber quién, cómo y cuándo aparecieron en la historia?	1	0	10	12	8

Por otro lado, un alumno añadió a la primera pregunta (tabla 3): *"No creo que sea necesario explicar la historia para que el alumnado entienda cómo se realiza una suma o resta, por ejemplo."* y a la segunda (tabla 3): "*Aunque para el alumnado no sea importante, para un profesor puede resultar de gran ayuda.*" El alumno se animaba a ponerlo en práctica, aunque no estaba persuadido.

El único alumno que peor puntúa esta actividad añade a la pregunta 1 (tabla 3): "*Creo que las investigaciones de los diversos autores son muy difíciles para introducirlas al aula de primaria, ya que los ejercicios de primaria son adaptaciones de los estudios realizados por dichos autores.*" y a la segunda (tabla 3): "*Puede que en algunos contenidos sea interesante plantear algo de historia para contextualizar las actividades, pero generalmente no lo utilizaría.*" El alumno reflexiona sobre si es útil o no la historia de la matemática para trabajar contenidos de matemáticas, pero centrado en unos contenidos muy inmediatos en los que se disipa esta utilidad. Quizá en otros contenidos su opinión cambiara.

CONCLUSIONES.

Como fortaleza, en general, nuestros estudiantes realizan unas actividades muy interesantes, algunas de ellas ejemplificadas en la algunas propuestas didácticas y dos grupos utilizaron la historia de las matemáticas para mejorar el interés de sus futuros estudiantes en las matemáticas. No como fin último el hecho de conocer la historia, como Jankvist (2009) indica utilizando material donde con la historia se mejoren las matemáticas. En ese sentido, realizaron actividades atractivas y diferentes para introducir a los autores, su historia y sus aportaciones a las matemáticas en el aula. Hubiera sido interesante que se hubiera puesto en marcha todas estas propuestas en sus clases de prácticas externas en el aula de primaria, pero al ser de la mención de música, esto no fue posible. Además, por falta de tiempo de la asignatura no se pudieron exponer las propuestas en el aula y tampoco se realizó la evaluación entre pares, la docente explicó los trabajos y comentó los errores cometidos. En cualquier caso, creemos que con esta propuesta conseguimos que el alumnado fuera consciente que los conceptos matemáticos tenían a unos "inventores" detrás y que podían ser interesantes para motivar al alumnado de primaria. Conseguimos hacerlos conscientes de una de las directrices de Freudenthal (1981): la necesidad del conocimiento de la historia de las matemáticas por parte de los docentes y el uso de la historia en clase de matemáticas.

Tal y como dice González-Urbaneja (2004), este conocimiento de parte de la historia de la matemática relativa al trabajo de los contenidos que se está realizando favorece el proceso de enseñanza aprendizaje y también lo han constatado nuestros estudiantes. También consideramos importante haber iniciado una reflexión en ellos y ellas que les lleve a tener la necesidad de conocer la historia de las matemáticas de los contenidos que vayan a trabajar con su futuro alumnado, tal como dice Freudenthal (1981).

ANEXOS

Anexo 1. Pre test. Historia matemática

Este formulario es para realizar una pequeña investigación de vuestros conocimientos sobre historia matemática.

Código de identificación (será las dos primeras letras del lugar de nacimiento que diga el DNI y fecha de nacimiento DDMMAAAA)

Sexo:

- Mujer
- Hombre

Edad:

Asignatura (código)

Grupo:

Acceso a la universidad

- Pruebas de Acceso a la Universidad
- Ciclo formativo
- Prueba de acceso a mayores de 25 años
- Prueba de acceso a mayores de 40 años
- Otros

	1 (muy desacuerdo)	2	3	4	5 (muy de acuerdo)
Conozco la historia de las matemáticas					
En mi instituto se realizaban actividades para conocer la historia de las matemáticas					
En mi colegio se realizaban actividades para conocer la historia de las matemáticas					
Creo que la historia de las matemáticas es un buen recurso para introducir conceptos matemáticos en el aula de primaria					

Utilizaría la historia de las matemáticas para realizar una unidad didáctica globalizada para trabajar algún concepto	

Anexo 2. Post test

Después de haber realizado y entregado la actividad ENTREGABLE TEMA 2.

Código de identificación (será las dos primeras letras del lugar de nacimiento que diga el DNI y fecha de nacimiento DDMMAAAA)

	1 (muy desacuerdo)	2	3	4	5 (muy de acuerdo)
Creo que la historia de las matemáticas es un buen recurso para introducir conceptos matemáticos en el aula de Primaria.					

¿Por qué motivo?

	1 (muy desacuerdo)	2	3	4	5 (muy de acuerdo)
¿Utilizaría la historia de las matemáticas para trabajar algún contenido de matemáticas con mi futuro alumnado de primaria?					

¿Por qué motivo?

	1 (muy desacuerdo)	2	3	4	5 (muy de acuerdo)
¿Les reconoces más importancia a los contenidos matemáticos que nos han aportado los autores de la actividad por el hecho de saber quién, cómo y cuándo aparecieron en la historia?					

¿Por qué motivo?

Anexo 3. Actividad propuesta a los y las estudiantes

Introducción

El desarrollo de las matemáticas ha jugado un papel fundamental en el progreso de la humanidad. No sólo desde un punto de vista meramente matemático, sino también porque ha contribuido a desarrollar ciencia y tecnología a la vez.

Objetivos

Reflexionar sobre la relevancia de la historia de las matemáticas y su potencial para motivar a los estudiantes en las etapas de educación primaria.

Actividades para entregar

Esta actividad se realizará por grupos. Se desglosará en los siguientes apartados:

- *Cada grupo debe seleccionar un personaje que haya realizado una aportación considerable al avance de Geometría y otro que haya aportado algún concepto de Estadística y Probabilidad, de los contenidos vistos en clase.*
- *Realizar un breve estudio del autor, su vida y sus aportaciones en matemáticas.*

Proponer un dispositivo didáctico con cada uno de estos personajes, indicando el curso donde se ubica y el detalle de la implementación y que combine la historia del contenido, con el autor/a y el trabajo que queréis realizar con vuestro futuro alumnado de primaria.

Anexo 4. Listado de matemáticos ilustres proporcionada a los estudiantes

Geometría	**Probabilidad y estadística**
Aristóteles	Vito Seckendorff
Papiro Rhind	German Conring
Babilonios	Gottfried Achenwall
Egipcios	Von Scholer
Tales de Mileto	Galileo Galilei
Pitágoras	Girolano Cardano
Platón	Blaise Pascal
Euclides	Pierre Fermat
Kepler	Christiaan Huygens
Gauss	Joseph-Louis Lagrange
Bolyai	Jakob Bernouilli
Lobachewski	Abraham de Moivre
Riemann	Pierre-Simon Laplace
Felix Klein	Andrey Kolmogorov
	Émile Borel

Todos estos matemáticos tienen alguna aportación que está presente el curriculum de Educación Primaria.

BIBLIOGRAFÍA

Alcalde, M., Pérez, I., & Lorenzo, G. (2014). *Los Números Naturales en el aula de Primaria. Castellón*. Ed. Universitat Jaume I. Recuperado de: http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/89550

Arcavi, A., y Bruckheimer, M. (2000). Didactical uses of primary sources from the history of mathematics. *Themes in Education*, 1, 55–74.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education—on symbolizing and computer tools*. (Tesis de doctorado) The Freudenthal Inistitute, Utrecht.

Bakker, A., y Gravemeijer, K. P. E. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 149–168.

Barbin, E. (2007). On the argument of simplicity in 'elements' and schoolbooks of geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 225–242. Special issue on the history of mathematics in mathematics education.

Bartolini Bussi, M. G., y Bazzini, L. (2003). Research, practice and theory in didactics of mathematics: Towards dialogue between different fields. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 203–223.

Barabash, M., y Guberman-Glebov, R. (2004). Seminar and graduate project in the history of mathematics as a source of cultural and intercultural enrichment of the academic teacher education program. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1–2), 73–88. Special double issue on the role of the history of mathematics in mathematics education (proceedings from TSG 17 at ICME 10).

Barillé, A. (1994). Érase una vez…, los inventores. https://www.youtube.com/watch?v=cZI1issfSPE (última visualización el 17-04-2018)

Chevallard, Y. (1991). *La trasposición didáctica: del saber sabido al saber enseñado*. Argentina: Aique Grupo Editorial S.A.

