Matemáticas, Educación y Sociedad

ISSN: 2603-9982
Matemáticas, Educación y Sociedad
http://mesjournal.es/
editor@mesjournal.es

MES

Vol 3 No 1 (2020):

Matemáticas, Educación y Sociedad

La investigación en Educación Matemática en Emerging Sources Citation Index (ESCI): la producción de Colombia.

Bibiana Muñoz-Ñungo, Cristina Rodríguez-Faneca y David Gutiérrez-Rubio

1-11

Elementos del análisis histórico de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Algunas consecuencias didácticas

Juan Carlos Martín Molina y José Luis González Marí

12-21

Estudio exploratorio de los conocimientos sobre la media en alumnos de Educación Secundaria

Oneida Muñoz-Ñungo, Alexander-Maz-Machado y Cristina Pedrosa-Jesús

22-32

Estadística en educación primaria a través del aprendizaje basado en juegos

Diana Herreros y María Teresa Sanz

33-47

ISSN: 2603-9982

Muñoz-Ñungo, B., Rodríguez-Faneca, C. y Gutiérrez-Rubio, D. (2020). La investigación en Educación Matemática en Emerging Sources Citation Index (ESCI): la producción de Colombia. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 3*(1), 1-11.

LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN EMERGING SOURCES CITATION INDEX (ESCI): LA PRODUCCIÓN DE COLOMBIA

Bibiana Muñoz-Ñungo, Universidad de Córdoba, España

Cristina Rodríguez-Faneca, Universidad de Córdoba, España

David Gutiérrez-Rubio, Universidad de Córdoba, España

Resumen

El conocimiento de los patrones de producción científica de todo campo del conocimiento es parte de la dinámica de la ciencia. Se presenta un estudio bibliométrico sobre la producción científica realizada en Colombia sobre educación matemática y que se halla indexada en la base de datos Emerging Sources Citation Index. Se halló un alto grado de colaboración en la autoría y el establecimiento de redes de colaboración interinstitucional de carácter nacional e internacional. La producción se ha visto incrementada en los últimos años, pero sigue siendo baja y su difusión es de marcado carácter local.

Palabras clave: *Educación Matemática, Bibliometría, producción científica, Colombia, ESCI.*

Research in Mathematics Education within the Emerging Sources Citation Index (ESCI): Colombian production

Abstract

Knowledge of scientific production patterns in every field of knowledge is part of the dynamics of science itself. A bibliometric study on the Colombian scientific production in Mathematics Education and its indexation within the Emerging Source Citation Index database is presented. A high degree of collaboration was found in the authorship and the establishment of inter-institutional collaboration networks of national and international nature. Production has increased in recent years, but it remains low and its dissemination is markedly local.

Keywords: *Mathematics Education, Bibliometrics, Scientific Production, Colombia, ESCI.*

Recibido: 20/04/2020; Aceptado: 27/04/2020

INTRODUCCIÓN

La bibliometría es una técnica de investigación que permite identificar patrones y tendencias en los hábitos de la comunicación científica mediante el análisis de documentos escritos utilizando herramientas de tipo matemático. Desde hace muchos años sus técnicas y métodos se han estado aplicando para estudiar el comportamiento tanto de la difusión como de las relaciones de tipo social que se producen en el ámbito de la ciencia.

El conocimiento de tales patrones permite determinar hacia dónde se encamina un determinado campo de conocimiento, revela cuáles son los temas más estudiados dentro de éste y permiten identificar campos poco o nada investigados en una disciplina y que, por ende, pueden convertirse en campo que ofrezca nuevas líneas de investigación.

Los estudios bibliométricos permiten, además, visibilizar las instituciones más productivas y conocer cuáles son sus redes de colaboración dentro de ámbitos locales, nacionales e internacionales.

En ocasiones se han analizado el conjunto de revistas de un campo determinado como por ejemplo las revistas de física, química e ingeniería (Tsay, 2009), veterinaria (Crawley-Low, 2006), medicina (Li, Jiang y Zhang, 2012), comunicación (Carretero y García, 2014), ciencias de la información (Davarpanah y Aslekia, 2008) o educación (Madrid, Jiménez-Fanjul, León-Mantero y Maz-Machado, 2017).

Asimismo, encontramos publicaciones donde se ha optado por estudiar la producción científica de un país sobre un tema o campo de conocimiento, como por ejemplo la energía solar en Alemania (Rangasamy, Umadev, 2017), la neurociencia en India (Keshava, 2020), la investigación odontológica en España (Bueno-Aguilera, Jiménez-Contreras, Lucena-Martín y Pulgar-Encinas, 2016) o la oftalmología en Colombia (Duque y Libreros, 2018), por mencionar algunas. En el campo de la educación podemos encontrar análisis sobre la educación ambiental en América Latina (Arboleda t Paramo, 2014), las TIC en España (Fernández, Martín t Fernández, 2017) o la inspección educativa (Guerrero, 2019) en este mismo país, entre otras.

El campo que nos ocupa, la Educación Matemática, ha sido estudiada desde diversas perspectivas: las revistas indexadas en el Social Sciences Citation Index (Jiménez-Fanjul, Maz-Machado y Bracho-López, 2013), la coaparición de palabras en los abstracts de artículos (Assefa y Rorissa, 2013), la cocitación (Yu, Chang y Yu, 2016), las tesis doctorales (Vallejo-Ruiz, Fernández-Cano, Torralbo, Maz y Rico, 2008), la producción indexada en SCOPUS (Ramírez y Rodríguez, 2019), o los congresos científicos (Maz-Machado, Bracho-López, Torralbo-Rodríguez, Gutiérrez-Arenas y Hidalgo-Ariza, 2011). Si bien este campo ha sido sometido al análisis bibliométrico, no se conocen estudios sobre este tipo de producción en Colombia.

Por otra parte, hemos de tener en cuenta la irrupción en el año 2015 en el mundo académico de la base de datos Emerging Sources Citation Index (ESCI), un producto de *Clarivate Analytics* que ha incorporado posteriormente a la Web of Science (WoS). Este nuevo producto ha empezado a ser tenido en cuenta por algunas agencias de evolución, que empiezan a utilizarlo para medir la producción científica.

Por tal razón, consideramos que es relevante y sincrónico conocer los datos de la producción científica que se realiza en Colombia sobre Educación Matemática (EMA) y que se halla indexada en el ESCI.

OBJETIVOS

Los objetivos de este estudio son:

1. Conocer la producción diacrónica de Colombia en EMA en ESCI.
2. Identificar las instituciones más productivas.
3. Conocer las temáticas con mayor presencia en los documentos.
4. Determinar el grado de colaboración en autoría.
5. Identificar las revistas incluidas en SCI en las que publican los investigadores colombianos de EMA.

METODOLOGÍA

El estudio que presentamos es descriptivo y de carácter exploratorio. En el mes de febrero de 2020 se consultó la página web de WoS y se seleccionó la base de datos Emerging Sources Citation Index en la colección principal. Se realizó una búsqueda filtrada por país (en este caso, Colombia) y por tema (M*athematics Education)*. Se optó por no realizar la búsqueda “mathematics education”, ya que no siempre se indica como descriptor “mathematics education” o se escribe en el titulo y por tanto se dejarían de lado documentos que sí tratan la educación matemática.

La búsqueda arrojó 229 registros, que se volcaron posteriormente en una base de datos *ad hoc*. Una vez finalizado dicho volcado, se procedió a realizar un proceso de estandarización de las denominaciones de las instituciones educativas, puesto que en ocasiones se encontraron diversas variantes para una misma universidad. Este mismo paso se llevó a cabo para estandarizar los nombres de los autores de la producción científica.

Las variables que se tuvieron en cuanta fueron: el año, la filiación de los autores, el nombre de la revista, el número de autores por documento y los descriptores.

Para determinar el Grado de Colaboración (GC) se utilizó la fórmula propuesta por Subramanyam (1983). Así, para una colección k de artículos publicados en una revista, estos indicadores quedan definidos como:

$$\mathrm{GC} = 1 - \frac{f_1}{N}$$

Donde $0 \leq \mathrm{GC} \leq 1$

f_1 = Número de artículos con un solo autor en una colección k.

N = Número total de artículos en k.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

De los 229 registros hallados 227 son artículos, y los 2 restantes corresponden a un review y un material editorial. La producción inicia en el año 2005, que es cuando se empiezan a indexar documentos en SCCI. El máximo volumen de la producción se dio en el año 2013 con 73 documentos (Figura 1). En los 3 primeros años la producción fue testimonial. El aumento de la producción no ha sido constante, pero sí continuó con altibajos. En general se ha tenido una alta tasa de variación entre el primer año y el último.

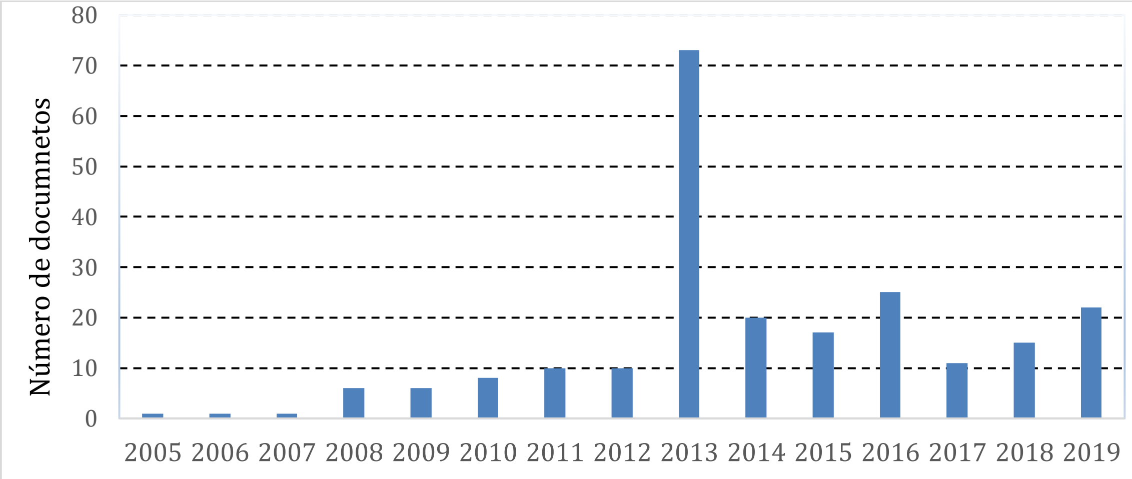


Figura 1. Producción diacrónica.

En cuanto al idioma de publicación de la producción colombiana en EMA, prácticamente toda (92,6%) ha sido en español. Solo 17 documentos han sido publicados en un idioma distinto (Tabla 2).

Tabla 1. *Idioma de publicación.*

Idioma	**Total docs.**	**%**
Español	212	92,6
Inglés	14	6,1
Portugués	3	0,4
Total	229	100,0

Los resultados sobre el idioma están ligados a las revistas en que se han publicado estos documentos. En total, 45 revistas han publicado alguno de los documentos sobre EMA firmados por investigadores colombianos. La *Revista Científica* es la que ha publicado el mayor número de ellos, alcanzando un 35% del total. Esta revista es editada por la Universidad Francisco José de Caldas, hecho que explica la posición que esta universidad ocupa como productora de investigación EMA. El 82% de la producción se realiza en revistas de Colombia.

Tabla 2. *Revistas que han publicado 3 o más documentos de EMA de Colombia.*

Título	**Nº.**	**% de 229**
Revista Científica	82	35.808
Entre Ciencia e Ingeniería	10	4.367
Revista virtual Universidad Católica del Norte	9	3.930
Logos Ciencia Tecnología	8	3.493
Revista Educacion en Ingenieria	8	3.493
Uni Pluriversidad	7	3.057
Amazonia Investiga	5	2.183
Infancias Imágenes	5	2.183
Góndola Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias	4	1.747
Academia y Virtualidad	3	1.310
Hombre y la Máquina	3	1.310

Magis Revista Internacional de Investigación en Educación	3	1.310
Praxis Colombia	3	1.310
Praxis Saber	3	1.310
Profesorado Revista de Currículum y Formación de Profesorado	3	1.310
Revista Universidad y Sociedad	3	1.310
Sophia Educación	3	1.310
Zona Próxima	3	1.310

En cuanto a la autoría, podemos establecer que 467 autores diferentes han firmado los documentos. El promedio de firmas es de 2,8 por documento. El valor del Grado de Colaboración (GD) es igual a 0,89. Esta cifra comprende un valor alto y acorde con el promedio de firmas; dicho grado de colaboración es mayor que el determinado para la producción en Educación Matemática publicada en las revistas del área indexadas en SSCI, donde el valor era de GC=0,61 (Jiménez-Fanjul, Maz-Machado y Bracho-López, 2013).

En este sentido, el autor más prolífico es Pedro Gómez, con 7 documentos bajo su autoría. En la tabla 3 se indican los autores con mayor producción. Estos 11 autores producen el 17,5% del total de los documentos de EMA en Colombia en ESCI.

Tabla 3. *Autores con 3 o más publicaciones*

Autor	**Nº.**	**% de 229**
Gómez, P.	7	3,1
Villa-Ochoa, J. A.	5	2,2
Ortega, M. V.	4	1,7
Vargas, J. L. A.	3	1,3
Cano, D. A. L.	3	1,3
Espinoza, A. J	3	1,3
Hernández, J. D. M	3	1,3
Mosquera, Y. A	3	1,3
Quiceno, D. U. J.	3	1,3
Suarez, C. A. H.	3	1,3
Zuluaga, H. G.	3	1,3

Estos autores generan una serie de relaciones entre pares nacionales y extranjeros que se manifiestan a través de las denominadas “redes de colaboración académica” y que podemos visualizar en la figura 2 en las redes de mayor tamaño. Se observa que no hay redes demasiados grandes o que se interconecten. En algunos casos se identifican ciertos autores que ejercen de vínculo entre pequeñas subredes, como por ejemplo Villa-Ochoa JA, Duarte PVE, Hernández LAC y Cano RAL. Es decir, estos autores son los intermediadores de sus redes.

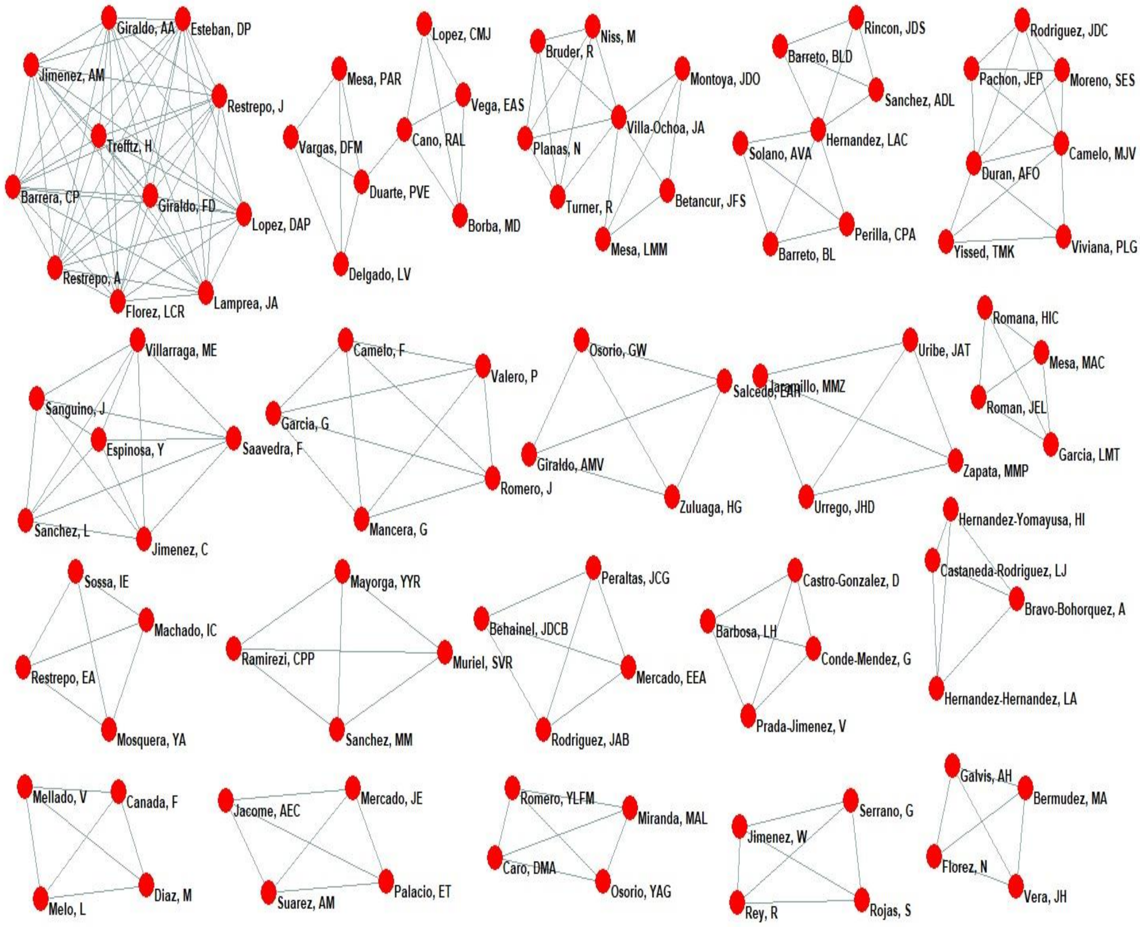


Figura 2. Redes de colaboración en autoría para más de 2 vínculos.

Un total de 108 instituciones de tipo universitario han participado en las publicaciones. Las instituciones que han producido el mayor número de documentos son la Universidad Francisco José de Caldas en Bogotá y la Universidad de Antioquía en Medellín. Estas once universidades producen el 56,3% de todas las publicaciones en EMA.

Tabla 4. *Universidades con 4 o más documentos firmados por sus investigadores.*

Universidad	Frecuencia	% de 229
Universidad Distrital Francisco José de Caldas	44	19,2
Universidad de Antioquía	32	14,0
Universidad de Quindio	10	4,4
Universidad del Valle	6	2,6
Universidad Pedagógica Nacional	6	2,6
Universidad Católica Pereira	6	2,6
Universidad de los Andes	6	2,6
Universidad Industrial de Santander	6	2,6
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia	5	2,2
Universidad del Atlántico	4	1,7
Universidad Antonio Nariño	4	1,7

Las instituciones generan también generan redes de colaboración de carácter interinstitucional. En ella se aprecian las relaciones con universidades extranjeras. En la figura 3 se presenta la red interinstitucional. Se han excluido los nodos individuales, es decir, aquellas instituciones en las que no participan investigadores de otras dentro de sus publicaciones. La Universidad de Antioquia es la que tiene mayor número de vínculos con otras universidades, seguida de la Universidad Antonio Nariño y la Universidad Francisco José de Caldas.
Es llamativo que algunas universidades no posean colaboraciones con otras universidades colombianas establecidas en las mismas ciudades y que, en su lugar, hayan establecido colaboraciones con universidades extranjeras.

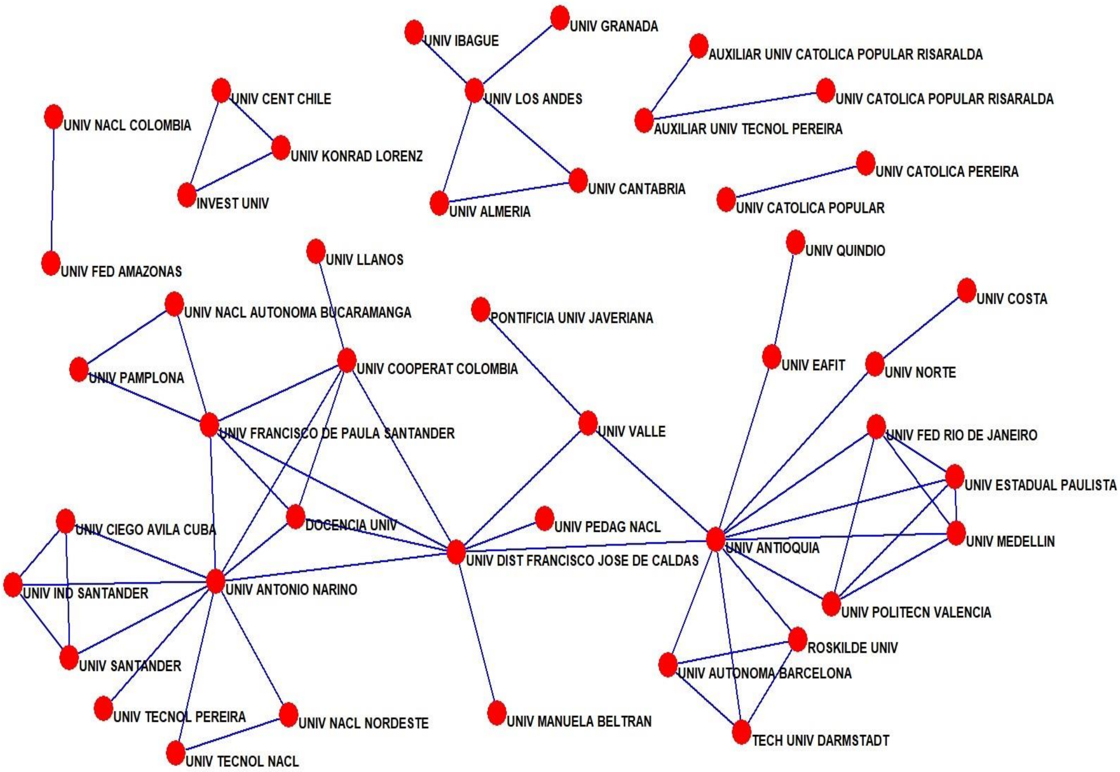


Figura 3. Red de Colaboración interinstitucional en la coautoría en EMA en ESCI.

Todos estos documentos dieron origen a 1245 descriptores. Para este estudio, hemos seleccionado todos aquellos que contenían el término Math*. De esta manera se obtuvieron 102 descriptores. De estos, los más utilizados son School Mathematics y Other Notions of Mathematics Education, con el 10,5% y 10%, respectivamente. Los descriptores presentados en la tabla 5 están presentes en la mitad de todos los documentos publicados (un 50,2%).

Tabla 5. *Descriptores que incluyen Math* >3.*

Descriptor	**Frecuencia**	**% de 129**
School Mathematics	24	10,5
Other Notions of Mathematics Education	23	10,0
Mathematics Education	19	8,3
Mathematics	16	7,0
Research and Innovation in Mathematics Education	8	3,5

Mathematical Education	5	2,2
Mathematical Modeling	4	1,7
Mathematical Thinking	4	1,7
Mathematical Processes	4	1,7
Critical Mathematics Education	4	1,7
Ethnomathematics	4	1,7

La forma en que estos descriptores se presentan en coaparición (co-words) con otros en los documentos podemos visualizarla mediante una red (figura 4). Se puede observar cómo los tres descriptores más utilizados se conectan en la mayor de las redes generadas.

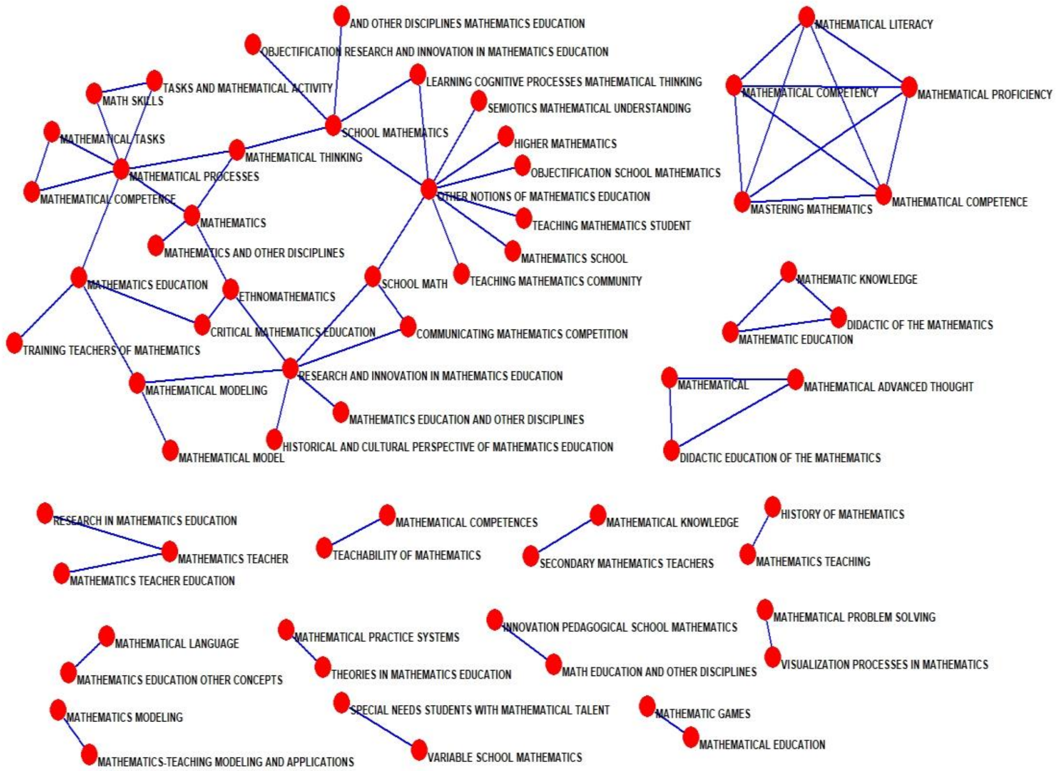


Figura 4. Red de coaparición de descriptores.

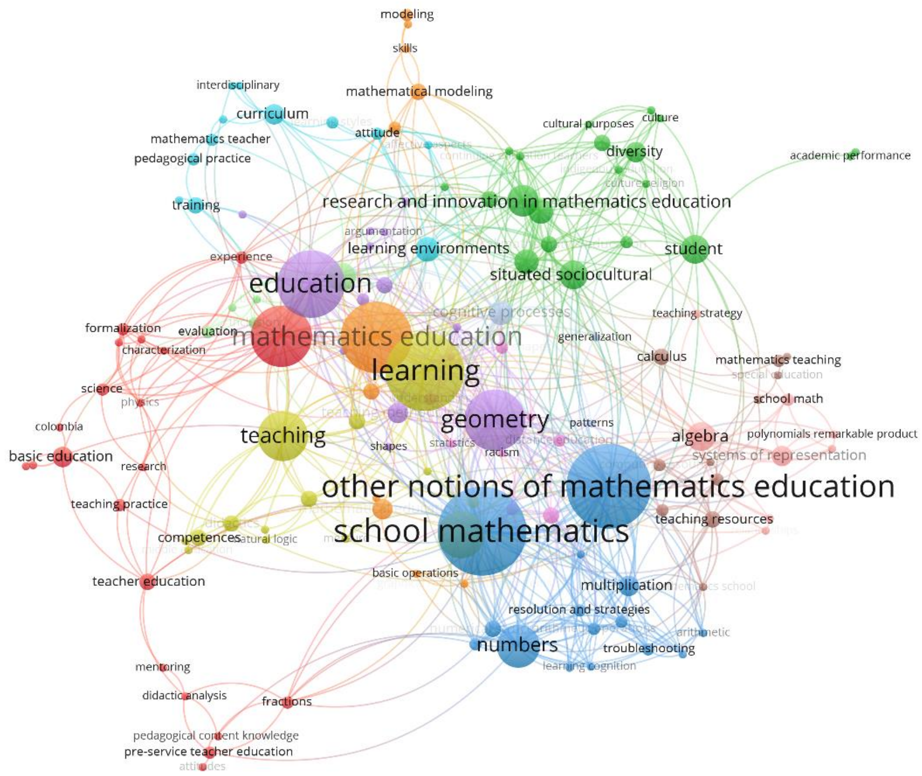


Figura 5. Red total de coaparición de descriptores.

CONCLUSIONES

Esta investigación ha permitido concluir que, si bien ha habido un aumento de la producción (alto si lo comparamos con el año 2005), esta cantidad es escasa si se compara con la producción de otros países en bases de datos como SCOPUS (Jiménez-Fanjul, 2016).

La mayor parte de las publicaciones son de carácter local, dato que se desprende de las revistas en que se ha publicado. Estos datos deben ser el punto de partida para que los investigadores busquen estrategias para publicar en revistas extranjeras. La misma situación puede aplicarse al idioma de publicación: al tratarse de publicaciones locales, el idioma principal de publicación es el español. Para lograr mayor visibilidad e impacto se hace necesario difundir los resultados de las investigaciones también en revistas en inglés o de carácter internacional.

Los resultados señalan, además, que no existen grandes productores en términos de Lotka; encontramos productores medianos y muchos autores transitorios con una sola publicación.

Sin embargo, existe un alto grado de colaboración (como señala el valor arrojado por el GD), ya que más del 75% de los documentos presentan una autoría múltiple.

Esta investigación podría escalarse en un futuro mediante la comparación de esta producción con la existente en otras bases de datos o repositorios tanto de carácter latinoamericano (Redalyc o Scielo) como los prestigios SCOPUS y WOS.

REFERENCIAS

Arboleda, I. F. M. y Páramo, P. (2014). La investigación en educación ambiental en América Latina: un análisis bibliométrico. *Revista Colombiana de educación,* (66), 55-72.

Assefa, S. G. y Rorissa, A. (2013). A bibliometric mapping of the structure of STEM education using co-word analysis. *Journal of the American Society for Information Science and Technology, 64*(12), 2513-2536.

Bueno-Aguilera, F., Jiménez-Contreras, E., Lucena-Martín, C. y Pulgar-Encinas, R. (2016). Dental research in Spain. A bibliometric analysis on subjects, authors and institutions (1993-2012). *Medicina oral, patologia oral y cirugia bucal, 21*(2), e142.

Carretero, A. B. y García, B. M. (2014). La investigación en comunicación y periodismo ambiental en España. Estado de la cuestión y revisión bibliométrica de las principales revistas académicas en comunicación (2005-2013). *Prisma social,* (12), 474-505.

Crawley-Low, J. (2006). Bibliometric analysis of the American Journal of Veterinary Research to produce a list of core veterinary medicine journals. *Journal of the Medical Library Association, 94*(4), 430.

Davarpanah, M. y Aslekia, S. (2008). A scientometric analysis of international LIS journals: Productivity and characteristics. *Scientometrics, 77*(1), 21-39.

Duque, J. C. C. y Libreros, O. F. S. (2018). Análisis bibliométrico de las publicaciones de la revista de la Sociedad Colombiana de Oftalmología durante el periodo 2004-2013. *Revista Sociedad Colombiana de Oftalmología, 48*(1), 83-90.

Fernández, J. E., Martín, P. G. y Fernández, I. E. (2017). Las TIC en la educación española a través de las publicaciones periódicas: un análisis bibliométrico. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, (51), 21-36.

Guerrero, A. J. M. (2019). Estudio bibliométrico de la Producción Científica sobre la Inspección Educativa. *REICE: Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 17(*3), 23-40.

Jiménez-Fanjul, N. (2016). *Producción científica internacional en Educación Matemática. Estudio bibliométrico (1983-2012).* Tesis doctoral. Universidad de Córdoba. Córdoba.

Jiménez-Fanjul, N., Maz-Machado, A., & Bracho-López, R. (2013). Bibliometric analysis of the mathematics education journals in the SSCI. *International Journal of Research in Social Sciences, 2*(3).

Keshava, R. (2020). Research Trends in Neuroscience special reference to Neurology in India: A Scientometrics Study (2004-2018). *Studies in Indian Place Names, 40*(49), 271-279.