Farmaki, V., y Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activites. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 83–106.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *Learning of Mathematics*, 11(2), 3–6. Special Issue on History in Mathematics Education.

Freudenthal, H. (1981). Educ Stud Math 12: 133. Recuperado de: https://doi.org/10.1007/BF00305618

Fung, C.-I. (2004). How history fuels teaching for mathematising: Some personal reflections. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1–2), 125–146. Special doublé issue on the role of the history of mathematics in mathematics education (proceedings from TSG 17 at ICME 10).

Furinghetti, F. (2000). The History of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 43–51.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 131-143.

Gómez, C. M. (1994). Historia de las matemáticas y su enseñanza: un análisis. *SUMA*, 17-26.

González-Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA*, 45, 17–28.

Gravemeijer, K., y Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111–129.

Gulikers, I., y Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of the history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223–258.

Guzmán, M. (1992). Tendències innovadores en educació matemàtica. *Butlletí de La Societat Catalana de Matemàtiques*.

Helfgott, M. (2004). Two examples from the natural sciences and their relationship to the history and pedagogy of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1–2), 147–164. Special double issue on the role of the history of mathematics in mathematics education (proceedings from TSG 17 at ICME 10).

Jankvist, U.T. (2009).A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 235-261.

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Dynnikov, C., Furinghetti, et al. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. En J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education – The ICMI Study* (pp. 291–328). Boston, MA: Kluwer.

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's cardinal and ordinal infinies: An epistemological and didactic view. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 175–197.

Katz, V. (2000). *Using history to teach mathematics: An international perspective.* Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Kenschaft, P. C. (2005). *Change is possible: Stories of women and minorities in mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 137–174.

Klyve, D., y Stemkoski, L. (2009). *The Euler archive.* Recuperado de: http://math.dartmouth.edu/*euler/. Accessed 21 May 2012.

Knoebel, A., Laubenbacher, R., Lodder, J., & Pengelley, D. (2007). *Mathematical masterpieces*: Further chronicles by the explorers. New York: Springer.

Lorenzo, G., Alcalde, M., & Pérez, I. (2015). *La geometría y la estadística en el aula de primaria*. Castelló de la Plana (Espanya). Ed. Universitat Jaume I. Recuperado de: http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/143825

Lupiáñez, L. (2002). Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática. *SUMA*, 40, 59–63.

Mac y Bhaird, C. (2009) Introducing the history of mathematics to third level students with weak mathematical backgrounds: a case study. In: CETL-MSOR Conference 2008. The Maths, Stats & OR Network, pp. 63-68.

Niss, M., y Jensen, T. H. (Eds.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring—ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Undervisningsministeriet. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18*. English translation of title: Competencies and Learning of Mathematics—Ideas and Inspiration for the Development of Mathematics Education in Denmark.

Pérez, I., Alcalde, M., & Lorenzo, G. (2014). *Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria.* Castelló. Ed. Universitat Jaume I. Recuperado de: http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/108118.

Philippou, G. N., y Christou, C. (1998). The effects of a preparatory mathemtics program in changing prospective teachers' attitudes towards mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 189–206.

Radford, L. (2000b). Signs and measuring in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237–268.

Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Barbin, E., Arcavi, A., Brown, G., et al. (1991). The experience of history in mathematics education. *Learning of Mathematics*, 11(2), 7–16. Special Issue on History in Mathematics Education.

Sánchez, J. d. (1997). Historia de la matemática: implicaciones didácticas. *SUMA*, 33-38.

Streefland, L. (2003). Learning from history for teaching in the future. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 37–62.

Taimina, D. (2004). History of mathematics and mechanics in digital Reuleaux kinematic mechanism collection. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1–2), 89–102. Special double issue on the role of the history of mathematics in mathematics education (proceedings from TSG 17 at ICME 10).

Tattersall, J., y McMurran, S. L. (2004). Using the 'educational times' in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1–2), 103–114. Special double issue on the role of the history of mathematics in mathematics education (proceedings from TSG 17 at ICME 10).

Thomaidis, Y., y Tzanakis, C. (2007). The notion of historical 'parallelism' revisited: Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 165–183. Special issue on the history of mathematics in mathematics education.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs: a Synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook on research in mathematics education* (pp. 127–146). New York: Macmillan Publishing Co.

Tzanakis, C., y Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *Learning of Mathematics*, 20(1), 44–55.

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal stragies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 63–75.

Van Maanen, J. (1997). New maths may profit from old methods. *Learning of Mathematics*, 17(2), 39–46.

Verillon, P., y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education*, 9(3), 77–101.

Weldeana, H.N. y Abraham, S.T. (2014). The effect of an historical perspective on prospective teachers' beliefs in learning mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17, 303–330

María Santágueda Villanueva
Universidad Jaume I, España
santague@uji.es

Gil Lorenzo-Valentín
Universidad Jaume I, España
gil.lorenzo@uji.es

Vidal R. y Barra M. (2019). Un modelo para caracterizar la justificación de reglas y algoritmos del ámbito numérico – algebraico en libros de texto. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *2*(2), pp. 33-49

ISSN: 2603-9982

UN MODELO PARA CARACTERIZAR LA JUSTIFICACIÓN DE REGLAS Y ALGORITMOS DEL ÁMBITO NUMÉRICO – ALGEBRAICO EN LIBROS DE TEXTO.

Roberto Vidal, Universidad Alberto Hurtado, Chile.

Marcos Barra, Universidad Alberto Hurtado, Chile.

Resumen

Se presenta un estudio descriptivo - interpretativo centrado en el análisis de libros de texto de mayor uso en Chile en el período 2001 – 2018, en los niveles de enseñanza escolar, que busca identificar y caracterizar la justificación de reglas y algoritmos en el ámbito numérico – algebraico. Para ello, se elaboró un modelo a priori en base a tres dimensiones: el modo de representación (Enactiva – Icónica – Simbólica) que se utiliza, la cantidad de éstas y su posibilidad de generalizar. La aplicación de estas dimensiones a los libros de texto condujo a ajustar el modelo, lo que posibilitó encontrar nuevos tipos de justificación y estudiar sus tendencias, lo que constituye un aporte en los procesos de selección y análisis de actividades para el aula.

Palabras clave: *Justificación matemática, reglas y algoritmos en matemática, libros de texto, representaciones enactivas, icónicas y simbólicas.*

A model to characterize the justification of rules and algorithms of the numerical-algebraic domain in textbooks

Abstract

A descriptive-interpretative study is presented centered on the analysis of textbooks of greater use in Chile in the period 2001 - 2018, in the levels of school education, that seeks to identify and characterize the justification of rules and algorithms in the numerical - algebraic scope. For this purpose, an a priori model was developed based on three dimensions: the mode of representation (Enactive - Iconic - Symbolic) that is used, the quantity of these and their possibility of generalizing. The application of these dimensions to textbooks led to the adjustment of the model, which made it possible to find new types of justification and study their trends, which constitutes a contribution in the selection and analysis processes of classroom activities.

Keywords*: Mathematical justification, rules and algorithms in mathematics, textbooks, enactive, iconic and symbolic representations.*

Recibido: 02/05/2019; Aceptado: 12/09/2019

LA NECESIDAD DE UN MODELO PARA CARACTERIZAR JUSTIFICACIONES PROVISTAS EN LIBROS DE TEXTO.

Resultaría fácil explorar cuáles son los verbos de los tipos de tarea más frecuentes en las aulas de matemática, así como en los manuales escolares que se utilizan en ellas. En esa inspección, “calcular” y “resolver” son verbos que se utilizan ampliamente, dejando en segundo plano las tareas vinculadas a dar una explicación, una argumentación o evidenciar un razonamiento.

Desde la implementación de la última reforma educacional en Chile en 1996, los programas oficiales y toda orientación para la enseñanza puso el foco en el paradigma constructivista. Desde 2001 en adelante, prácticamente toda la enseñanza escolar cuenta con libros de texto y programas de cursos los que especifican con ejemplos las actividades para el desarrollo y evaluación de los contenidos, siendo distribuidos por el Ministerio de Educación a los establecimientos que dependen administrativa y financieramente de esta entidad, los que superan el 90% de la oferta. Entre los años 2011 y 2015, el gobierno invitó a 300 colegios a experimentar con lo que se denominó “el método Singapur”, aportando con los insumos necesarios. Expertos de ese país visitaron en varias oportunidades a Chile, con el propósito de dar a conocer su modelo educativo (especialmente centrado en matemáticas), empleando libros de texto traducidos y ajustados a la realidad chilena, dándole un espacio importante al problema del paso de lo concreto a lo abstracto, por medio de la teoría de Jerome Bruner (1966) sobre los modos de representación del conocimiento, el cual considera que éstas han de ser de tres tipos: Enactivas, Icónicas y Simbólicas.