Li, Q., Jiang, Y. y Zhang, M. (2012). National representation in the emergency medicine literature: a bibliometric analysis of highly cited journals. *The American journal of emergency medicine, 30*(8), 1530-1534.

Madrid, M. J., Jiménez-Fanjul, N., León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2017). Revistas brasileñas de Educación en SCOPUS: un análisis bibliométrico. *Biblios,* (67), 30-41.

Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Torralbo-Rodríguez, M., Gutiérrez-Arenas, M. P. y Hidalgo-Ariza, M. D. (2011). La investigación en Educación Matemática en España: los simposios de la SEIEM. *PNA, 5*(4), 163-184.

Ramirez, M. C., & Rodriguez Devesa, R. A. (2019). A scientometric look at mathematics education from Scopus database. *The Mathematics Enthusiast*, *16*(1), 37-46.

Rangasamy, V. y Umadev, L. N. (2017). Scientometric Analysis of Solar Energy Research Publications in Germany. *Journal of Advances in Library and Information Science, 6*(1), 7-11.

Subramanyam, K. (1983). Bibliometric studies of research in collaboration: A review. *Journal of Information Science*, 6, 33-38.

Tsay, M. Y. (2009). An analysis and comparison of scientometric data between journals of physics, chemistry and engineering. Scientometrics, 78(2), 279-293.

Vallejo-Ruiz, M., Fernández-Cano, A., Torralbo, M., Maz, A. y Rico, L. (2008). History of Spanish mathematics education focusing on PhD theses. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6(*2), 313-327.

Yu, Y. C., Chang, S. H. y Yu, L. C. (2016). An academic trend in STEM education from bibliometric and co-citation method. *International Journal of Information and Education Technology*, *6*(2), 113.

Bibiana Muñoz-Ñungo
Universidad de Córdoba, España
chachabibi07@hotmail.com

Cristina Rodríguez-Faneca
Universidad de Córdoba, España
l02rofac@uco.es

David Gutiérrez-Rubio
Universidad de Córdoba, España
dgrubio@uco.es

Martín, J. C. y González, J. L. (2020). Elementos del análisis histórico de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Algunas consecuencias didácticas. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *3*(1), 12-21.

ISSN: 2603-9982

ELEMENTOS DEL ANÁLISIS HISTÓRICO DE LOS SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS. ALGUNAS CONSECUENCIAS DIDÁCTICAS

Juan Carlos Martín Molina, Universidad de Córdoba, España

José Luis González Marí, Universidad de Málaga, España

Resumen

Análisis histórico elemental, motivado por la búsqueda de sentido al uso y aplicaciones actuales de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, centrando la atención en el origen del concepto y en los métodos de resolución. El estudio forma parte del análisis fenómeno-epistemológico que permitirá configurar un modelo local para la interpretación de la comprensión del mismo. Destacar la estrecha relación con el desarrollo de las ecuaciones y el álgebra en general, participando de las cuatro etapas conocidas hasta llegar al simbolismo algebraico actual, así como la existencia de métodos de resolución diversos y diferentes formas de representación.

Palabras clave: *Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; análisis histórico, epistemológico y fenomenológico.*

Elements of the Historical Analysis of the Systems of Two Linear Equations With Two Incognites. Some Didactic Consequences

Abstract

Elementary historical analysis, motivated by the search for meaning to the current use and applications of the systems of two linear equations with two unknowns, focusing attention on the origin of the concept and on the methods of resolution. The study is part of the phenomenon-epistemological analysis that will allow to configure a local model for the interpretation of the understanding of the same one. Highlight the close relationship with the development of equations and algebra in general, participating in the four known stages up to the present algebraic symbolism, as well as the existence of diverse methods of resolution and different forms of representation.

Keywords: *Systems of two linear equations with two unknowns; historical, epistemological and phenomenological analysis.*

Recibido: 11/04/2020; Aceptado:27/04/2020

INTRODUCCIÓN

Desde sus orígenes, el ser humano ha intentado comprender los diferentes aspectos que forman parte del entorno y actuar sobre ellos con diferentes herramientas. En este sentido, los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (SE_2LI_2) forman parte de los modelos matemáticos que facilitan la tarea de la resolución de problemas en los que se dan diversas relaciones de dependencia lineal: fenómenos físicos que tienen que ver con magnitudes (escalares: masa, tiempo, longitud, dinero, ...) o situaciones en las que intervienen estructuras lineales (vectores: fuerza, velocidad, campo eléctrico, etc.).

El tratamiento didáctico de estos conocimientos requiere de múltiples análisis que permitan resituarlos/adaptarlos adecuadamente[1] al entorno individual, sociocultural y educativo actual. En el presente documento se presentan algunos de los resultados del análisis realizado desde un enfoque histórico, pero atendiendo, en función del interés didáctico, a criterios conceptuales y procedimentales más allá del mero desarrollo cronológico.

En lo que sigue se presentan, por este orden, las conclusiones del estudio realizado sobre los siguientes aspectos del conocimiento: 1º.- evolución del lenguaje algebraico hasta llegar al algebra simbólica actual, 2º.- procedimientos de resolución de SE_2LI_2 a lo largo de la historia, 3º.- representación de los SE_2LI_2 y tratamiento actual en las aulas de Educación Secundaria

EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO

El uso de un simbolismo adecuado favorece el desarrollo del pensamiento algebraico, razón por la cual en la historia del álgebra tiene importancia no sólo la historia de los conceptos sino también el sistema de símbolos utilizados para expresarlos (Arzarello et al, 1994). En este sentido, de acuerdo con Nesselman (citada por Elsa Malisani, 1999), se pueden determinar tres periodos distintos:

Etapa Retórica: caracterizada por el uso de descripciones en lenguaje ordinario (lenguaje natural). Existían símbolos para denotar cantidades pero no se usaban para desarrollar operaciones, es decir, existía una ausencia total de símbolos o de signos especiales para representar las incógnitas.

En esta etapa son conocidos hechos como los siguientes en distintas civilizaciones:

Los babilónicos (2000 a.C.) analizaron problemas matemáticos estrechamente relacionados con problemas cotidianos (agrícolas, reparto de terrenos, herencias, etc); las soluciones eran dadas en lenguaje natural, al igual que sus procedimientos.

Los egipcios (1700 a.C.) desarrollaron un sistema numérico no posicional, lo cual no permitía un fácil manejo de las cantidades y sus operaciones. Emplearon los métodos de falsa posición o doble falsa posición para resolver problemas sobre ecuaciones. No obstante, al igual que los babilonios, sus procedimientos eran fundamentalmente orales ya que carecían de un lenguaje simbólico matemático.

Los chinos (1200 a.C.) indicaban con símbolos las cantidades, pero carecían de un símbolo para el cero (hueco en el tablero). Su contribución más notable fue la resolución de sistemas de ecuaciones mediante tablas (lo que hoy llamaríamos matrices). Trabajaron con los números negativos, pero no los consideraban soluciones válidas debido a la fuerte influencia del contexto del problema lo cual dificultó la generalización del estudio de las ecuaciones.

Etapa Lacónica (sincopada): en este período se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero los cálculos se desarrollan en lenguaje natural. Se resolvieron ecuaciones pero variando entre los desarrollos orales antiguos y el nuevo simbolismo incipiente.

Los hindúes (200 a.C. – 1200 d.C.) usaron un sistema numérico posicional en base 10 muy similar al actual. No obstante, a pesar de que los problemas seguían emergiendo de problemas cotidianos concretos, desarrollaron un simbolismo para resolver algunas ecuaciones, la regla de tres o la regla de los signos. A pesar de este avance, mantuvieron muchos procedimientos de forma oral y no sacaron provecho a los avances en su notación simbólica, más sencilla que los sistemas numéricos no posicionales antiguos y más adecuada para construir algoritmos y fórmulas para las operaciones básicas.

Los griegos (600 a.C– 600 d.C), debido al complejo sistema numérico que usaban, prefirieron desarrollar procedimientos geométricos, a pesar de lo cual algunos autores griegos, como Herón o Diofanto, comenzaron a usar un tipo de simbología rudimentaria. Así, Diofanto introduce algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero desarrolla los cálculos en lenguaje natural. Este simbolismo lacónico de Diofanto no empieza a evolucionar hasta después de la conquista musulmana en el siglo VII, en el que los árabes (800 – 1300) se encargaron de difundir por Europa este conocimiento logrando un mayor desarrollo del álgebra de ecuaciones y estableciendo reglas de reducción y cancelación de ecuaciones de primer grado. Por lo demás, la notoria influencia de los trabajos egipcios y griegos les permitió desarrollar relaciones entre los procedimientos geométricos griegos, los procedimientos orales egipcios y el nuevo simbolismo y sistema de numeración árabe.

Etapa Simbólica: ya en el siglo XII, Fibonacci aporta ideas para el nuevo simbolismo matemático empleado para resolver ecuaciones. Pero no es hasta más adelante cuando el matemático alemán Johann Widmann (1489) inventa los símbolos “+” y “-” para sustituir las letras “p” y “m” que se utilizaban para expresar la suma y la recta. Por su parte, Robert Recorde (1557), matemático inglés, inventó el símbolo de la igualdad “=”, y hacia finales del 1500 el trabajo de Diofanto traducido al latín indujo a Vieta (1540-1603) a utilizar letras para las cantidades dadas y para las incógnitas y signos para representar las operaciones. Por otra parte, René Descartes (1637) fusionó la geometría y el álgebra inventando la “geometría analítica”, dándonos la notación algebraica moderna en las cuales las constantes están representadas por las primeras letras del alfabeto (a, b, c,…) y las variables e incógnitas por las últimas (x, y, z). En esta etapa se utiliza el lenguaje simbólico no sólo para resolver ecuaciones sino también para formular reglas para relaciones numéricas. De aquí que en el renacimiento europeo (s. XVI – s. XVIII) se comienza a desarrollar una nueva forma de resolver problemas asociados a ecuaciones.

En este período se desarrollan fundamentalmente las ideas de incógnita (usando letras para estas), signos que denoten operaciones entre cantidades numéricas y diferentes tipos de resolución para ecuaciones de distinto grado (primer, segundo, tercer y cuarto grado). Las ecuaciones comenzaron a ser el objeto de estudio sin que, necesariamente, tengan una conexión con algún problema cotidiano. En el proceso de resolución de ecuaciones de grado superior se encontraron con raíces cuadradas cuya cantidad sub-radical era negativa, aunque no se le dio mucha importancia. También se desarrolló el estudio de las matrices de diversos órdenes.

En cuanto a los sistemas de ecuaciones, Euler fue uno de los primeros en mencionar que un sistema "*n* x *n*" no tiene necesariamente "*n*" ecuaciones ya que depende de las características de las ecuaciones (indicios de la dependencia lineal), también define los conceptos de variables independientes y dependientes, dando pie a generar otros conceptos matemáticos tales como el de función. Por último, aparece la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en términos de determinantes (Maclaurin (1698-1746) y Cramer (1704-1752) y, posteriormente, mediante el método de eliminación de Gauss (1777-1855) y Jordan (1838-1922).

Etapa abstracta: en este período las ecuaciones son estudiadas desde una teoría más general y abstracta en donde ya no se buscan las soluciones particulares de una ecuación, sino que se estudia el comportamiento de las soluciones de una familia de ecuaciones. Esta etapa se inicia en Europa durante el s. XIX y llega hasta nuestros días.

Por ejemplo, el concepto inicial de función como proceso de entrada y salida dado, se reemplazó por uno estructurado. En 1830 Dirichlet modifica el concepto euleriano de función para definirla como una correspondencia arbitraria entre números reales. Cien años más tarde, Bourbaki generaliza el concepto de función definiéndola como una relación entre dos conjuntos. Este cambio de enfoque nace producto de los escritos de Galois (1811-1832) antes de morir, que fueron publicados por Liouville (1809-1882) en el *Journal de mathématiques pures et appliqées*. A partir de estos trabajos algunos matemáticos pudieron desarrollar la teoría de grupos y anillos, destacando Lagrange (1736-1813), Jordan y principalmente Cauchy (1789-1857). Ante la imposibilidad de encontrar las soluciones de la ecuación de quinto grado (demostrado por Abel (1802-1829)) Galois tomó un rumbo distinto de investigación. Ya no se centró en cómo resolver ecuaciones de mayor orden sino en cómo se comportaban las soluciones de determinadas ecuaciones. Estas ideas las adoptan Cayley (1821-1895) y Hamilton (1805-1865) y desarrollan el álgebra de matrices y los cuaterniones, respectivamente. Estas nuevas estructuras matemáticas jamás habían sido analizadas antes. El estudio de estas nuevas estructuras no euclidianas y no conmutativas dio lugar a la definición de cuerpo. Sin embargo, no fue hasta principios del s. XX que se desarrollaría una teoría abstracta de cuerpos.

El uso del simbolismo algebraico permitió la eliminación de información superflua y facilitó su desarrollo, lo mismo que la relación entre el álgebra y la geometría. Malisani (1999) sugiere que

> […] el desarrollo del lenguaje algebraico ha sido muy lento y dificultoso, se pasa de ciertos nombres para designar a la incógnita y algunas relaciones, a las abreviaturas de estas palabras, a los códigos intermedios entre el lenguaje retórico y el sincopado y por último, a los símbolos. Es decir, estas abreviaturas y estos códigos se van depurando gradualmente hasta que se llega a elaborar un simbolismo algebraico correcto sintácticamente y más eficiente operativamente, en este proceso se observa el abandono progresivo del lenguaje natural como medio de expresión de las nociones algebraicas. (p. 19)

Con todo ello podemos concluir los siguientes períodos y las principales tareas desarrolladas en ellos:

- Resolución de problemas ligados a una situación cotidiana mediante ecuaciones y métodos empíricos o retóricos (2000 a.C. – 600 d.C.).

- Resolución de problemas ligados a una situación cotidiana mediante ecuaciones y métodos casi simbólicos (200 a.C. – 1300 d.C.).

- Resolución de problemas no necesariamente ligados a una situación cotidiana mediante ecuaciones y métodos simbólicos (s. XVI. – s. XVIII).

- Resolución de ecuaciones polinómicas (s. XVI. – s. XVIII).

- Estudio de estructuras algebraicas (s. XIX en adelante).

En relación con los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se produjo una evolución paralela a la descrita, tal y como se detalla en el apartado siguiente.

RESOLUCIÓN DE LOS SE_2LI_2 A LO LARGO EN LA HISTORIA

Los procedimientos de resolución de los SE_2LI_2 constituyen uno de los aspectos centrales de este conocimiento, aunque resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es aplicar un algoritmo[2], a diferencia de lo que se conoce como “procesos heurísticos”[3]. Podemos decir que la resolución de los SE_2LI_2 con algoritmos no aparece hasta que no llega le etapa simbólica del álgebra, ya que antes dicha resolución podría considerarse dentro de los procesos heurísticos.

La aparición histórica y el desarrollo de los métodos de resolución algorítmicos actuales están relacionados con el simbolismo algebraico dominante en cada etapa, es decir con la sintaxis dominante. Los principales métodos de resolución de sistemas de ecuaciones son los que se detallan a continuación ordenados cronológicamente (Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1989):

a) Método de eliminación o reducción (Babilonios).

En este tipo de procedimiento se denomina a las incógnitas con palabras tales como “longitud”, “anchura”, “área” o “volumen”, sin que el problema tuviera relación con problemas de medidas. Un ejemplo, tomado de una tablilla babilónica es el siguiente:

¼ anchura + longitud = 7 manos

longitud + anchura = 10 manos

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano y observa que la solución puede ser, anchura = 20 y longitud = 30. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En notación actual sería:

$$\left.\begin{aligned} y + 4x &= 28 \\ y + x &= 10 \end{aligned}\right\}$$

restando la segundo de la primera, se obtiene 3x = 18, es decir, x = 6 e y = 4.

b) Método geométrico (griegos).

Su resolución fue a base de construcciones geométricas (Libro II de los Elementos, de Euclides “300 a. de C.”). Hay 14 proposiciones que permiten resolver geométricamente problemas algebraicos que el álgebra simbólica actual los resolvería rápidamente; sin embargo, somos conscientes del valor didáctico del álgebra geométrica.

c) Método de la fórmula (Thymaridas 400 a. de C.).

Se puede resolver un sistema de "n" ecuaciones con "n" incógnitas mediante una fórmula. Así, es fácil comprobar que la expresión:

$$x = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}) - s}{n-2}$$

permite obtener las siguientes soluciones del sistema:

$$\begin{array}{l}
X + X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} = S \\
X + X_1 \qquad\qquad\qquad\quad = K_1 \\
X + \quad + X_2 \qquad\qquad\quad = K_2 \\
\quad . \\
X + \quad \ldots \qquad + X_{n-1} = K_{n-1}
\end{array}$$

d) Método de las matrices.

Los 9 libros del arte matemático (Liu Hui siglo III d.C.) contienen algunos problemas donde se resuelven sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, para resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{array}\right\}$$

se utilizaba el "método de cálculo en el tablero", consistente en plantear la siguiente matriz y operar con ella como se describe a continuación:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \end{array} \end{array}$$

Mediante operaciones entre las columnas de la matriz se obtiene un sistema más sencillo cuya solución es inmediata:

(2ª col. x 3) (2ª col. - 3ª col.) (2ª col. – 3ª col.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix} \cdots\cdots \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix} \cdots\cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

Y así sucesivamente hasta obtener la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

correspondiente a las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 36x = 99 \\ 5y + z = 24 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{array}\right\}$$

que constituyen un sistema equivalente al inicial. Una vez calculado el valor de x (99/36), se vuelve a operar de la misma manera con el sistema resultante.

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales usando matrices y determinantes aparece en Europa con los trabajos de McLaurin (1698-1756) y Cramer (1704-1752), aunque la idea de colocar ecuaciones en forma de filas y columnas fue mencionada por Leibniz (1646-1716) en una carta al marqués de L'Hopital (1661-1704). Inicialmente sólo se usaban determinantes, pues las teorías sobre matrices son posteriores (Sylvester, 1850), y métodos numéricos basados en diversos métodos de iteración que se ven favorecidos por la automatización de los cálculos.

e) Método parecido al algebraico (por sustitución) (Diofanto de Alejandría (250 d.C.)

Por este método se resuelven los sistemas de ecuaciones transformándolos en una ecuación lineal. Ejemplo: para hallar dos números x e y cuya suma sea 20 y la suma de sus cuadrados 208, el autor realiza los cálculos que figuran en el cuadro de la figura 1.

Diofanto	**Mediante sistemas**
$x \approx 10 + x$ $y \approx 10 - x$ $(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$ $100 + 20x + x^2 - 100 - 20x + x^2 = 208$ $200 + 2x^2 = 208$ $2x^2 = 8$ $x^2 = 4$ $x = 2$	$x + y = 20$ $x^2 + y^2 = 208$ Sustituyendo $x = 20 - y$ en la segunda ecuación, $(20 - y)^2 + y^2 = 208$ nos aparece una ecuación de segundo grado.

Figura 1.- Cálculos correspondientes al método de sustitución de Diofanto

Con relación a los números positivos y negativos (todavía no existían los enteros), Diofanto sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Utilizó ya un álgebra sincopada, como hemos señalado anteriormente, y carecía de método general, utilizando métodos diferentes para cada problema, a veces excesivamente ingeniosos.

f) El método de la doble falsa posición (Malisani, 1999)

Este procedimiento consiste en considerar dos valores particulares de la incógnita (de aquí el nombre de doble falsa posición), efectuar los cálculos necesarios para encontrar los errores cometidos utilizando estos valores y por último aplicar una interpolación lineal. Este método se aplicaba generalmente a la resolución de: ecuaciones de primer grado con la incógnita en ambos miembros, sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado (de manera aproximada).

En la obra *Trattato d'Algibra*[4] se resuelven sistemas de ecuaciones lineales mediante la aplicación de la doble falsa posición. Así, por ejemplo, utilizando el lenguaje simbólico moderno, el problema 38 de dicho libro se puede traducir en un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que el autor transformó mediante sustituciones sucesivas en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (Franci e Pancanti, 1988):

$$7y = 13x + 4 \ [1]$$
$$4y = 2x + 176 \ [2]$$

que resolvió de este modo:

1- Adoptó la falsa posición $y_1 = 40$ y en la ecuación [1] calculó $x_1 = 21 + 3/13$.
2- Sustituyó estos dos valores en la ecuación [2] obteniendo 160 en el primer miembro y $218 + 6/13$ en el segundo miembro. Como los dos miembros deben ser iguales, la diferencia es $d_1 = 58 + 6/13$.
3- Igualmente adoptando la falsa posición $y_2 = 80$, calculó $x_2 = 42 + 10/13$ e $d_2 = -(58 + 6/13)$.
4- Aplicó la fórmula de interpolación lineal y obtuvo:

$$y = [(y_2 \cdot d_1) - (y_1 \cdot d_2)] \ / \ (d_1 - d_2)$$
$$y = [80 (58+ 6/13) + 40 (58+ 6/13)]/(58+ 6/13 + 58+ 6/13) = 60 .$$

5- Sustituyendo $y = 60$ en la ecuación [1] encontró $x = 32$

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE LOS SE_2LI_2

Teniendo en cuenta que el manejo de varias representaciones semióticas sobre un conocimiento matemático implica mayor comprensión, "se ha adquirido un concepto determinado, cuando se es capaz de transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo" (Duval, 1999, p. 30), es decir, manipular e identificar la solución de un SE_2LI_2 en cualquier contexto, es indudable la importancia que tiene la representación en el tratamiento didáctico de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Los SE_2LI_2 involucran a una gran variedad de sistemas de representación semiótica (de entre los que destacamos como más importantes: la representación algebraica, geométrica, numérica y verbal) que interfieren e interactúan entre si ante la resolución o la traducción sintáctica o las transformaciones que aparecen en la manipulación de los mismos y su resolución. Por lo tanto, no podemos dejar de considerar cómo se han desarrollado a lo largo de la historia las distintas representaciones de los sistemas. De dicho análisis incluimos a continuación una breve pincelada que se ampliará en posteriores presentaciones de estos estudios.

En la etapa retórica las representaciones más utilizadas fueron la verbal (babilónicos) y numérica (egipcios y chinos); en la etapa sincopada predomina la verbal (hindúes), aparece la representación geométrica (griegos) y por último la representación casi algebraica (árabes); en la etapa simbólica y abstracta recientes se desarrollan todas las representaciones (algebraica, geométrica, numérica y verbal).

CONCLUSIONES

Para finalizar estas breves reflexiones histórico-epistemológico-fenomenológicas tenemos que destacar la necesaria interacción entre los diferentes modos de pensamiento que predominaron en cada momento a lo largo de la historia. Se necesitó volver al análisis geométrico o gráfico para dar el salto desde el estudio de las soluciones de una ecuación al estudio del comportamiento de estas soluciones. Dicha interacción enriqueció, y hoy día enriquece, la comprensión del objeto matemático en estudio.

Los conceptos y métodos del álgebra lineal, en especial los SE_2LI_2, contribuyen al desarrollo de otras áreas de conocimiento, resolviendo una gran variedad de problemas: en física (masa, tiempo, velocidad, coordenadas y posición…), en química (mezclas, aleaciones, …), en economía (modelo de renta nacional, precio de equilibrio, cambio de monedas, …), en dietética (dietas, proporciones, …), etc.

La transformación de un problema concreto en términos del álgebra lineal ha sido, y sin duda seguirá siendo, uno de los métodos más efectivos para hallar la solución.

Por todo ello, no basta con conocer y presentar el concepto en cuestión, sino que se requiere, además, tomar en consideración las interacciones mencionadas y los elementos de carácter histórico que motiven al alumnado a continuar estudios superiores y les permitan solucionar problemas concretos que surgirán con posterioridad.

REFERENCIAS

Arzarello F., Bazzini L. y Chiappin G., (1994). *El álgebra como instrumento de pensamiento. Análisis teórico y consideraciones didácticas*. CNR – Proyecto TID, cuaderno nº. 6.

Duval R (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales.* Traducción al español a cargo de Myriam Vega Restrepo. Universidad del Valle, Colombia,

Franci R. y Pancanti M., (1988). *Introducción de "El Trattato d´Algibra".* En: anónimo, página I – XXIX.

Gairín, J. M. y Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos.* Madrid: Síntesis.

Grupo Azarquiel (1991*). Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid: Editorial Síntesis.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días (3).* Madrid, España: Alianza.

Labraña A., Plata A., Peña C., Crespo E. y Segura R. (1995). *Álgebra lineal. Resolución de sistemas lineales.* Madrid: Editorial Síntesis.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión Histórica. *Revista IRICE,* 13, 105-134.

Moreno, M. F. (1998). *Manual (6) para la formación inicial del profesorado de secundaria*. Almería: servicio de publicaciones Universidad de Almería.

Nesselman, G. H. F. (1842). *Intentando una historia crítica de Álgebra, parte 1. El álgebra de los griegos*. Berlín: G. Reimer

Socas M, Camacho M., Palarea M. y Hernández J. (1989). *Iniciación al álgebra*.

Madrid: Editorial Síntesis.

---

[1] A efectos de optimizar el aprendizaje

[2] "es una prescripción, una orden o sistema secuenciado de órdenes que encadena una serie de operaciones elementales que llevan desde los datos iniciales al resultado" (Gairín y Sancho, 2002, p. 83)

[3] "visto como el arte de inventar con la intención de procurar estrategias, métodos, criterios, que permitan resolver problemas a través de la creatividad, pensamiento divergente o lateral"

[4] "El Trattato d'Algibra, escrito a fines del siglo XIV, representa mucho más que un clásico tratado de ábaco, es un testo de álgebra amplio y orgánico: ya que no sólo desarrolla todos los temas mercantiles que caracterizan este tipo de tratado, sino que también contiene una entera sección dedicada al álgebra. La misma constituye un importante aporte a la teoría de la resolución de ecuaciones. Franci y Pancanti (1988, pág. VI) consideran que es uno de los mejores textos medievales y renacentistas que ellas hayan analizado y señalan que los capítulos correspondientes al álgebra son esenciales para la reconstrucción de la historia de esta disciplina entre los siglos XIII y XVI".

Juan Carlos Martín Molina
Universidad de Córdoba, España
carlosmm69@gmail.com

José Luis González Marí
Universidad de Málaga, España
gmari@uma.es

Muñoz-Ñungo, O., Maz-Machado, A. y Pedrosa.Jesús, C. (2020). Estudio exploratorio de los conocimientos sobre la media en alumnos de Educación Secundaria. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *3*(1), 22-32.

ISSN: 2603-9982

ESTUDIO EXPLORATORIO DE LOS CONOCIMIENTOS SOBRE LA MEDIA EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Oneida Muñoz-Ñungo, Universidad de Córdoba, España

Alexander Maz-Machado, Universidad de Córdoba, España

Cristina Pedrosa-Jesús, Universidad de Córdoba, España

Resumen

La estadística está presente, cada vez más, en la vida diaria y por ello es necesario que las personas conozcan y dominen algunos conceptos básicos sobre este tema. Presentamos un estudio sobre la comprensión de la media en estudiantes de noveno grado de Educación Secundaria, puesto que han recibido formación estadística desde la Educación Primaria y por tanto se espera que tengan un conocimiento y comprensión adecuado de los promedios. Se aplicó una prueba estandarizada, el Statistical Reasoning Assessment, (SRA) que es un cuestionario de conocimientos estadísticos elementales de Konold y Garfield (1993) en una muestra intencional. Se observaron carencias conceptuales y poco éxito en las respuestas. Los resultados son coherentes con otras investigaciones realizadas a nivel internacional en alumnos universitarios.

Palabras clave: *educación estadística, Educación Secundaria, promedios, matemáticas.*

Exploratory study of knowledge about average in Secondary Education students

Abstract

Statistics is increasingly present in daily life, so it is necessary that people know and master some basic concepts on this subject. We present a study on the comprehension of the average in ninth grade students of Secondary Education, since they have received statistical training from Primary Education and therefore it is expected that they have adequate knowledge and understanding of the averages. A standardized test, the Konold and Garfield (1993) elementary statistical knowledge questionnaire, was applied to an intentional sample. Conceptual deficiencies and little success in the answers were observed. The results

Recibido: 16/04/2020; Aceptado:10/05/2020

are consistent with other research carried out internationally on university students

***Keywords**: statistical education, Secondary Education, average, mathematics.*

INTRODUCCIÓN

Es un hecho constatado que la estadística no solo está presente en el currículo educativo, sino que a nivel social su uso es cotidiano. Por otra parte, la situación social y sanitaria por la que pasa la población hoy día hace que cada día los medios de comunicación e información de forma adecuada inunden la prensa y los telediarios con datos y gráficos estadísticos. Se supone que la población en general tiene los conocimientos y competencias necesarias para interpretar toda esta información. Sin embargo, son muchos los estudios que señalan que esto no es así.

La Estadística es una disciplina autónoma y con métodos específicos de razonamiento (Moore, 1999) y, como afirman ciertos investigadores, la importancia social que actualmente se le atribuye a la estadística en la enseñanza obligatoria, contrasta con la poca formación que sobre esta materia recibe el futuro profesorado que se debe encargar de enseñarla al menos a nivel de la educación primaria (Estrada, Batanero y Fortuny, 2011). Todo ello pese a que, ya, Holmes (1980) había mostrado y justificado iniciar su enseñanza desde la educación primaria.

Esta situación de poca valoración de la estadística por parte de los estudiantes y algunos sectores del profesorado hace que sea un tema que se deja para ser impartido al final de los cursos por lo que, en muchas ocasiones, los contenidos no llegan a ser impartidos en su totalidad (Mayen, 2009).

A nivel internacional se han llevado a cabo estudios sobre los conocimientos y errores centrados en temas específicos de estadística. Así se ha indagado en errores comunes en conceptos de probabilidad (Barros y Fernández, 2001; Estrada y Díaz, 2007), la comprensión de la distribución normal (Batanero, Tauber y Sánchez, 2004), la interpretación de gráficos estadísticos (Arteaga, 2014), aleatoriedad (Azcarate, Cardeñoso y Porlán, 1998) o las pruebas de asociación estadística (Righetti, 2015) por mencionar algunas. Asimismo, se han analizado las actitudes de los alumnos de bachillerato (Salinas y Mallen, 2016; Casas-Rosal et al, 2018) y los maestros en formación (Arteaga, Contreras y Cañadas, 2014; León-Mantero, Pedrosa-Jesús, Maz-Machado y Casas-Rosal, 2019). Otra línea de investigación sobre la educación estadística se ha orientado al análisis de los libros de texto que el profesorado utiliza como apoyo a su docencia (Cobo y Batanero, 2004; Jones y Jacobbe, 2014).

Las medidas de tendencia central son importantes y pese a que en ocasiones se consideran algo fáciles, Batanero (2000) señala que estas envuelven cierta complejidad porque, en muchas ocasiones, los alumnos asignan a la media, la mediana y la moda ciertas propiedades aritméticas que no se conservan para las medidas de posición central. También indica que los algoritmos de cálculo para estas medidas son variados dependiendo de la forma en que se presenten los datos.

Cobo (2003) analizó las medidas de posición central en alumnos españoles y los significados personales que autoconstruían según lo que proponía la teoría del significado de Godino y Batanero (1994). Encontró que los alumnos presentaban una abundancia de significados de estos conceptos estadísticos y que los ponían en juego cuando se enfrentaban a tareas que se les planteaban. Asimismo, afloraron conflictos de tipo semiótico.

Molero, Gea y Batanero (2019) estudiaron la comprensión de propiedades y procedimientos ligados a la media, que tienen los estudiantes al iniciar sus estudios de educación secundaria en un centro público de Sevilla. Hallaron algunos conflictos semióticos similares a los hallados por Cobo (2003) y, en algunos estudiantes, se evidenciaron conflictos en las propiedades y algoritmos.