Respecto de las representaciones enactivas, éstas son las primeras que surgen en la vida de cada persona. Está presente por ejemplo cuando se aprende a sumar mediante la acción concreta de juntar, agregar o avanzar, haciendo referencia al modo de representar eventos pasados mediante respuestas motrices, por tanto está ligada al mundo sensible. De ahí que enactivo se refiera al sujeto que aprende en base a acciones de tipo manipulativa. Algunas de estas acciones pueden ser: cortar, plegar, superponer, vaciar, trasvasijar, mover, etc. También, en lugar de representación enactiva, se le suele llamar representación concreta. Supone la puesta en escena de movimiento y de la experiencia sensorial.

En al caso de las icónicas, también denominadas pictóricas, hacen referencia al modo de representar su conocimiento mediante imágenes, dibujos o esquemas que recuperan sólo los aspectos más relevantes de la experiencia concreta, por medio de una re-creación que contiene las características esenciales. En este sentido, es importante aclarar, que una fotografía o una imagen que recupera todos los detalles, como por ejemplo, la imagen de varios vasos y una botella real en un libro de texto, para justificar el algoritmo de la división por la acción del trasvasije, no cuenta como una justificación icónica, sino enactiva. En cambio, el tachado en una imagen que es de naturaleza estática, sí puede ser considerada un buen ejemplo de justificación para la regla de la cancelación de la suma o de la simplificación de fracciones.

Por último, sobre las representaciones simbólicas éstas hacen referencia al modo de representar el conocimiento haciendo uso de símbolos, que para el caso de la matemática lo constituyen sus notaciones en un lenguaje simbólico universal. Las justificaciones en este modo, tienen un carácter más riguroso, a medida que se adquiere soltura en su trabajo. Las representaciones simbólicas se enmarcan en el ámbito de la abstracción (motivo por el cual algunos autores le denominan representaciones abstractas[1]) y por su naturaleza, garantizan la posibilidad de generalizar reglas, algoritmos y todo tipo de propiedades, incluyendo la explicitación de las condiciones de validez. Para Bruner, este modo

[1] En la versión del enfoque CPA, las siglas corresponden a: Concreto, Pictórico, Abstracto.

constituye la tercera forma de representación a la que se aspira llegar, una vez que se ha propiciado el camino desde lo concreto o enactivo hacia lo abstracto mediado por lo icónico.

En Chile la propuesta de Bruner se hace conocida con la sigla CO-PI-SI, para abreviar las representaciones de tipo concretas, pictóricas y simbólicas, como uno de los pilares fundamentales que explicarían el éxito de Singapur en las pruebas PISA y TIMSS en matemáticas y que para el MINEDUC comportarían una experiencia digna de adoptar.

En este contexto el MINEDUC[2] en sus documentos para la enseñanza, apunta a promover la construcción de ideas abstractas por parte de los estudiantes, por medio de lo que denominan un pensamiento simbólico. Al respecto, señalan que:

"los niños pueden solucionar problemas en distintos niveles de abstracción, transitando en ambos sentidos desde el material concreto a las representaciones simbólicas. Esta es la esencia de COPISI. La manipulación de material concreto y su representación pictórica mediante esquemas simples (cruces, marcas, círculos, cuadraditos, marco de 10, tabla de 100 y recta numérica) permite a los estudiantes desarrollar imágenes mentales. Con el tiempo, prescinden gradualmente de los materiales y representaciones pictóricas, y operan solamente con símbolos". (Recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/w3-article-20853.html consultado el 10 de septiembre de 2019).

Como ejemplo de la explicitación de abordar este modelo, el programa de primero medio[3] de 2016, expone:

"En esta propuesta se enfatiza el uso de representaciones, analogías y metáforas para una mayor comprensión. En este sentido, los y las estudiantes pueden resolver problemas en distintos niveles de abstracción, transitando en ambos sentidos desde representaciones reales, concretas, hasta representaciones simbólicas, y viceversa. Esta es la esencia del modelo concreto, pictórico y simbólico". (MINEDUC, 2016, p.45).

Dado el alto interés en la adopción de COPISI, cabe preguntarse por el lugar de la justificación en la actividad matemática que se le demanda realizar a los estudiantes, respecto de las reglas y algoritmos referidos a los números y al álgebra elemental escolar.

Postulamos de este modo, que el acto de justificar una regla o un algoritmo, requiere del uso de representaciones, entendidas éstas según Bruner (1966) como producto final de un sistema de codificaciones y de procesamiento de las experiencias pasadas de quien aprende. La enseñanza de la matemática y en particular vía libros de texto, debiera entonces proveer de estos elementos que puedan hacer recuperar los conocimientos en el momento en que se requieran.

Cabe aclarar lo que aquí entendemos por regla y por algoritmo, para evitar posibles ambiguedades o malinterpretaciones. Siguiendo a la Real Academia Española (2001), una regla es un modo establecido de ejecutar algo, en nuestro caso, un método de hacer una operación matemática. Por ejemplo, si a y b son números enteros y tienen igual signo, su producto es positivo.

En tanto, un algoritmo es una serie finita de reglas en cierto orden predeterminado que tiene como propósito resolver una serie de problemas de un mismo tipo, independiente de los datos (Bouvier y George, 2016). Un ejemplo: Para transformar una fracción impropia a número mixto, primero se divide el numerador por el denominador. El cuociente obtenido indica el número de enteros, dejando el resto como el numerador de la parte fraccionaria cuyo denominador se conserva.

Así, este algoritmo se compone de las siguientes reglas:

---

[2] Es la sigla con que se conoce en Chile al Ministerio de Educación.

[3] Corresponde al primer curso de secundaria en Chile, por lo general, estudiantes de 14 años.

R1. *se divide el numerador por el denominador.*

R2.El cuociente de la división indica el número de enteros y el resto es el numerador de la parte fraccionaria.

R3. se conserva el denominador.

Es común que las reglas y los algoritmos aparezcan impuestos y por tanto carentes de justificación siendo por lo general los modelos docentes tecnicistas (Gascón, 2001) de los profesores que promueven estas formas de tratamiento en las aulas. En un discurso ministerial que orienta hacia el constructivismo y enfatiza para el aprendizaje el tránsito entre representaciones concretas, pictóricas y simbólicas, resulta de real importancia examinar las justificaciones que los libros de texto en este sentido proporcionan.

De esta forma, existen dos posibilidades; el procedimiento se presenta sin justificación y, por tanto, promueve una visión dogmática de la matemática en los estudiantes, o bien por el contrario, en el libro de texto aparece algún intento al menos, de justificar una regla o un algoritmo, permitiendo comprender la construcción de sentido de ese procedimiento.

Es en este último punto donde nos detenemos, puesto que el acto de justificar o mejor dicho aún, dar elementos para que los estudiantes construyan una justificación, da pie a la construcción de sentido de lo que se aprende. Desde esta perspectiva, cuando las justificaciones o las actividades que éstas promuevan pueden ser evidenciadas en los libros de texto, se hace relevante analizar si existen y cómo es el tránsito entre las representaciones en las que se basan las justificaciones, identificando el paso de lo concreto a lo abstracto y cómo estos escenarios son parte de las actividades matemáticas de los manuales escolares.

Estudiar libros de texto con fines de la Didáctica de la Matemática se ha vuelto una necesidad. En varios países con desarrollos importantes en Educación Matemática, el análisis de manuales escolares es visto como una línea de investigación. Para Gómez, Cózar y Miralles (2014), como para Suárez, (2019), los profesores emplean manuales escolares por la seguridad que les transmiten para realizar su docencia, les resulta ser su material predilecto para sus clases, permitiéndoles desarrollar competencias comunicativas, siendo un insumo clave para el cambio del paradigma euclideo (en el que la justificación es impuesta como resultado cristalizado) al de tipo constructivista, en el que juega un rol fundamental para el aprendizaje situado y con sentido construido por los estudiantes.