Por su parte, Mayen (2009) estudió la comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos. Halló dificultades y conflictos tanto conceptuales como procedimentales, así como en la comprensión de las representaciones, confundiendo entre sí los objetos que se representan en la gráfica, como puede ser la escala con los valores de la variable.

En Chile, se estudió la comprensión de las medidas de tendencia central en alumnos de pedagogía matemáticas (Rodríguez, Maldonado y Sandoval, 2016), hallando que tenían un dominio parcial de las habilidades a enseñar para realizar razonamiento estadístico y para descodificar la naturaleza de la información representada. Igualmente, allí se ha analizado la comprensión sobre tablas estadísticas que tienen los estudiantes de primaria (Sepúlveda, Díaz-Levicy y Jara, 2018), observando que, en sus respuestas, presentan dos o más datos relevantes, aunque de forma aislada, y son capaces de generalizar algunos aspectos y ordenar correctamente varios datos, pero fallan al realizar la conexión entre ellos.

En Colombia, el Congreso de la República de Colombia, a través de la Ley General de la Educación, establece que los estudiantes deben aprender estadística y se debe enseñar desde el grado primero hasta el grado undécimo, desarrollando competencias relacionadas con la estadística descriptiva, inferencial, así como la interpretación de tablas y gráficos (Colombia 1994). Para dar cumplimiento a la anterior Ley, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) expide el Decreto 1860 de 1994 y establece los lineamientos curriculares.

Rodríguez y Castro (2019) han estudiado el significado de la media aritmética en estudiantes de último año de la educación secundaria en Colombia obteniendo resultados que revelan la aparición de índices de dificultad en su comprensión, interpretación y significado. También, en Colombia, otros investigadores plantearon un estudio para conocer si la incorporación del software GeoGebra mejoraba el aprendizaje de las medidas de tendencia central, hallando que su uso fue motivador y haciendo el aprendizaje significativo para los estudiantes (Ramírez, Vargas y Vásquez, 2018).

Creemos que todos los estudios reseñados señalan la importancia y actualidad de la investigación en temas de educación estadística. Nuestra investigación tuvo como objetivo conocer cuál es el grado de dominio de las medidas de tendencia central, en estudiantes del grado noveno en Colombia, por ser este el último curso del ciclo de Educación Básica Secundaria, con la intención de contribuir a obtener información que pueda orientar acciones educativas futuras.

Para asumir lo que entendemos por media, decimos que se define la media (media aritmética) de una variable X como la suma ponderada por sus frecuencias relativas de los valores de la variable estadística, representándose por $\bar{X}$ (Abad, Huete y Vargas, 2001):

a) Caso directo: $\bar{X} = \sum_i^k X_i f_i = \frac{\sum_i^k X_i n_i}{N}$

b) Caso indirecto: $\bar{X} = \sum_i^k c_i f_i = \frac{\sum_i^k c_i n_i}{N}$, en este caso se sustituyen las clases por sus marcas, definiéndose de manera similar.

METODOLOGÍA

El estudio que presentamos es exploratorio y descriptivo, que servirá de prueba piloto para testar el cuestionario y determinar si el tamaño de la muestra es adecuado para el estudio final.

Población y muestra

Se aplicó una prueba a 108 estudiantes de noveno grado de dos colegios de la ciudad de Ibagué en Colombia. En el colegio A, había 60 alumnos, de ellos 35 hombres y 25 mujeres. En el colegio B, había 48 alumnos, 24 hombres y 24 mujeres. De tal forma que la muestra la constituyen en total 59 hombres y 42 mujeres de edades comprendidas entre los 14 y los 18 años. El nivel socio económico de los alumnos es de clase media. La prueba se aplicó durante la primera semana del mes de noviembre del año 2019. La encuesta fue anónima y voluntaria. Tuvieron una hora para contestarla y fue aplicada por los autores del estudio. Todos los alumnos tuvieron, durante el último año que estaban cursando, una hora de clase semanal de estadística y habían recibido formación estadística en todos los cursos anteriores según los lineamientos del currículo oficial.

Instrumento

Se utilizó un instrumento validado, el Statistical Reasoning Assessment, (SRA), un cuestionario de conocimientos estadísticos elementales de Konold y Garfield (1993), el cual se tradujo al español. Este consta de veinte preguntas/problemas y viene siendo utilizado con frecuencia en diversas investigaciones sobre conocimientos en estadística a nivel internacional. Las preguntas no respondidas se consideraron “no sabe” y se les asigno la categoría de respuestas incorrectas. Aquí solamente presentaremos los resultados relativos a la media. Por tanto, solo se presentan los correspondientes a los ítems 1, 4, 15 y 17.

La puntuación numérica se obtiene a partir del total de las respuestas dadas por el alumnado en cada una de las preguntas del cuestionario.

Los ítems utilizados son:

Item 1: Un objeto pequeño fue pesado en la misma escala por 9 estudiantes diferentes en una clase de ciencias. Los pesos (en gramos) recogidos por cada estudiante se muestran a continuación:

6.2 6.0 6.0 15.3 6.1 6.3 6.2 6.15 6.2

Los estudiantes quieren determinar tan certeramente como sea posible el peso real de este objeto. De los siguientes métodos, ¿cuál recomendarías que usaran?

__a. Usar el número más común, que es 6.2

__b. Usar el 6.15, ya que es la medida más precisa

__c. Suma los 9 números y divide entre 9

__d. Descarta el 15.3, suma los otros 8 números y divide entre 8

Item 4 Una profesora quiere cambiar la distribución de asientos en su clase con la esperanza de que ello incrementará el número de comentarios [la participación] de sus alumnos. Primero decide ver cuántos comentarios hacen los alumnos con la distribución actual. Un registro del número de comentarios hechos por 8 de sus estudiantes durante un periodo de clase se muestra a continuación:

Iniciales del estudiante	A.A	R.F.	A.G.	J.G.	C.K.	N.K.	J.L.	A.W.
Número de comentarios	0	5	2	22	3	2	1	2

La profesora quiere resumir estos datos computando el número típico de comentarios hechos ese día. De los siguientes métodos, ¿cuál recomendarías que usara?

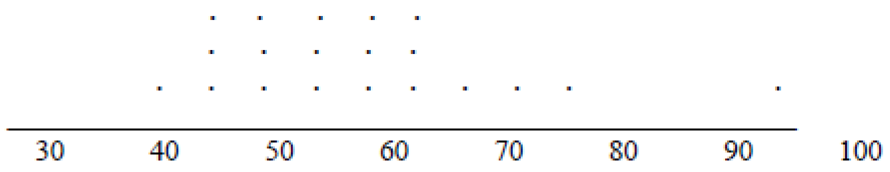
__a. Utiliza el número más común, que es 2

__b. Suma los 8 números y divide entre 8

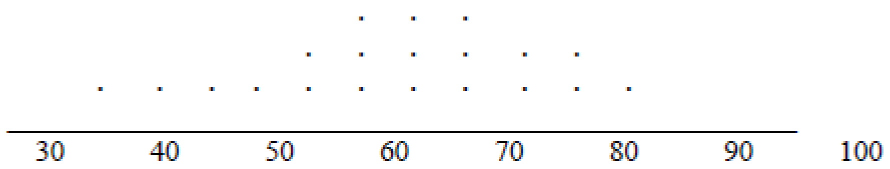
__c. Descarta el 22, suma los otros 7 números y divide entre 7

__d. Descarta el 0, suma los otros 7 números y divide entre 7

Item 15: 40 estudiantes de la Universidad participaron en un estudio sobre el efecto del sueño en las puntuaciones de los exámenes. Veinte de los estudiantes se ofrecieron voluntarios para permanecer despiertos toda la noche estudiando la noche anterior al examen (grupo sin-sueño). Los otros 20 estudiantes (grupo de control) se fueron a la cama alrededor de las 11.00 pm en la tarde anterior al examen. Las puntuaciones del examen para cada grupo se muestran en el gráfico a continuación. Cada punto en el gráfico representa los resultados de un estudiante en particular. Por ejemplo, los dos puntos sobre el 80 en el gráfico de abajo indican que dos estudiantes del grupo con sueño puntuaron 80 en el examen.



Puntuaciones del examen: Grupo Sin Sueño



Puntuaciones del examen: Grupo Con Sueño

Examina los dos gráficos con detenimiento. Después elige de entre las 6 posibles conclusiones mostradas a continuación aquélla con la que más de acuerdo estás.

__a. El grupo sin-sueño lo hizo mejor porque ninguno de los estudiantes puntuó por debajo de 40 y la puntuación más alta la obtuvo un estudiante de este grupo.

__b. El grupo sin-sueño lo hizo mejor porque su media parece ser un poco más alta que la media de los dos grupos.

__c. No hay diferencia entre los dos grupos porque hay un solapamiento considerable entre las puntuaciones de ambos grupos.

__d. No hay diferencia entre los dos grupos porque la diferencia entre sus medias es pequeña en comparación con la cantidad de variación en las puntuaciones.

__e. El grupo con-sueño lo hizo mejor porque más estudiantes de este grupo puntuaron 80 o más.

__f. El grupo con-sueño lo hizo mejor porque su media parece ser un poco mayor que la media del grupo sin-sueño.

Item 17: El comité escolar de una pequeña ciudad quería determinar el número medio de niños por unidad familiar en su localidad. Dividieron el número total de niños de la ciudad entre 50, el número total de unidades familiares. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones debe ser cierta si la media de niños por unidad familiar es de 2,2?

__a. La mitad de las unidades familiares de la ciudad tienen más de 2 niños.

__b. Más unidades familiares en la ciudad tienen 3 niños que las que tienen 2 niños.

__c. Hay un total de 110 niños en la ciudad.

__d. Hay 2.2 niños en la ciudad por cada adulto.

__e. El número más común de niños en las unidades familiares es 2.

__f. Ninguna de las anteriores.

Algunos de los análisis de estos ítems pueden hallarse en Batanero, Godino y Navas (1997).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Tomando en cuenta que los resultados en ambos colegios mostraron valores altamente similares, tomamos la decisión de presentar los resultados de manera conjunta para las dos muestras de sujetos. La tabla 1 presenta los resultados de cada ítem y los valores globales para los cuatro ítems. Se observa que los problemas representaron una gran dificultad a los alumnos. Solo el 19,5% de las respuestas fueron correctas. El mayor porcentaje de respuestas correctas fue del 25% para el ítem 17. Estos resultados indican unas altas deficiencias en la comprensión del algoritmo de cálculo de la media. Si comparamos estos resultados con los obtenidos por Batanero, Godino y Navas (1997) en alumnos universitario de magisterio y pedagogía, observamos que en términos generales los resultados son similares en cuanto a la falta de comprensión del algoritmo. Además, los resultados para el ítem 17 son prácticamente iguales, 27% de correctos en este con alumnos de secundaria y 26,4% con alumnos de universidad.

Tabla 1. *Frecuencias y porcentajes de respuestas correctas a los ítems sobre promedios*

Ítem	Correctos	%	Incorrectos	%	Total	distractor principal	N° presencias del distractor	%
1	16	14,8	92	85,2	108	a) Utilización de la moda	54	50,00
4	26	19,4	82	75,9	108	d) Descartar el valor nulo	31	28,70
15	15	14,0	93	86,1	108	c) Sobrevalorar la dispersión	25	23,10
						b) No descartar los valores atípicos	24	22,20
17	27	25	81	75,0	108	a) el valor de la mediana es próximo a la media	22	20,04
						e) Suponer una distribución simétrica	22	20,04
Total	84	19,4	347	80,6	432			

En el ítem 1, se evidencia que al ser un mismo objeto el pesado, surge un valor atípico (15.3). Puesto que este valor es bastante lejano a los demás tomados sobre el mismo objeto, puede ser resultado de una mala medición que distorsionará o tendrá gran influencia en la media del conjunto de datos. Los estudiantes deben ser capaces de comprender que la mejor opción es realizar una media recortada, descartando ese valor atípico. Sin embargo, se observa que la mitad de los estudiantes no discriminan correctamente esto y optan por elegir la moda como opción. Es un claro indicio de la incapacidad de comprensión de lo que representa la moda en una colección de datos y de fallos en la interpretación de la media en situaciones que requieren algo más que aplicar un algoritmo aritmético.

Para el ítem 2, al igual que en el ítem 1, aparece un valor atípico (22) pero además se incorpora un valor nulo (0). Para responder a la pregunta, los estudiantes han de comprender que, en este caso, todos los valores son importantes y necesarios por el contexto en el que se tomaron y para los propósitos de la profesora. Por tal razón, tanto el 0 como el 22 deben ser tomados en cuenta. En las respuestas se observa que el 38% de los alumnos descartan el cero, es decir, asumen que cero es igual a no existencia de datos. Esto indica que esos alumnos tienen dificultad de comprensión de la propiedad de los promedios que señalan Strauss y Bichler (1998, p. 66) “F: Cuando se calcula el promedio, se debe tener en cuenta un valor de cero, si aparece”. Estos porcentajes de error son semejantes al 40% hallados por Strauss y Bichler (1988) en alumnos de más de 14 años.

En el ítem 15, los alumnos responden incorrectamente en igual porcentaje (22%) seleccionando las respuestas b y c. La respuesta b, señala que han hecho el uso de los promedios, pero sin descartar los valores atípicos que afectan en gran medida los valores de las medias (las aumentan o las disminuyen), conllevando a conclusiones falsas. Para la respuesta c, asumen que, como los recorridos en los gráficos presentan zonas de superposición de datos, esto implica semejanza en el comportamiento de los grupos.

En cuanto al ítem 17, el enunciado permite saber que la distribución está acotada en cero. Como no se indica si la distribución es simétrica o asimétrica, no podemos estar seguros de si la moda, media y mediana son iguales (si fuese simétrica). Sin embargo, los alumnos han respondido mayoritariamente a las respuestas que representan la mediana y la moda a partir de la media si fuese una distribución simétrica. Es decir, o creen que todas las distribuciones son simétricas o tienen la idea de que la representación de las distribuciones tiene forma de campana.

Si atendemos al género de los alumnos, en las respuestas no se hallaron diferencias estadísticamente significativas entre hombres y mujeres en la prueba U de Mann-Whitney para muestras independientes (el valor $p = 0{,}638$). En el ítem 1, es mayor el porcentaje de hombres que responden correctamente a la pregunta, pero la situación se invierte de manera leve en el ítem 4.

Tabla 2. *Frecuencias y porcentajes de respuestas sobre promedios según el género.*

Ítem	**Correcto**				**Incorrectos**				**Total**
	Hombre	**%**	**Mujer**	**%**	**Hombre**	**%**	**Mujer**	**%**	
1	11	10,2	5	4,6	48	44,4	44	40,7	108
4	13	12,0	15	13,9	46	42,6	34	31,5	108
15	9	8,3	6	5,6	50	46,3	43	39,8	108
17	16	14,8	11	10,2	43	39,8	38	35,2	108
Total	49	11,3	37	8,6	187	43,3	159	36,8	432

De acuerdo con los resultados obtenidos, está claro que el conocimiento y la comprensión de los conceptos estadísticos elementales como media, mediana o moda no están suficientemente asimilados e interiorizados por parte de los alumnos. Esto sucede pese a que el propio currículo y los lineamientos de los Estándares Básicos de Competencias del Ministerio de Educación señalan, a modo de ejemplo, que desde 4º a 5º de primaria, en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, debe estar presente "uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican" (MEN, 2006; p. 83). Esta formación y fomento del pensamiento aleatorio, así como el sistema de datos, se siguen impartiendo durante toda la formación básica por lo que, al llegar a noveno grado, ya debería ser de dominio del alumnado.

CONCLUSIONES

Los porcentajes de respuestas erróneas es demasiado alto en los cuatro ítems analizados, lo cual es preocupante por ser un tema elemental que se enseña y trabaja desde la educación primaria.