Por otra parte, varias investigaciones (Torres, 1994, Escolano, 1997, Puelles, 2000; Braga y Belver, 2016), señalan que a pesar de la fuerte entrada de tecnologías informáticas en los últimos años, los libros de texto siguen siendo uno de los protagonistas en el aula escolar, de alta preferencia de uso por parte de los profesores, siendo considerado como manual de la clase propiamente tal, como un dispositivo para desarrollar tareas y actividades propuestas o bien de consulta directa del profesorado para preparar sus lecciones, el cual evidencia el real currículo que es desarrollado en el aula.

En relación al uso de los modos de representación de Bruner en libros de texto, Cárcarmo, Díaz-Levicoy y Ferrada (2018) estudian la enseñanza de las ecuaciones, en las que conviven las representaciones de tipo icónicas y simbólicas, por lo que queda abierta la inquietud de saber si tal uso favorece la realización de generalizaciones y conocer si hay un uso variado y articulado de representaciones que tal como señala Bruner, producen aprendizajes anclados en la experiencia, proporcioándoles mayor solidez.

METODOLOGÍA.

En este estudio se siguió una metodología cualitativa con un diseño descriptivo – interpretativo, compuesta de 3 fases. La primera referida al levantamiento de un modelo de justificaciones sobre reglas y algoritmos del ámbito de los números y del álgebra elemental, que consideró 3 dimensiones:

(R). El modo de representación empleado: Concreto, Pictórico y/o Simbólico en la que se expresa o se pretende que los estudiantes construyan la justificación. Esta dimensión se justifica por el éxito de Singapur en pruebas estandarizadas y comparadas.

(F). El uso de una o más representaciones: Se trata de identificar si la presentación de la regla o algoritmo aparece bajo un único discurso justificativo o con más de uno que refuerza siempre la misma idea. En los casos de una única representación usamos la etiqueta "mono-representacional" para esa dimensión de la justificación y para dos o más discursos con representaciones distintas, utilizamos la denominación "poli-representacional". En este último caso, es de interés ver si hay tránsito entre las representaciones. Esta dimensión (F) permite ver tanto la articulación como el vínculo entre representaciones distintas o si se pone el énfasis en el trabajo mono - representacional.

(G). El alcance de generalización: corresponde a identificar si se trata de una justificación para un caso particular, o bien permite generalizar a otros casos. El acto de generalizar es propio de la representación simbólica, como el caso del álgebra elemental, sin embargo, Warren, Miller y Cooper (2013) muestran que estudiantes de 5 a 9 años llegan a generalizaciones a partir de un cambio de gestos y actos manipulativos (enactivos o concretos) que son desechados cuando reconocen la estructura matemática que sustenta la tarea. En efecto, para Kieran et al (2016), la generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes de la actividad matemática y que tiene un lugar fundamental en la iniciación al álgebra en el aula escolar.

La segunda fase comienza con la selección de una muestra intencionada de 212 libros de texto de matemáticas de mayor uso en Chile entre los años 2001 y 2018, considerando como unidad de análisis un "extracto de discurso", el cual definimos como parte de una o más páginas de un libro de texto que tiene por propósito el aprendizaje de una regla o de un algoritmo matemático específico. Un total de 342 extractos del ámbito numérico – algebraico fueron identificados y sometidos al modelo descrito en la fase 1, empleando el Análisis de Contenido como técnica para examinar tales extractos (Ander-Egg, 1980, Ruiz, 1996).
Una vez recopilados los libros de texto, se procedió a la selección de los contenidos referidos al ámbito de Números y Álgebra[4] bajo el siguiente criterio: Las reglas y algoritmos en los ejes señalados, se utilicen en al menos dos niveles o cursos de la enseñanza primaria y/o secundaria, o bien en al menos dos temas escolares, de modo de asegurar que tales procedimientos sean recurrentes en el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, el algoritmo para calcular el mínimo común múltiplo (mcm) de dos o más números naturales, también aparece en la adición y sustracción de fracciones. De igual modo, la regla conocida como "menos por menos da más", aparece en el octavo grado de la primaria chilena[5]. Sin embargo, en primer y segundo año de secundaria[6] vuelve a aparecer esta regla para ser utilizada en los Números Racionales y posteriormente en los Números Reales. Por el contrario, se optó por dejar

[4] Números y Álgebra son dos de los bloques o ejes del currículo escolar chileno, de un total de 4. Los otros dos son Geometría y Estadística – Probabilidades, (aunque los nombres han cambiado en el tiempo)
[5] Se le llama Educación Básica en Chile. Estudiantes de 13 años, aproximadamente.
[6] Enseñanza Media en Chile. Estudiantes de 14 y 15 años, aproximadamente.

fuera las reglas de divisibilidad, pues éstas en el currículo escolar, sólo aparecen en sexto grado de primaria y no vuelven a ser utilizadas. En la siguiente tabla, se muestran los contenidos seleccionados.

Tabla 1. *Contenidos de números y del álgebra elemental que fueron analizados por extractos.*

Algoritmo de la adición en IN	Potencia de una potencia
Algoritmo de la sustracción en IN	Potencia de exponente cero
Algoritmo de la Multiplicación en IN	Potencia de exponente negativo
Algoritmo de la División de en IN	Proporcionalidad Compuesta
Algoritmo de la multiplicación de fracciones	Adición y Sustracción de fracciones
Método para hallar fracciones equivalentes	Ubicación de fracciones en la recta numérica
Método de resolución de ecuaciones de primer grado	Transformación fracción impropia - Numeral Mixto
Algoritmo de la división de fracciones	Transformación decimal a fracción
Regla de lo signos para la división de enteros	Reducción de términos semejantes
Algoritmo de la división de números decimales	Algoritmo del m.c.m.
Imposibilidad de la división entre cero	Propiedades de los logaritmos
Regla "menos por menos da más"	Multiplicación de decimales
Regla -(a+b)= -a-b (uso de paréntesis)	Propiedades de los radicales
Multiplicación de potencias de igual base	Método de resolución de ecuaciones "irracionales"

La tercera y última fase corresponde al proceso ajuste del modelo fijado a priori, obteniendo las tendencias de los tipos de justificaciones definidos, como así nuevos tipos de justificación, lo que permitió una primera aproximación a una validación interna del modelo. En esta dirección, el propósito no está en la validación cuantitativa, sino en mostrar cómo a partir de los datos, esto es, de la configuración de la realidad vivida, puede construirse un modelo que posteriormente puede ser utilizado con fines inferenciales.

RESULTADOS.

A partir de la fase 1, se levantó un modelo teórico (a priori) para caracterizar las justificaciones que podían producirse por la combinación de las componentes de cada una de las tres dimensiones: Modo de representación empleado (R), el uso de una o más representaciones (F) y el alcance de generalización (G), Como la dimensión (R) tiene 3 posibilidades (concreta, pictórica, simbólica), y las dimensiones (F) y (G) tienen ambas 2 posibilidades cada una (mono-representacional y poli-representacional para (F) - Particular y general para (G)), se obtuvieron 12 tipos de justificación
El modelo a priori, queda conformado como indica la figura 1.

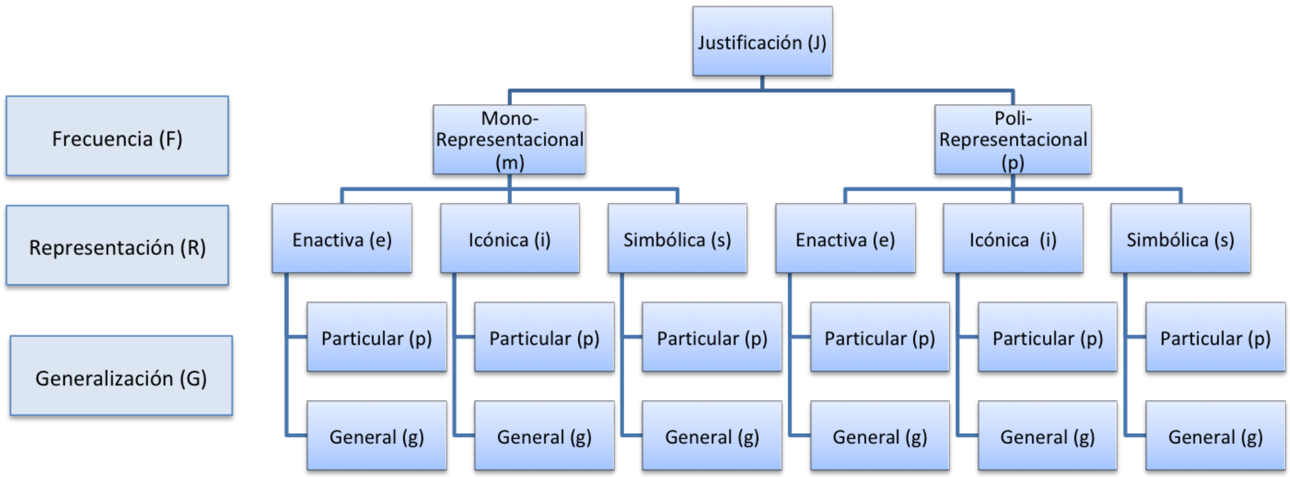


Figura 1. Modelo teórico de justificaciones en base a las dimensiones F, R y G

En la tabla 2, se muestra la codificación de cada tipo de justificación, la que se compone de cuatro caracteres comenzando con J (que señala la existencia de justificación), seguida de las iniciales de los valores de cada dimensión.