Se han observado errores y dificultades para la aplicación correcta de la media en problemas que podrían denominarse “de la vida real”, que no conllevan dificultades de cálculo algorítmico.

Si los alumnos no toman en consideración los diferentes matices que están implicados en un problema estadístico y tienen dificultades para diferenciar el uso de una u otra medida de tendencia central, deberán explorase estrategias didácticas alternativas para que sea posible dar cumplimiento a la aspiración del Ministerio de Educación en relación con las competencias en pensamiento aleatorio y sistemas de datos.

Este estudio ha tenido como limitación que los sujetos de estudio son de centros educativos públicos de una misma ciudad y, por tanto, no es posible extraer inferencias globales. Asimismo, por haberse aplicado la prueba cuando se terminaba el curso escolar, no fue posible realizar entrevistas que hubiesen aclarado algunos aspectos sobre los resultados obtenidos y, de ese modo, enriquecido el estudio.

Hemos replicado el estudio de Batatero *et al* (1997) en una población cuyo nivel de escolaridad es preuniverstiaria en un contexto social diferente pero los resultados han sido similares. Lo que podría señalar que estas deficiencias son generalizadas en la población.

El paso siguiente es ampliar el estudio con una muestra mayor en número y en centros educativos de diferentes lugares, para conocer si estos resultados son generalizados a la población estudiantil colombiana.

REFERENCIAS

Abad, F., Huele, M. D. y Vargas, M. (2001*). Estadística para las Ciencias Sociales y Laborales.* Granada: Universidad de Granada.

Arteaga, P. (2014). Conocimientos sobre gráficos estadísticos de una muestra de futuros profesores de educación primaria. En Andrade, Luisa (Ed.), *Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 38-46). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Arteaga, P., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2014). Conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores: un estudio exploratorio. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (6). DOI: https://doi.org/10.35763/aiem.v1i6.97

Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(1), 85-97.

Barros, P. y Fernandes, J. (2001). Dificuldades de alunos (futuros professores) em conceitos de estatística e probabilidades. Em I. Lopes, J. Silva e P. Figueiredo (Orgs.), *Actas do ProfMat 2001* (pp. 197-201). Vila Real: Associação de Professores de Matemática

Batanero, C. (2000) Dificultades de los estudiantes en los conceptos estadísticos elementales: el caso de las medidas de posición central. Em C. Loureiro, O. Oliveira y L. Brunheira. (Orgs.) *Ensino e aprendizagem da estatística*.(pp.31-48). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educaç

Batanero, C., Godino, J. D., & Navas, F. (1997). *Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios.* VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa, 310-304.

Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, B. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso de análisis de datos. *Quadrante, 10*(1), 59-92.

Casas-Rosal, J. C., Villarraga, M. E., Maz-Machado, A. y León-Mantero, C. (2018). Factores de influencia en las actitudes hacia la estadística de alumnos de educación media. *Espacios, 39*(52), 33-45

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(1), 005-18.

Colombia, C. D. (1994). *Ley 115 de febrero 8 de 1994*. Ley general de educación.

Estrada, A., y Díaz, A. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 44, 48-57.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2011). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática, 16*(1), 89-111.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Holmes, P. (1980). Teaching Statistics 11-16. Sloug: Foulsham Educational.

Jones, D. L. y Jacobbe, T. (2014). An Analysis of the Statistical Content in Textbooks for Prospective Elementary Teacher. *Journal of Statistics Education, 22*(3). DOI: 10.1080/10691898.2014.11889713

Konold, C. y Garfield, J (1993). *Statistical reasoning assesment, Part 1: Intuitive thinking.* University of Massachusetts: Scientific Reasoning Institute.

León-Mantero, C., Pedrosa-Jesús, C., Maz-Machado, A. y Casas-Rosal, J. C. (2019). Medición de las actitudes hacia las matemáticas en maestros de Educación infantil en formación. *Espacios, 40*(23), 14-24.

Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Ministerio de Educación y Ciencia. MEN (1989). *Diseño curricular base. Educación secundaria obligatoria*. Bogotá: MEN

Ministerio de Educación Nacional. MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Autor

Molero, A., Gea, M. M. y Batanero, C. (2019). ¿Qué conocimientos de la media aritmética tienen los estudiantes al inicio de la educación secundaria? En Marbán, J., Arce, M., Maroto, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Alsina, Á. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII*I (pp. 423-432). Valladolid, España: Universidad de Valladolid.

Moore, D. S. (1999): Discussion: what shall we teach beginers. *International Statistical Review, 67*(3), 223-248.

Ramírez, Mayerlin; Vargas, Leonardo; Vásquez, Fernando (2018). Desarrollo del pensamiento aleatorio en el proceso de aprendizaje de las medidas de tendencia central mediante GeoGebra en estudiantes de noveno grado. En Valbuena, S., Vargas, L. y; Berrío, J. (Eds.): *Encuentro de Investigación en Educación Matemática* (pp. 371-379). Puerto Colombia, Colombia: Universidad del Atlántico.

Righetti, A. (2015). Errores detectados en estudiantes universitarios al desarrollar pruebas de asociación estadística. *Revista de la Escuela de Perfeccionamiento en Investigación Operativa, 23*(38), 78-98.

Rodríguez, J. y Castro, D. (2018). Significado de la media aritmética y el uso de la palabra promedio en estudiantes de 11° grado. En Álvarez, Ingrith (Ed.), *Memorias del III Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 399-409). Bogotá, Colombia: Asociación Colombiana de Educación Estocástica

Salinas, J. y Mayen, S. A. (2016). Estudio exploratorio de las actitudes hacia la estadística en estudiantes mexicanos de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (10). DOI: https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.130

Sepúlveda, A., Diaz-Levicoy, D. y Jara, D. (2018). Evaluación de la comprensión sobre Tablas Estadísticas en estudiantes de Educación Primaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(64), pp. 869-886.

Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1), 64-80.

Oneida Muñoz-Ñungo
Universidad de Córdoba, España
onemunu@gmail.com

Alexander Maz-Machado
Universidad de Córdoba, España
ma1mamaa@uco.es

Cristina Pedrosa-Jesús
Universidad de Córdoba, España
crispj1991@gmail.com

Herreros, D. y Sanz, M.T. (2020). Estadística en educación primaria a través del aprendizaje basado en juegos. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 3*(1), 33-47.

ISSN: 2603-9982

ESTADÍSTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA A TRAVÉS DEL APRENDIZAJE BASADO EN JUEGOS

Diana Herreros, Universidad de Valencia, España

Maria T. Sanz, Universidad de Valencia, España

Resumen

Son muchos los estereotipos que definen a la disciplina de Matemáticas como un área de múltiples problemas para su proceso de enseñanza-aprendizaje. Por este motivo, se presentan el proceso y los resultados de una investigación para aportar evidencias de la necesidad de un cambio metodológico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos estadísticos: media, moda, mediana y rango. Con tal fin se utiliza una enseñanza basada en el aprendizaje a través del juego y se analizan los conocimientos del alumnado antes y después de una intervención. Los resultados muestran evidencias significativas acerca de la eficacia de dicha metodología frente al modelo didáctico tradicional.

Palabras clave: *matemáticas, formación del profesorado, estadística, enseñanza-aprendizaje, juego*

Statistic in primary level through game based learning

Abstract

There are many stereotypes that define the Mathematics discipline as an area of multiple problems for the teaching and learning process. For this reason, this research is presented to provide evidence of the need for a methodological change in the teaching-learning process of statistical content: mean, trend, median and range. To this end, play-based learning is used and the students' knowledge is analyzed, before and after an intervention. The results show significant evidence about the effectiveness of mentioned methodology compared with the formal teaching system.

Keywords: *mathematics; teacher training; statistics; teaching learning, game*

Recibido: 26/04/2020; Aceptado: 12/05/2020

INTRODUCCIÓN

A lo largo de los años y sobre todo en la actualidad, es frecuente escuchar duras críticas hacia la disciplina de matemáticas por los problemas que presentan los estudiantes cuando tratan de aprender sus contenidos.

Son muchos los investigadores que enmarcan dichas dificultades, así como el rechazo hacia esta disciplina, con la formación del profesorado (Britton, Paine, Pimm y Raizen, 2003; European Commission, 2008; OCDE, 2005; Tatto et al., 1993). En esta línea, Gómez (1998) ya defendió que una posible deficiencia en la didáctica de los docentes era resolver los ejercicios mostrando las soluciones en limpio sin indicar el proceso *de borrador* por medio del cual se llega a las soluciones, provocando, por tanto, la memorización sistemática de las estrategias de resolución sin dar pie al entendimiento del proceso. Pochulu (2005) también alude a la formación del profesorado al indicar que parte de las dificultades que presenta el estudiantado es debido a estrategias de enseñanza inadecuadas, las cuales por no identificar los errores típicos que cometen sus discentes, ni aprovechar eso como vía constructivista para apaliar el error, dan lugar a la reiteración de errores, así como dificultades en niveles que van desde la educación primaria hasta la universitaria.

La cuestión es que, aunque gran parte del cuerpo de estudiantes es consciente de la verdadera utilidad de las matemáticas, algunos, por el tipo de enseñanza que reciben, no suelen mostrar gran interés por el aprendizaje de esta materia ni, según las diferentes pruebas PISA (2012, 2015), registran un mínimo de progreso en este campo.

En particular, la estadística es una de las áreas más debilitada a pesar de que hoy por hoy, debido al desarrollo de la sociedad de la información, la estadística se considera un conocimiento imprescindible para la participación ciudadana y la toma de decisiones, como apunta Alsina (2016). Son diversos los estudios que muestran que algunos de sus contenidos se enseñan de forma deficitaria y en disonancia con el currículo (Alsina y Vásquez, 2016) debido a la escasa formación inicial y permanente del profesorado.

El profesorado, en numerosas ocasiones, como reflejo de su inseguridad decide enseñar a través del libro de texto, mediante un modelo didáctico tradicional. Entendido como modelo tradicional, aquel donde el docente, bajo la instrucción, se encarga de transmitir hechos, contenidos y conocimientos matemáticos de manera directa y unívoca, a la espera de ser asimilados por sus estudiantes de manera sistemática y sin dar pie a la crítica o a la discusión. Nos referimos así, a una metodología de carácter expositivo donde el rol del profesor es totalmente protagónico, siendo este el poseedor del conocimiento y reduciéndose el aprendizaje al seguimiento de unos procedimientos y reglas determinadas, a la práctica rutinaria de ejercicios repetitivos, al uso de palabras clave y, entre otras cosas, a la falta de un contexto significativo sobre aquello que se pretende enseñar (Moreano, Asmad, Cru y Cuglievan, 2008). En la misma línea, Almeida (2017) remarca que la estadística se sigue enseñando en el aula de manera muy superficial y con métodos obsoletos, los cuáles podrían mejorar con un cambio en la formación del profesorado.

Además, cabe reseñar que la posición de la estadística en los libros de texto no favorece su docencia. Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006) marcan la constante ubicación de este bloque al final del temario, que unido a la falta de tiempo para ver todos los temas, provoca que, en numerosas ocasiones, no se vea con profundidad dicho tema. En esta línea, la investigación de Ruiz (2014) apunta que solo se invierte en este área un 16% del tiempo en los cursos de 3º y 6º de Primaria en diferentes países de América Latina.

Todo ello revela el carácter complejo del desarrollo de esta materia y el desafío global al que está sometida para conseguir el logro de un proceso de enseñanza-aprendizaje exitoso. Es por este motivo que cada vez son más los agentes educativos e investigadores que tratan de indagar y profundizar en propuestas de mejora relacionadas con términos correspondientes a la formación del profesorado (TEDS-M, ver en Tatto et al., (2008)) y a la puesta en marcha de nuevas prácticas docentes que impulsen la adquisición progresiva de la alfabetización estadística.

En particular, este trabajo presenta una alternativa al modelo didáctico tradicional para la enseñanza de la estadística, el llamado aprendizaje basado en juegos (en adelante GBL, de su denominación inglesa Game Based Learning) es un método de enseñanza que pone de manifiesto ideas ya planteadas en el siglo XVIII por pedagogos como Rousseau y Fröbel al considerar los intereses de los estudiantes como estrategia para su buen desarrollo y aprendizaje y por concebir el juego como una actividad natural del ser humano desde su nacimiento, permitiéndole expresarse, comunicarse con el entorno y, sobre todo, aprender (Tamayo, 2012). Pero podemos remontarnos a varios siglos anteriores, ya que, por ejemplo, en la Edad Media, autores como Fibonacci (matemático italiano del S. XIII), ya practicaron la matemática numérica mediante técnicas derivadas de los árabes utilizando el juego como herramienta; durante el Renacimiento, Cardano (1663) escribió el primer libro sobre juegos de azar, “Liber de ludo aleae” adelantándose al tratamiento matemático de la probabilidad; y Gauss, el cual siendo un gran aficionado a jugar a las cartas, en el siglo XIX ya aprovechó la anotación de las jugadas para realizar estudios estadísticos.

Asimismo, son varios los psicólogos que han contribuido al estudio del juego como base del desarrollo y del aprendizaje; según destaca Veer y Valsiner (1994), Vygotsky afirma que los juegos “constituyen la fuente principal de desarrollo cultural en el niño, y en particular, del desarrollo de la actividad simbólica” (p.57), ya que, en la infancia, la actividad simbólica que se da en los juegos les ayudará a comprender el mundo del que forman parte. También Piaget (1985) indica que “los juegos ayudan a construir una amplia red de dispositivos que permiten al niño la asimilación total de la realidad, incorporándola para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla” (p.189). Por tanto, podríamos afirmar que, si los matemáticos de todos los tiempos han disfrutado tanto contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprender la matemática, en particular la estadística, a través del juego en contraposición al modelo didáctico tradicional? En respuesta a esta pregunta se platea el objetivo del trabajo presente: analizar la adquisición de determinados contenidos de Estadística, mediante la puesta en práctica del juego como medio vehicular para tratar de ofrecer nuevas formas de enseñanza que rompan con el modelo didáctico tradicional.

Aunque la literatura existente sobre este tópico no muestra numerosas respuestas que han permitido romper con el carácter tradicional de la enseñanza matemática, debido entre otras cosas, a la poca evolución en los modelos de enseñanza y a la reciente incorporación del bloque de estadística y probabilidad en el currículo de Educación Primaria, encontramos estudios como el de Salvador (2007) o Almirón (2017) que evidencian la positiva contribución del GBL en la adquisición de los contenidos matemáticos. En sus estudios se evidencia que el juego potencia el aprendizaje de las matemáticas, así como el interés por dicha materia. En particular, tras poner en práctica proyectos de estadística y probabilidad en aulas del tercer ciclo de primaria, se concluyó con una mejora en la comprensión de los contenidos estadísticos.

De hecho, estudios más recientes también muestran resultados positivos a favor del juego como recurso de enseñanza-aprendizaje no solo en estadística y probabilidad sino en los contenidos de matemáticas en general. Por ejemplo, en Mariscal y Sánchez (2019) se manifiesta una mejora significativa en el aprendizaje de la geometría al utilizar el juego en el aula de segundo curso, o en Guzmán Urbina (2019) se determina el positivo efecto de un programa basado en juegos didácticos en la construcción de aprendizajes en el área de Matemática en estudiantes del cuarto curso de educación primaria.

De este modo, teniendo presente este panorama, en la continuación del trabajo se explicará el carácter tradicional propio de la enseñanza de las matemáticas y se apuntará al GBL como método diferente para el proceso enseñanza-aprendizaje. Se realizará un análisis de todas las decisiones sobre materiales y métodos de estudio que permiten la investigación aquí presentada, así como su procedimiento e instrumentos de evaluación utilizados. Se expondrán los resultados obtenidos, así como un análisis cuantitativo y cualitativo de los mismos. Por último, se realizarán diferentes valoraciones críticas sobre los datos obtenidos, comparándolos con los resultados y recapitulaciones de otros estudios que tratan la misma problemática.

METODOLOGÍA

La presente investigación de carácter teórico-experimental, estudio real de caso, se ha llevado a cabo con alumnado con edades comprendidas entre 11 y 12 años de un centro escolar de una localidad de unos 20.000 habitantes.

Por lo que respecta a los participantes, aunque realmente dicho curso está formado por 19 discentes, este estudio solo irá dirigido a 17 de ellos, ya que, aunque la mayoría presentan características similares propias de la etapa evolutiva en la que se encuentran, no todos están situados, en términos de Vygotsky (1977), en la misma zona de desarrollo.

Finalmente, señalar que el alumnado objeto de estudio ya había finalizado el libro de texto con el que el tutor de aula impartía sus clases, a través de un modelo didáctico tradicional, así pues, ya eran conocedores de todos los conocimientos establecidos en dicha etapa educativa.

Materiales y Métodos de Intervención

Para dar respuesta al objetivo del presente trabajo se hace uso de la práctica pretest y posttest pero con una única tarea. Con la primera se determinará cuál es el nivel acerca de los conocimientos sobre la estadística numérica que han sido asimilados con el modelo didáctico tradicional impartido por el tutor del aula, previamente a la introducción de la innovación. Con la segunda prueba se determina el aprendizaje de estos conocimientos por parte de los estudiantes tras el desarrollo de la metodología GBL efectuada por la investigadora.

La tarea que se presenta en ambas pruebas ha sido diseñada a partir del contenido del libro de texto trabajado durante el curso escolar, y lo recogido en el currículo (Real Decreto 126/2014, p. 82) acerca del conocimiento estadístico numérico: “Iniciación intuitiva a las medidas de centralización: la media, la mediana la moda y el rango”.

> T.1. En una floristería se venden 10 macetas con flores a los siguientes precios en euros: 15,18, 20, 15, 14, 18, 15, 12, 18, 15.
>
> Halla la media, la mediana, la moda y el rango de los precios.

El motivo de elección de esta tarea se debe principalmente a dos causas: la capacidad de desarrollar el carácter exacto de las matemáticas al poner en juego conceptos estadísticos que requieren de una extracción exacta a través de números enteros y la injerencia directa en cuestiones de la vida real del alumnado, pues deben encontrar respuesta a problemas estrechamente relacionados con la práctica social de estos, más allá del ámbito matemático. Tanto la media, como la mediana, la moda o el rango, son contenidos útiles para su desempeño diario, ya que les sirve para averiguar por sí mismos aspectos como sus calificaciones medias en una asignatura, qué objeto está de moda entre un grupo o incluso la dispersión entre los datos de un mismo conjunto relacionado con un tema que les interese.

Para ello se ha utilizado una metodología de carácter experimental y principalmente cuantitativa, puesto que en el apartado de resultados se tendrán en cuenta y se analizarán las respuestas a las pruebas pretest y posttest. Sin embargo, dicha revisión de los datos cuantitativos, unidos a la información registrada en los dos tests servirán para analizar los resultados desde un punto de vista cualitativo, generando otro tipo de conclusiones igualmente relevantes para el presente trabajo, las cuales permitirán no solo ofrecer la realidad existente en aula, sino la posibilidad de evaluar las ventajas e inconvenientes de la metodología GBL, frente a la tradicional.

Procedimiento

Se dedicó una sesión para efectuar la prueba pretest mencionada anteriormente. Tras esto se dedicaron 6 sesiones para realizar la intervención, sobre los contenidos estadísticos arriba mencionados, a través de la metodología GBL. Esta propuesta, incluiría diferentes actividades tanto en grande y pequeño grupo como individuales y tendrían lugar en diferentes estancias del colegio como el aula habitual, el aula de informática y el patio, promoviendo el trabajo en equipo, la cooperación y comunicación, la autonomía y el autocontrol y a su vez, el aprendizaje en contacto con la naturaleza, las nuevas tecnologías y determinados materiales manipulativos (ver detalle en Anexo 1).

Durante la primera sesión, en el aula se efectuaron distintas actividades en las que se usaron dados y cubos lego multicolores para calcular la media y la moda, así como tratar de definirlas teóricamente. En la segunda sesión se hizo uso del juego de la Jenga, que se trata de ir extrayendo piezas de una torre de madera evitando el derrumbe de esta. El objetivo es tratar los conceptos estadísticos a través de la cantidad de piezas extraídas previo al derrumbe. También se hizo uso de recursos web, en una tercera sesión, a través de la página Genmagic para investigar sobre recursos online con los que trabajar conceptos de estadística, como ahora el juego de Pasapalabra para recordar determinados conceptos que serán de ayuda en la actividad posterior. Finalmente, las tres últimas sesiones se dedicaron a la realización de una yincana matemática y de una Escape Room; la yincana tuvo lugar en el patio del colegio y la Escape Room en el aula habitual y en ambas pruebas, el objetivo era encontrar unos sobres con problemas matemáticos, cuya solución llevaría a la obtención de una recompensa; en el primer caso, encontrar un cofre con chocolatinas y en el segundo caso, encontrar la llave del aula que permitiría salir de la habitación donde se encontraban los estudiantes encerrados. Entre los problemas encontramos, calcular la media de edad de un grupo de personas presentes en una reunión escolar, calcular la mediana de la altura de un grupo de jugadores de baloncesto, calcular el rango del conjunto de notas en Matemáticas durante el curso o extraer la moda de un conjunto de frutas presentes en un frutero, entre otros. Todo ello con el objetivo de aplicar los conceptos aprendidos a través de la resolución de problemas matemáticos relacionados con la vida cotidiana de los estudiantes.

Como se observa, a diferencia del modelo didáctico tradicional, ésta estaría basada, mayoritariamente en casos prácticos, donde atendiendo a los distintos ritmos de aprendizaje y presentando actividades de distintos niveles de dificultad, se plantearían situaciones reales demostrando el verdadero valor de las matemáticas en la vida cotidiana y, por ende, en la sociedad. Finalmente, se dedicó una sesión para realizar el posttest.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Atendiendo a la previa indicación del carácter teórico-experimental que presenta este trabajo y teniendo presente el objetivo de mostrar las ventajas del aprendizaje a través del juego frente a la dinámica del modelo didáctico tradicional, para realizar la investigación y el análisis comparativo de datos, se llevará a cabo la revisión de los resultados obtenidos por parte de los miembros participantes en las pruebas pretest y posttest.

Para ello se realizarán dos tipos de análisis, en primer lugar, un análisis cuantitativo de los datos, dividido en: a) un estudio descriptivo, que mostrará la situación de aula, a través de gráficos, así como de forma numérica; y b) inferencial, que permitirá observar las posibles diferencias significativas entre los resultados de ambas pruebas, y por tanto evaluar si existe una mejora de aprendizaje. Para ello se utilizará la prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, debido al reducido tamaño de la muestra. La hipótesis nula en esta prueba es que no hay diferencias significativas entre las puntuaciones obtenidas en ambos test (indicaría que la intervención de enseñanza no ha producido ningún cambio), mientras que la hipótesis alternativa marcaría que si existen diferencias. Se escoge un nivel de significación del 5%.

En segundo lugar, el análisis cualitativo de las respuestas permitirá complementar el estudio cuantitativo presentado. Para este análisis se realiza una categorización de las respuestas y tras esto se presentan respuestas de estudiantes que las representan.

Estudio Descriptivo

Para tratar de observar qué ha ocurrido en la actuación global del aula, se presentan la Tabla 1 y 2, que muestran un análisis descriptivo de los resultados obtenidos por conocimientos específicos y por conocimientos globales, respectivamente.

Tabla 1. *Resultados descriptivos obtenidos por conocimientos (frecuencias absolutas). No=no responden correctamente; Sí= sí responden correctamente.*

	Media (pretest)	Mediana (pretest)	Moda (pretest)	Rango (pretest)	Media (posttest)	Mediana (posttest)	Moda (posttest)	Rango (posttest)
No	10	9	17	17	5	2	0	9
Si	7	8	0	0	12	15	17	8

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 2. *Resultados descriptivos (rango, media y desviación típica) globales acerca de los conocimientos estadísticos. Puntuación del alumnado sobre 10.*

	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar
Pretest	0	3,33	1,372	1,69
Posttest	3,33	10	7,25	2,94

Fuente: Elaboración propia

En estos datos se puede observar que existen diferencias entre los resultados obtenidos antes y después de la intervención. Según indican las frecuencias absolutas de la Tabla 1, durante el pretest, es mayor el número de alumnos que desconoce los conceptos a estudiar, pues solo 7 alumnos conocen adecuadamente el concepto de media y 8 el de mediana, siendo nulo el número de estudiantes que ofrecen aportaciones sobre la moda o el rango. Esto variará tras la intervención, ya que en el posttest solo 5 estudiantes siguen presentando dificultades en la media, 2 en la mediana, 9 en el rango y 0 en la moda.

Esta misma variación se registra en la Tabla 2, donde podemos encontrar las notas mínimas y máximas de ambas pruebas, la media y la desviación estándar de ellas. Como se muestra, la nota mínima del pretest es de 0 frente a un 3,33 en el posttest y la máxima es de 3,33 frente a un 10 en el posttest. De este modo, la media del posttest obtenida 7,25±2,94 es aproximadamente 5 puntos superior a la media del pretest 1,372±1,69. Estos resultados prevén que la metodología tradicional utilizada por el maestro (resultados pretest) no ha permitido consolidar el proceso de enseñanza-aprendizaje, situación totalmente opuesta a la que nos encontramos tras la aplicación de la metodología basada en el juego (resultados posttest).

Estudio Inferencial

Por lo que concierne ahora al estudio inferencial, se inicia con una representación (Figura 1) en la que se encuentra las frecuencias contrastadas en cada conocimiento estudiado durante el pretest y el posttest.

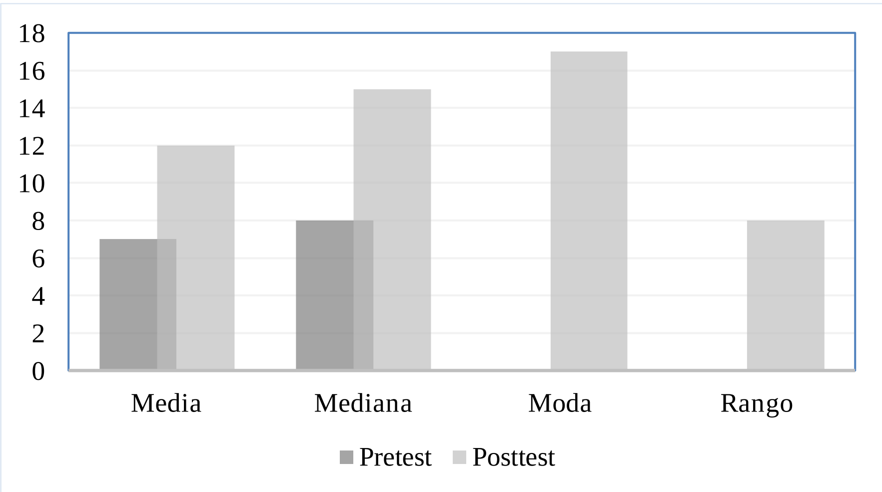


Figura 1. Frecuencias contrastadas en cada conocimiento estudiado

Esta Figura 1 muestra la gran diferencia existente entre los resultados del pretest y del posttest. Mientras que en el posttest todos los contenidos cuentan con una determinada cantidad de alumnos que han sabido contestar correctamente, demostrando conocer y dominar el tema, en el pretest, de los 4 ítems a estudiar, solo han sido la media y la mediana las que han registrado un mínimo de respuestas acertadas. Pues en los conceptos de moda y rango, a pesar de ser impartidos en cursos anteriores, ha sido inexistente la presencia de alumnos que han sabido responder correctamente.

Por otro lado, la Figura 2 presenta diferencias entre los resultados globales de la pregunta entre el pretest y postest. Estas diferencias se demuestran significativas tras realizar el test de Wilcoxon y obtener un p-valor=0.0001<0.05.

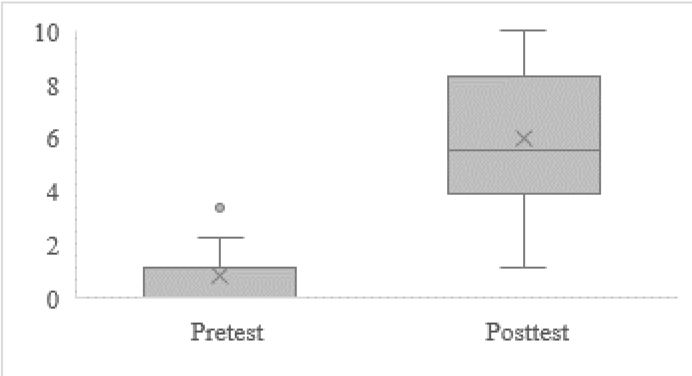


Figura 2. Diagrama de cajas para resultados globales del pretest y posttest

Así pues, se puede afirmar que, el GBL ha ayudado al alumnado a obtener mayores resultados y a adquirir conocimientos previamente desconocidos u olvidados demostrando haber superado parte de las dificultades o problemas que presentaban al inicio.

Estudio Cualitativo

En este apartado se categorizan las respuestas para ver cómo han variado los resultados tras la puesta en práctica de la metodología basada en el juego.

Concretamente, se obtienen cuatro categorías:

1. Alumnado que pasa del 0 al 10 (6 alumnos de 17).
2. Alumnado con buenos resultados en el pretest obtiene excelentes en el posttest (4 alumnos de 17).
3. Alumnado que no mejora en el proceso de cambio de metodología por problemas en la aritmética de los números (5 alumnos de 17).
4. Alumnado que no tienen ningún conocimiento, pero tras la intervención tampoco los muestra, por ser sus respuestas arbitrarias sin un proceso (2 alumnos de 17).