Tabla 2. *Denominación, codificación e indicador para el tipo de justificación.*

Tipo de justificación	**Código**	**Indicador**
Mono – Enactiva – Particular	Jmep	Emplea sólo un material concreto para un caso no generalizable
Mono – Enactiva – General	Jmeg	Emplea un material concreto y que permiten la generalización
Mono - Icónica - Particular	Jmip	Emplea una única imagen, esquema o artefacto icónico que no
Mono – Icónica – General	Jmig	Emplea una única imagen que si permite la generalización
Mono – Simbólica – Particular	Jmsp	Emplea una única representación numérica no generalizable
Mono Simbólica General	Jmsg	Emplea una única representación algebraica
Poli – Enactiva - Particular	Jpep	Emplea al menos dos materiales concretos con casos no generalizables
Poli – Enactiva General	Jpeg	Emplea al menos dos materiales concretos con los que se puede evidenciar una generalización.
Poli – Icónica – Particular	Jpip	Emplea al menos dos imágenes, esquemas o artefactos no exhibiendo una generalización
Poli – Icónica – General	Jpig	Emplea al menos dos imágenes, esquemas o artefactos que permiten generalizar
Poli – Simbólica Particular	Jpsp	Emplea al menos dos representaciones numéricas no generalizables
Poli – Simbólica – General	Jpsg	emplea al menos dos representaciones algebraicas

Respecto de los resultados de la fase 2 del estudio, al aplicar el modelo teórico de justificación a los contenidos matemáticos, se constató que el 30% (103 de los 342 extractos), de los algoritmos o reglas no poseen justificación, ni tampoco una instancia para promover su elaboración.

El modelo teórico logró captar 203 extractos de los 239 que presentan algún tipo de justificación, quedando 36 casos fuera. Al respecto, los resultados por tipo de justificación teórica captados por el modelo teórico, se muestran en la siguiente gráfica:

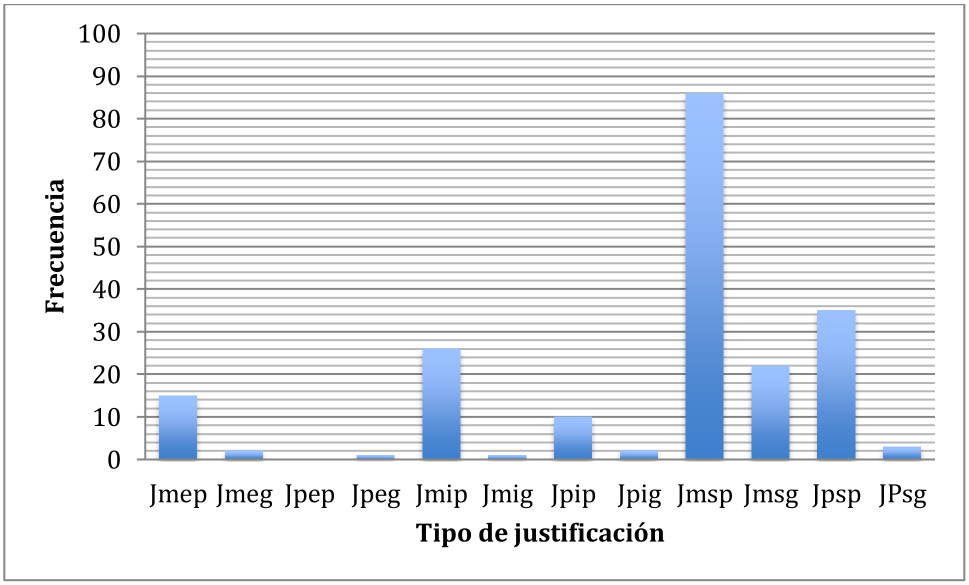


Figura 2. Gráfico de frecuencia de las justificaciones según el modelo teórico.

Analizando las tendencias, el tipo mono – simbólica –particular es el más recurrente con 86 extractos, seguido del poli – simbólico – particular con 35 casos. Luego está la justificación mono – icónica – particular que aparece 26 veces y con 22 casos la de tipo mono – simbólica – general, predominando la representación simbólica. Este resultado vuelve a obtenerse al sumar por tipo de representación utilizada con respecto a los 203 extractos con justificación teórica: 8,3% para la enactiva, 19,2% para la icónica y 72,5% para la de tipo simbólica.

En relación al carácter mono o poli representacional, un 67% de los extractos dan cuenta del primero, mientras que el segundo aparece en un 21,7% de los casos analizados.

Observando la tercera dimensión, sobre el alcance de generalización, un 85% de las justificaciones se hacen de modo particular y sólo el 15% restante explicita o promueve la generalización de la regla o algoritmo.

Por otra parte, ninguno de los extractos presentó el tipo de justificación mono – enactiva – general, sin embargo, sólo se identificó un caso para la justificación poli – enactiva – general, el cual presentamos más adelante.

Resultados respecto del ajuste del modelo en la fase 3:

Respecto de los 36 casos que no se adaptan directamente al modelo teórico de los 12 tipos de justificación, el análisis del contenido permitió caracterizarlos como combinaciones de dos casos teóricos, resultando 7 nuevos tipos de justificación. Un ejemplo de ellos es: Jmep + Jpsp, que en el gráfico siguiente tiene la mayor cantidad de extractos observados.

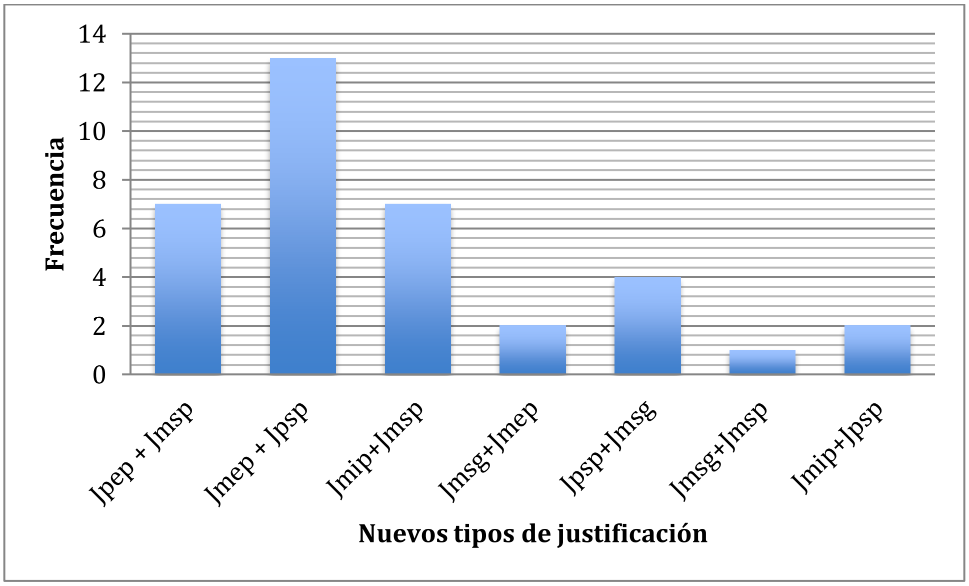


Figura 3. Gráfico de frecuencia de las justificaciones ajustadas al modelo teórico.

A continuación mostramos ejemplos de los diferentes tipos de justificación, partiendo por aquellos que el modelo logró predecir, finalizando con uno de los sietes nuevos casos obtenidos del ajuste.

Ejemplo1. Una justificación del tipo mono- enactiva – particular: Jmep.

En el siguiente extracto, en el cual se pretende mostrar una justificación de por qué $\frac{3}{4}:3=\frac{1}{4}$ (aunque también serviría para mostrar que $\frac{3}{4}:\frac{1}{4}=3$), aparece una imagen que contiene todos los detalles de la realidad, por lo que puede considerarse como una experiencia motriz, reconociéndola como una justificación en base a una representación enactiva y no icónica, como podría pensarse. La representación que Bruner denomina icónica, corresponde a un estadio superior que se identifica por una imagen que no representa un objeto real, sino sus características más importantes y que permiten evocarlo.

Figura 4. Ejemplo de una justificación tipo Jmep
Fuente: Matemática 6ºbásico. Ed. Zig-Zag (2004)

Es mono-representacional, pues hay ausencia de algún otro tipo de representación, siendo el único ejemplo dado por el libro de texto. En cuanto a su alcance de generalización, ésta es de tipo particular, por las cantidades específicas de frascos como de contenido. Tampoco se aprecia un discurso en el manual escolar, que permita que los estudiantes exploren la generalización del algoritmo que se está tratando respecto de la división de fracciones.

Ejemplo 2: Una justificación del tipo poli- icónica – particular: Jpip.

El procedimiento que aparece en el siguiente extracto, es el de la amplificación de fracciones, para mostrar por qué $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. En este caso, se utiliza un modelo rectangular que puede recuperar por ejemplo lo esencial de la forma de la superficie de una madera o de una mesa, por lo que a la justificación de este procedimiento se le identifica con base en una representación icónica.

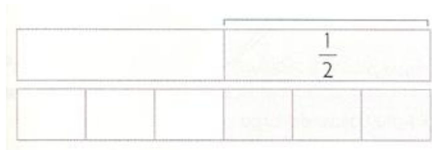


Figura 5. Ejemplo de una justificación tipo Jpip
Fuente: Matemática 5º básico. Ed. McGraw Hill (2003)

Es de tipo poli-representacional, dado que en el libro de texto desde donde se extrae esta imagen, aparecen otras representaciones tanto del mismo tipo, como enactivas (con regletas) y las simbólicas. En cuanto a su alcance de generalización, el trabajo con estas representaciones icónicas sólo resultan ser para casos (fracciones) específicos, por lo que se le asigna la p de particular, al final de su codificación.

Ejemplo 3: Una justificación del tipo poli – simbólica - particular: Jpsp.

En el siguiente extracto, se presenta una justificación del algoritmo de la división de fracciones, en base a la idea abstracta que “dividir es multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor”, lo que se desarrolla con lenguaje simbólico matemático:

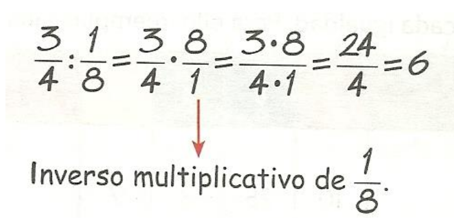
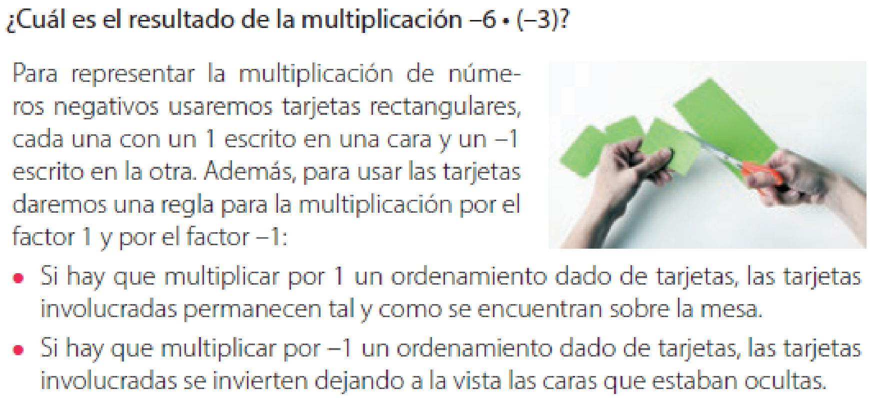


Figura 6. Ejemplo de una justificación tipo Jpsp
Fuente: Matemática 5º básico. Ed. McGraw Hill (2003)

Lo anterior da cuenta de una justificación del tipo Jpsp, de modo que la primera “p” se asigna por ser poli-representacional, es decir, hay al menos dos ejemplos de la división de fracciones que emplea este tipo de representación simbólica y es de tipo particular, pues no se vislumbra el uso de letras o lenguaje algebraico generalizador de este algoritmo.

Ejemplo 4: Una justificación del tipo poli – enactiva - particular: Jpep.

En un libro de texto de octavo grado, encontramos la presentación de dos actividades concretas para justificar la regla de los signos. La primera recurre a la manipulación de tarjetas que deben recortar y confeccionar los estudiantes, con las indicaciones que se explicitan en la figura 7:



¿Cuál es el resultado de la multiplicación –6 • (–3)?

Para representar la multiplicación de números negativos usaremos tarjetas rectangulares, cada una con un 1 escrito en una cara y un –1 escrito en la otra. Además, para usar las tarjetas daremos una regla para la multiplicación por el factor 1 y por el factor –1:

- Si hay que multiplicar por 1 un ordenamiento dado de tarjetas, las tarjetas involucradas permanecen tal y como se encuentran sobre la mesa.
- Si hay que multiplicar por –1 un ordenamiento dado de tarjetas, las tarjetas involucradas se invierten dejando a la vista las caras que estaban ocultas.

Figura 7. Ejemplo de una justificación tipo Jpep
Fuente: Matemática 8º básico, Ed. SM. (2015)

Al haber dos representaciones concretas, se asigna la letra "p" de poli-representacional. Luego, sabemos que es enactiva, pues se debe realizar mediante acciones que implican movimiento (recortar y mover las tarjetas). La última letra de la codificación es la "p" referida a que se trata de un procedimiento para multiplicar de modo específico el entero -6 y el entero -3.

Sin embargo, se deja entrever que el texto podría haber avanzado a la repetición de la actividad para conjeturar una regularidad, lo que sí daría pie con el conjunto de representaciones enactivas a concluir una generalización.

Ejemplo 5: Una justificación del tipo poli – enactiva - general: Jpeg.

Con el mismo propósito, el texto continúa con otra actividad que a través de la manipulación de círculos de cartón propone dar las razones por las cuales $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$.

Comienza dando las instrucciones para confeccionar los discos de cartón de modo que al girar uno de ellos, los otros también giren al estar conectados de forma tangencial, tal como se muestra en la figura 8.

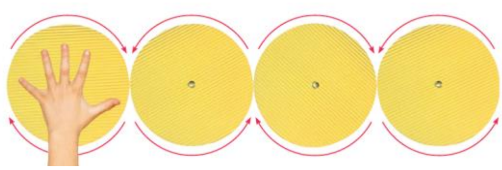


Figura 8. Ejemplo de una justificación tipo Jpeg para $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$.
Fuente: Matemática 8º básico, Ed. SM. (2015)

Resulta interesante observar que esta justificación de por qué el producto de -1 por -1 por -1 es -1, permite lograr una generalización para el caso $(-1)^n$. Si bien este recurso es de tipo enactivo, propicia mediante el apoyo de preguntas que conducen a observar un patrón al variar el número de círculos, la generalización:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & si\ n\ es\ par \\ -1 & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

Por esta razón se le asigna la codificación Jpeg.

Ejemplo 6: Una justificación del tipo mono – simbólica - particular: Jmsp.

En un libro de texto del año 2014, encontramos una única justificación de la regla “menos por menos da más”. El contexto que presenta es un juego de 5 etapas entre 4 amigos, cuyos puntajes de ganancia y pérdida se representan con números positivos y negativos, respectivamente tal como se muestra en la figura 9.

	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5
Beatriz	15	15	15	15	15
Cristián	–10	–10	–10	–10	–10
Gonzalo	0	0	0	0	0
Alejandra	–12	–12	–12	–12	–12

Figura 9. Ejemplo de una justificación tipo Jmsp
Fuente: Matemática 8º básico, Ed. Santillana.(2010)

A partir de estos datos, en el libro de texto se hacen diversas preguntas que conllevan a los estudiantes a representar el producto de dos números enteros. Una de las interrogantes es *si Alejandra jugara hasta la tercera etapa, ¿Cuántos puntos dejaría de perder con las dos etapas que no jugó?*.

La respuesta viene dada en la misma página, a modo de ilustrar el razonamiento y la representación simbólica que se utiliza para construir la respuesta.

La expresión que permite determinar cuántos puntos obtuvo Alejandra en las 2 últimas etapas, si en cada una obtuvo (–12) puntos, es: (–12) • 2 = –24 puntos. Entonces, al no jugar las últimas dos etapas dejó de perder 24 puntos. La expresión matemática en este caso, considerando que representaremos con (–2) a las dos etapas que no jugó, es: **(–12) • (–2) = 24.**
Notemos que (–12) • (–2) = 12 • 2 = 24.

Figura 10. Extracto de una justificación del tipo Jmsp
Fuente: Matemática 8º básico, Ed. Santillana.(2010)

Ejemplo 7. Una justificación del tipo mono – simbólica - general: Jmsg.

Otra de las justificaciones de la regla de los signos se apoya en las regularidades numéricas. El efecto de buscar un patrón da paso a considerar este tipo de justificación como la búsqueda de generalización.

• Multiplica los siguientes números por una misma cantidad y observa las **regularidades** que se producen. Puedes utilizar a tu calculadora.

$+5 \bullet 2 = 10$	$+5 \bullet 1 = 5$	$+5 \bullet 0 = 0$	$+5 \bullet -1 = -5$	$+5 \bullet -2 = -10$
$+4 \bullet 2 = 8$	$+4 \bullet 1 = 4$	$+4 \bullet 0 = 0$	$+4 \bullet -1 = -4$	$+4 \bullet -2 = -8$
$+3 \bullet 2 = 6$	$+3 \bullet 1 = 3$	$+3 \bullet 0 = 0$	$+3 \bullet -1 = -3$	$+3 \bullet -2 = -6$
$+2 \bullet 2 = 4$	$+2 \bullet 1 = 2$	$+2 \bullet 0 = 0$	$+2 \bullet -1 = -2$	$+2 \bullet -2 = -4$
$+1 \bullet 2 = 2$	$+1 \bullet 1 = 1$	$+1 \bullet 0 = 0$	$+1 \bullet -1 = -1$	$+1 \bullet -2 = -2$
$0 \bullet 2 = 0$	$0 \bullet 1 = 0$	$0 \bullet 0 = 0$	$0 \bullet -1 = 0$	$0 \bullet -2 = 0$
$-1 \bullet 2 = \boxed{}$	$-1 \bullet 1 = \boxed{}$	$-1 \bullet 0 = \boxed{}$	$-1 \bullet -1 = \boxed{}$	$-1 \bullet -2 = \boxed{}$
$-2 \bullet 2 = \boxed{}$	$-2 \bullet 1 = \boxed{}$	$-2 \bullet 0 = \boxed{}$	$-2 \bullet -1 = \boxed{}$	$-2 \bullet -2 = \boxed{}$
$-3 \bullet 2 = \boxed{}$	$-3 \bullet 1 = \boxed{}$	$-3 \bullet 0 = \boxed{}$	$-3 \bullet -1 = \boxed{}$	$-3 \bullet -2 = \boxed{}$
$-4 \bullet 2 = \boxed{}$	$-4 \bullet 1 = \boxed{}$	$-4 \bullet 0 = \boxed{}$	$-4 \bullet -1 = \boxed{}$	$-4 \bullet -2 = \boxed{}$
$-5 \bullet 2 = \boxed{}$	$-5 \bullet 1 = \boxed{}$	$-5 \bullet 0 = \boxed{}$	$-5 \bullet -1 = \boxed{}$	$-5 \bullet -2 = \boxed{}$

• Al multiplicar dos números enteros del mismo signo, ¿cuál es el signo del producto?

• Al multiplicar dos números enteros de diferente signo, ¿cuál es el signo del producto?

Figura 11. Extracto de una justificación del tipo Jmsp
Fuente: Educación Matemática 8º Ed. básica, Ed. SM.(2006)

Es mono-representacional (no hay otras representaciones del mismo tipo o distintas en el libro de texto) y es simbólica y particular para estos números. Surge otro problema en este caso: podríamos decir que se puede generalizar, pero el problema es que en el libro de texto, no hay preguntas que permitan construir esa generalización.

Ejemplo 8. Una justificación del tipo poli – icónica - general: Jpig.

En relación a la enseñanza de la adición de números enteros, se detectó un extracto único en un libro de texto, el cual contiene una justificación basada en la representación icónica, que tiene el propósito implícito de generalizar, mostrando lo que ocurre cuando se distinguen los 4 casos según las posibles combinaciones de los signos de los números. Para ello, la imagen deja entrever el orden de los valores absolutos de los números implicados, como medida de la longitud de rectángulos de igual altura.

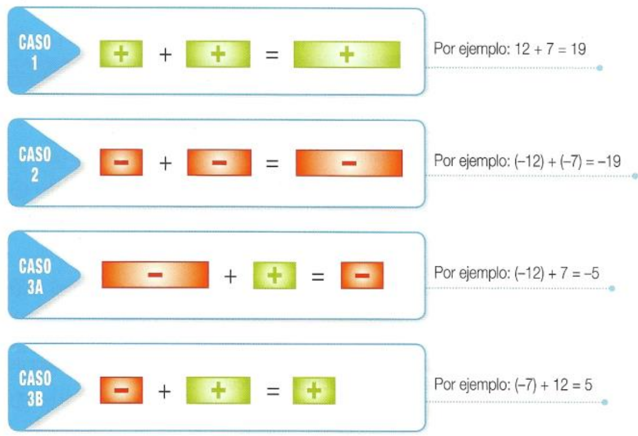
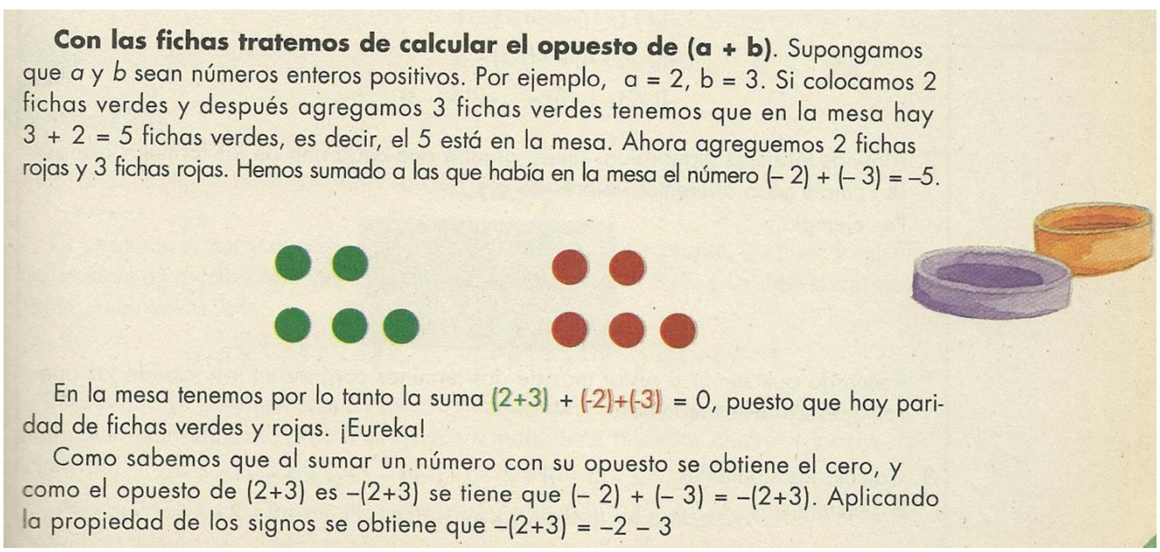


Figura 12. Extracto de una justificación tipo Jpig
Fuente: Matemática 7º Ed. básica, Ed. Pearson.(2012)

Ejemplo 9. Una justificación nueva obtenida de la combinación Jmip + Jmsp

En el siguiente extracto sobre la regla – (a+b) = - a – b, se puede advertir que se utilizan fichas verdes para los números positivos y rojas para los negativos. Con esa premisa, se procede a justificar la propiedad, empleando una mono – representación icónica - particular. Luego, se complementa dicha justificación con la propiedad que indica que la suma de números opuestos es cero, desde la perspectiva de una mono –representación simbólica – particular.



Con las fichas tratemos de calcular el opuesto de (a + b). Supongamos que *a* y *b* sean números enteros positivos. Por ejemplo, a = 2, b = 3. Si colocamos 2 fichas verdes y después agregamos 3 fichas verdes tenemos que en la mesa hay 3 + 2 = 5 fichas verdes, es decir, el 5 está en la mesa. Ahora agreguemos 2 fichas rojas y 3 fichas rojas. Hemos sumado a las que había en la mesa el número (– 2) + (– 3) = –5.

En la mesa tenemos por lo tanto la suma (2+3) + (-2)+(-3) = 0, puesto que hay paridad de fichas verdes y rojas. ¡Eureka!

Como sabemos que al sumar un número con su opuesto se obtiene el cero, y como el opuesto de (2+3) es –(2+3) se tiene que (– 2) + (– 3) = –(2+3). Aplicando la propiedad de los signos se obtiene que –(2+3) = –2 – 3

Figura 13. Extracto de una justificación tipo Jmip + Jmsp
Fuente: Matemática 7º Ed. básica, Ed. Arrayán.(2006)

CONCLUSIONES

Respecto del modelo teórico constituido por 12 tipos de justificaciones, 11 fueron encontradas. La justificación poli – enactiva – particular no se observó en ninguno de los extractos, por lo que se puede conjeturar que por problemas de espacio y diseño del libro de texto o bien por no considerarlo necesario, lo enactivo se desarrolla en los manuales escolares con un único ejemplo concreto cuando se trata de justificar una regla o un algoritmo de modo particular. Esta falla del modelo teórico levanta una nueva interrogante: ¿Se podrá probar que la justificación Jpep es imposible de realizar?. Creemos que no resulta difícil imaginar que Jpep es posible, considerando que la representación enactiva no tiene por qué ser única frente a un caso particular. Pongamos por caso, que en un libro de texto se requiera construir y fundamentar un algoritmo para hacer 3,19 + 2,3. Empleando el ábaco y los bloques de base 10, éstos últimos situados en un tablero posicional, podrían permitirlo, es decir, empleando dos representaciones enactivas (por tanto poli-representacional) para resolver una operación específica. Sin embargo, este tipo de trabajo no está desarrollado en los libros de texto.

De otro lado, podemos ver que el modelo teórico no sugirió la aparición de nuevas formas de justificación, ni que éstas podían descomponerse en dos de las sugeridas a priori. Una nueva aplicación del modelo podrá diferenciarse en este punto, por ejemplo, al aplicarlo a otros libros de texto o bien a otras ramas de la matemática escolar, como en geometría. Es altamente probable, pensamos, que aparezcan otros tipos de justificación o distintos en cantidad y no exactamente 7 como en este estudio. Por tanto, concluimos que nuevas aplicaciones del modelo podrán determinar su validez, la que en nuestro caso piloto puede considerarse alta, ya que logra cubrir sobre el 85% de los casos que equivale a 203 extractos de un total de 239.

Al mismo respecto, un 30% de las reglas y algoritmos de las temáticas seleccionadas no son justificadas, lo que revela una alta tasa (casi un tercio) de conocimientos que no se fundamentan por razones que pueda obedecer a distintas causas, entre otras: las diferencias de cómo se organizan los contenidos científicos versus los del currículo escolar, la epistemología predominante y heredada del programa euclideo, la omisión fundamentada en creencias sobre la enseñanza que apunten a que el acto de justificar es propio de las representaciones de carácter simbólico.

Con respecto al empleo de las representaciones Brunerianas[7], el tránsito de justificaciones teóricas emerge naturalmente cuando se gestan las 7 nuevas justificaciones por combinación de las originadas a priori. Del análisis realizado, se encontraron 36 extractos en los que ese tránsito puede describirse como una conjugación de representaciones, intentando fundamentar una misma regla o un mismo algoritmo. Por esto, creemos necesario promover un escenario de enseñanza vía libros de texto, mediante competencias de comunicación escrita que considere una articulación o un tránsito entre justificaciones.

En cuanto a las tendencias, las justificaciones más habituales en libros de texto se apoyan mayormente en representaciones simbólicas de índole particular, exhibiendo unos pocos ejemplos que no promueven instancias de generalización. Visto de esta manera, los procesos de justificación que se siguen en los manuales escolares, por lo general, tienden a propiciar una forma de trabajo confiado a la validez de un solo caso, lo que es recurrente en el 85% de los casos.

Finalmente, concluimos que este estudio se enmarca en el análisis de libros de texto y nos proponemos investigar los invariantes que deje la aplicación tanto a otros sectores de la matemática escolar

[7] Acuñamos este nombre, para especificar sin lugar a confusión que nos referimos a la teoría de J. Bruner.

(Geometría, Pre - cálculo, Estadística y Probabilidades), como a otras ciencias: física, química y biología, de modo de constituir sus dominios de validez, con zonas comunes y de particularidad.

REFERENCIAS

Ander – Egg, E. (1980). *Técnicas de investigación social*. Buenos Aires: El Cid Editor.

Araneda, J. , Ovalle, X. (2003). *Matemática 5º básico*. Santiago de Chile: McGraw Hill.

Aróstegui (2001). *La investigación histórica: Teoría y método*. Barcelona: Crítica.

Bórquez, E., Darrigrandi, F. y Zañartu, M. (2010). *Matemática 8º Educación Básica*. Santiago de Chile: Santillana.

Bouvier, A. y George, M. (2016). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: AKAL.

Braga, G. , Belver, J.L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación. 27*, 199-218.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Harvard University Press.

Bruner, J. S.(1980). *Investigaciones sobre el desarrollo cognitivo*. Madrid: Pablo del Río.

Bruner, J. S., Goodnaw, J. J. y Austin, G. A. (1978). *El proceso mental en el aprendizaje*. Madrid: Morata.

Bruner, J. S. (1963). *El proceso de la educación*. México: UTEHA

Cárcamo, M. , Díaz – Levicoy, D. y Ferrada, C. (2018). Los ejemplos en la enseñanza de las ecuaciones en libros de texto de educación primaria. *REMAT, 4*, 38-54

Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C. y Rupin, P. (2015). *Matemática 8º Básico*. Santiago de Chile: SM.

Cofré, A. y Russel, A. (2001). *Matemática 7º año básico*, Santiago de Chile: McGraw Hill.

Escolano, A. (1997). *Historia ilustrada del libro escolar en España. Del Antiguo Régimen a la Segunda República.* Madrid: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.

Frías, M. (2004). *Matemática 6ºbásico.* Santiago de Chile: Zig-Zag.

Gascón, J.(2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*, 129-159.

Gómez, C.J, Cózar. R. y Miralles, P. (2014): La enseñanza de la historia y el análisis de libros de texto. Construcción de identidades y desarrollo de competencias, en *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, *29*, 11-25.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., y Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching.* Cham: Springer.

Martínez, M. y Sandoval, M. (2006). *Educación Matemática 8º Ed. Básica. Proyecto Ecosfera*. Santiago de Chile: SM.

Muñoz, C. y Barriga, P. (2012). *Matemática 7º básico*. Santiago de Chile. Pearson Educación.

Martínez, J. (2008). Los libros de texto como práctica discursiva. *Revista de la asociación de sociología de la educación (RASE), 1*, 62-73.

MINEDUC. (2016). *Matemática Programa de estudio primero medio. Unidad de Currículum y Evaluación.* Santiago de Chile: Ministerio de Educación

Puelles, M. (2000). Los manuales escolares: un nuevo campo de conocimiento. Historia de la Educación. *Revista Interuniversitaria, 19*, 5-12.

Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española* (22.ª ed.). Madrid, España.

Resnick y Ford (1990). *La enseñanza de la matemática y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Ruiz, J.L. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Bilbao: Universidad de Deusto.

Suárez, M. (2019). Libro de texto, práctica educativa y competencia comunicativa. *Polyphonía, 3*, 27-45.

Torres, J. (1994). *Globalización e interdisciplinariedad: el curriculum integrado*. Madrid: Morata.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). *Exploring young students' functional thinking. PNA, 7*, 75-84.

Roberto Vidal
Universidad Alberto Hurtado, Chile
rvidal@uahurtado.cl

Marcos Barra
Universidad Alberto Hurtado, Chile
mbarra@uahurtado.cl

MES