Para la primera categoría se aprecia como varía de no responder la pregunta durante la prueba pretest (Figura 3a) a responder con éxito esa misma tarea durante el posttest (Figura 3b). Las causas de dejar la pregunta en blanco pueden ser diversas: puede no haber entendido la pregunta, tal vez no recuerde los contenidos a trabajar o no consolidó los conceptos ya estudiados con la metodología tradicional. Sin embargo, es destacable que, tras la intervención, muestra responder con éxito lo que se le demanda. En esta situación se encuentran tres alumnos más.

a) 

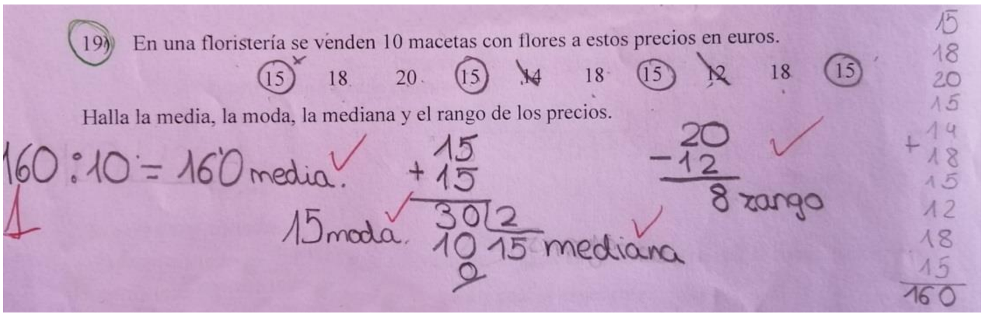
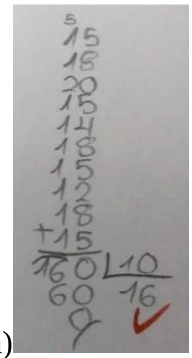
b) 

Figura 3. Ejemplo de alumno en Categoría 1: a) Prueba pretest, b) Prueba posttest

En la segunda categoría, se presenta el ejemplo (ver Figura 4) de uno de los siete alumnos que durante la prueba pretest consiguió responder correctamente al concepto de media. El concepto de media es estudiado desde primeros cursos de educación primaria. Por lo que respecta al posttest, el estudiante ha sabido efectuar correctamente toda la tarea registrando un progreso excelente en la adquisición de los contenidos. Aunque se debe remarcar que no se observa el proceso de resolución, contrario a lo que ocurrió en el pretest.

a) 

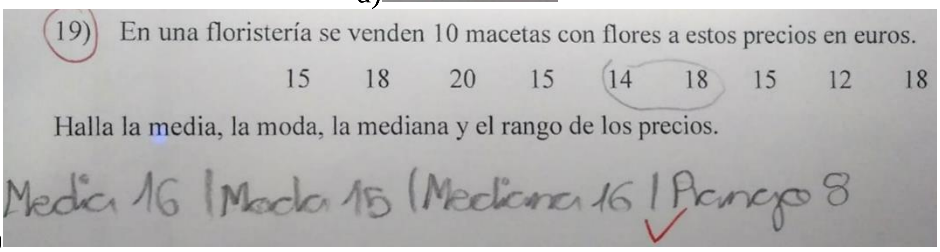
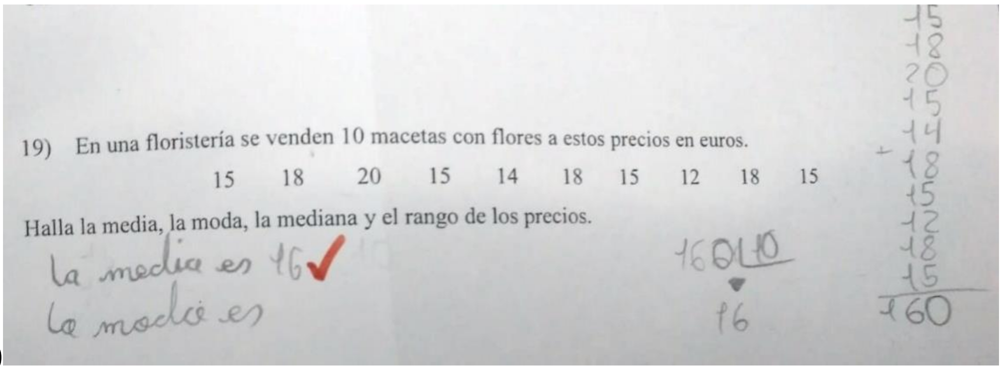
b) 

Figura 4. Ejemplo de alumno en Categoría 2: a) Prueba pretest, b) Prueba posttest

Para la última categoría, se selecciona un estudiante que no ha experimentado cambio en su puntuación (ver Figura 5). Por lo que respecta a la prueba pretest, se observa como el único concepto que conoce es el de la media, realiza la operación e indica el resultado. Sin embargo, a pesar de conocer este contenido, esa misma respuesta la realiza de manera incorrecta en la prueba posttest, tras equivocarse en el proceso de suma y de división. Con lo que, sí que se puede dar por sabido el concepto, ya que el proceso es correcto. En cuanto al concepto de moda, lo aprende tras la intervención, pero no así ocurre con el concepto de mediana ni de rango.

a) 

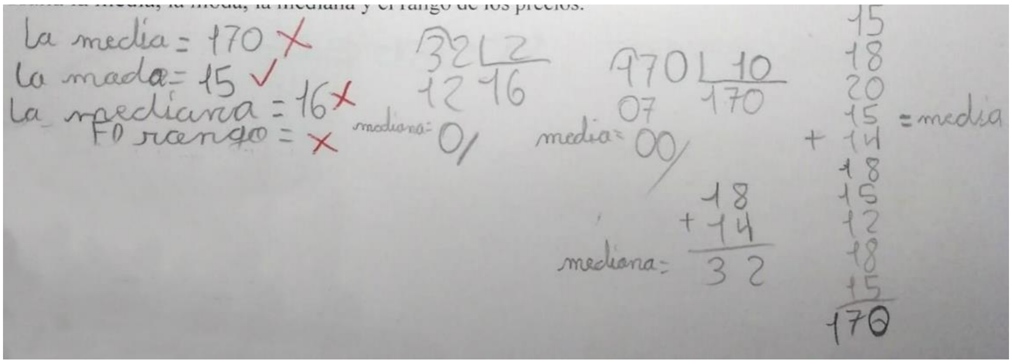
b) 

Figura 5. Ejemplo de alumno en Categoría 3: a) Prueba pretest, b) Prueba posttest

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En general, según los resultados obtenidos, se puede dar cuenta claramente de que la aplicación de la metodología GBL para la enseñanza de las Matemáticas, y en concreto para el aprendizaje de los contenidos de Estadística, demuestra que aumenta el número de estudiantes que alcanzan notablemente las competencias de esta disciplina y les ayuda a obtener mayores calificaciones que con el modelo didáctico tradicional, lo que confirma que se aprende más jugando, explorando y descubriendo que estudiando a través de un libro de texto.

Recordando las palabras de Gil, Blanco y Guerrero (2006) sobre la idea de que las matemáticas son difíciles de aprender y que debido a ello van destinadas a los más inteligentes, cabe destacar que esta investigación ha demostrado lo contrario, ya que si de esa manera se tratase, es decir, si la dificultad estuviera presente dentro de la propia disciplina y no se debiera a factores externos, los alumnos participantes no hubieran registrado un mínimo de progreso tras la intervención, puesto que los contenidos en ambas ocasiones eran los mismos. Sin embargo, como se ha podido demostrar, con el cambio de metodología han sido la mayoría de los alumnos los que de un modo u otro han superado lo que antes no habían sido capaces de lograr. Es por este motivo que se podría apuntar que la investigación demuestra que el problema no es tanto la propia disciplina o la capacidad de los alumnos para el entendimiento y el aprendizaje de las matemáticas, sino más bien el tipo de enseñanza que reciben.

Con este proyecto también se ha demostrado que los alumnos, en general, tienen unos conocimientos previos escasos sobre estadística, afectando ello a su intuición estadística. Pues en base a las observaciones cualitativas de la prueba pretest se podría destacar que algunas de esas dificultades podrían ser consecuencia de aspectos como los siguientes: el uso exacerbado de técnicas algorítmicas o rutinas sin fundamentos teóricos, el abordaje de contenidos completamente descontextualizados, el tratamiento de problemas demasiado centrados en lo numérico o las carencias de conocimientos previos que se trasladan a los nuevos contenidos que se abordan, ya que, en bastantes ocasiones, los errores presentes en las tareas de los alumnos no se debían a problemas sobre los contenidos de estadística, sino a errores de cálculo en operaciones básicas.

Por tanto, teniendo en cuenta las anteriores aportaciones, las cuales son propias de la instrucción tradicional, se podría afirmar que esta investigación también demuestra lo que dijo Ma (1999), cuando planteó que todo docente debería poseer un conocimiento profundo y acabado del contenido a enseñar y sobre todo de cómo enseñarlo, pues la evidente falta de formación de los profesores y los estudiantes para maestro en esta área, debido, entre otras cosas, a la reciente incorporación de este bloque al currículum, hacen que recurran constantemente al libro de texto, produciendo como indicó Vilar (1997), planteamientos anclados en el pasado, presentados de forma simple y rígida a través de estructuras fijas, provocando por tanto el olvido rápido de los contenidos como han demostrado los alumnos en la resolución de su primera prueba.

A continuación, otros de los posibles detonantes que desencadenan las dificultades presentes en los alumnos durante la prueba previa a la intervención, podrían ser la constante insistencia en el pensamiento operacional frente al estructural y procesual característico también del modelo didáctico tradicional y la falta de relación entre aquello que se enseña y la realidad, pues la falta de una introducción significativa que facilite a los estudiantes la comprensión de nuevos conceptos y consolide su aprendizaje, hace que permanezca presente la inutilidad de las matemáticas y por ende, el rechazo hacia la disciplina.

Frente a esta idea, otra de las múltiples evidencias que nos ha aportado esta investigación es la noción de que, a la hora de aprender, es importante que los niños se planteen preguntas donde tengan que investigar, organizar sus respuestas y crear representaciones con los datos que recopilen por ellos mismos, para extraer así conclusiones. Es por ese motivo que el aprendizaje a través del juego se propone en la adquisición de los contenidos de matemáticas como una herramienta que rompe con la enseñanza tradicional, apostando por una instrucción innovadora en la que los niños pueden aprender divirtiéndose y comprobando, por ellos mismos, todo aquello que se explica en clase mediante juegos, de forma que el aprendizaje sea realmente significativo.

Como se ha mostrado, cuando se lleva a la práctica el GBL, se puede observar que no solo es beneficioso para los alumnos a nivel individual, sino para el grupo de clase en general. Por tanto, siguiendo esta misma línea de investigación y considerando que el sistema educativo debe avanzar de acuerdo a la actual realidad sería interesante seguir indagando sobre fenómenos que logren desarrollar una comprensión adecuada de la estadística y la probabilidad y de los conceptos que subyacen de ellas, ya que frente a la evidenciada obsolescencia del sistema educativo, es necesario recurrir a nuevos métodos que permitan el cumplimiento del desarrollo eficaz de los contenidos que todavía hoy siguen suponiendo un reto.

REFERENCIAS

Almeida, M. (2017). La enseñanza de la Estadística en Educación Primaria. *Publicaciones Didácticas, 79*, 262-312. Recuperado de https://pdfs.semanticscholar.org/e017/fa2ba8897c9b50a757d210c27e550514145d.pdf

Almirón, J. (2017). *Proyecto: manipulativos en el aula de estadística y probabilidad para educación primaria (trabajo fin de grado)*. Universidad de Granada, Andalucía, España. Recuperado de http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/46193/1/AlmironCastano_TFGEstadistica.pdf

Alsina, Á. (2016). La estadística y la probabilidad en educación primaria. ¿Dónde estamos y hacia dónde queremos ir? *Aula, 251*, 12-17. Recuperado el 26 de abril de 2020, de https://consejoescolar.educacion.navarra.es/web1/wp-content/uploads/2016/05/682.pdf

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016). La probabilidad en educación primaria. De lo que debería enseñarse a lo que se enseña. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *71*, 46-52. Recuperado de https://dugidoc.udg.edu/bitstream/handle/10256/12167/LaProbabilidadEduPrimaria.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Britton, E., Paine, L., Pimm, D. y Raizen, S. (2003). *Comprehensive teacher induction.* Boston, MA: Kluwer Academic Publisher.

Cardano, G. (1663). *Liber de ludo aleae.*

European Commission (2008). *Levels of Autonomy and Responsibilities of Teachers in Europe.* Bruselas, Bélgica: Eurydice.

Gil, D. y De Guzmán, M. (2001*). La enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid-España: Popular.

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación, 340,* 551-569. Recuperado el 26 de abril de 2020, de http://hdl.handle.net/11162/69004

Gómez, J. (1998). *Contribució a l'estudi dels processos de modelització al'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivel universitari*. Tesis de doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona, España. Recuperado de https://ddd.uab.cat/pub/tesis/1998/tdx-0920105-165302/jgu1de1.pdf

Guzmán Urbina, G. M. (2019). Aplicación de un programa basado en juegos didácticos para la construcción de aprendizajes en el área de matemática en niños de 4° grado de primaria. *Trigopampa 80282.* Recuperado el 26 de abril de 2020, de http://dspace.unitru.edu.pe/handle/UNITRU/13015

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. (2013, 10 de diciembre). *Boletín Oficial del Estado*, *2013*(295), 97858-97921. Recuperado de https://www.boe.es/diario_boe/

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates

Mariscal, A. J., y Sánchez, P. S. (2019). Un enfoque basado en juegos educativos para aprender geometría en educación primaria. *Educação e Pesquisa*, *45*. doi: e184114-e184114

Ministerio de Educación (2016). *PISA 2015. Programa para la Evaluación Internacional de los alumnos. OCDE. Informe español.* Madrid. Recuperado de https://www.educacionyfp.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa-2015/pisa2015preli minarok.pdf?documentId=0901e72b8228b93c

Moreano, G., Asmad, U., Cruz, G. y Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicología XXVI, 2*, 299- 334. Recuperado de http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/psicologia/article/view/1064/1029

OCDE (2005). *Teachers matter: Attracting, developing, and retaining effective teachers.* París, Francia: OCDE.

Piaget, J. (1985). *Seis estudios de psicología.* Barcelona, España: Editorial Planeta.

Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Revista Iberoamericana de Educación, 1-14. Recuperado de https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjkjfPHp4bpAhUNzYUKHRl1BFQQFjAAegQIBBAB&url=https%3A%2F%2Frieoei.org%2Fhistorico%2Fdeloslectores%2F849Pochulu.pdf&usg=AOvVaw2tct2M14v-GEEgf6fQkLac

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. (2014, 1 de marzo). *Boletín Oficial del Estado, 2014*(52), 19349-19420. Recuperado de https://www.boe.es/diario_boe/

Ruiz, N. (2014). La enseñanza de la Estadística en la Educación Primaria en América Latina. REICE. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *13*(1), 103–121. Recuperado de https://revistas.uam.es/index.php/reice/article/view/2801

Salvador, A. (2007). *El juego como recurso didáctico en el aula de Matemáticas*. Madrid, España: Universidad Politécnica de Madrid.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador de Bahía, Brasil. Recuperado de https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2E4_SERR.pdf.

Tamayo, C.A. (2012). *El juego: un pretexto para el aprendizaje de las matemáticas*. Medellín, Colombia: Instituto Salesiano Pedro Justo Berrío.

Tatto, M. T., Nielsen, H. D., Cummings, W. C., Kularatna, N. G. y Dharmadasa, D. H. (1993). Comparing the effectiveness and costs of different approaches for educating primary school teachers in Sri Lanka. *Teaching and Teacher Education*, *9*(1), 41-64. doi: 10.1016/0742-051X(93)90014-8

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University

Veer, R. y Valsiner, J. (1994). *The Vygotsky reader.* Oxford, Basil: Blackwell

Vilar, S. (1997). *La nueva racionalidad: comprender la complejidad con métodos transdisciplinarios.* Barcelona, España: Kairós.

Vygotsky, L. (1977). *Pensamiento y Lenguaje.* Buenos Aires, Argentina: La Pléyade.

ANEXO 1. ACTIVIDADES DE INTERVENCIÓN

SESIÓN 1

1. Dados multicolores (30 min.)

Se organiza la clase en grupos y se les reparte: un dado, una pizarra pequeña y piezas lego de distintos colores. Cada componente realizará 6 tiradas y anotará el resultado en una tabla como la que sigue.

Valores	Color de las piezas	Nº veces
1	Rojo	
2	Verde	
3	Azul	
4	Amarillo	
5	Blanco	
6	Negro	

Una vez llena la tabla:

- Cada grupo cogerá la torre más alta y anotará el valor, debatiendo acerca de la moda.
- Intentarán calcular la media obtenida, en base a los conocimientos de otros años.
- Por último, se les pide que anoten el valor más pequeño que se puede obtener y el más grande, introduciendo así el concepto de rango.

SESIÓN 2

Juego de la Jenga (45 min.)

En grupos de 4, juegan al juego de la Jenga y se les reparte una tabla como la que sigue para que rellenen al finalizar la partida (jugarán tantas como de tiempo) el número de piezas extraídas.

Valores	Nº de veces
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7…	

SESIÓN 3

Descubrimos páginas web (45 min.)

A través del ordenador y de manera individual se le pide al alumno que entre en la página de Genmagic (https://sites.google.com/a/genmagic.net/pasapalabras-genmagic/) para que de forma autónoma investigue sobre recursos online para trabajar conceptos de estadística.

SESIÓN 4 Y 5

Gimcana matemática (90 min.)

En esta actividad el alumnado deberá encontrar por grupos sobres consecutivos y resolver las actividades de su interior. Las actividades serán similares a las recogidas en las sesiones anteriores, y los sobres estarán escondidos por el patio.

SESIÓN 6

Escape room (45 min.)

Se trata de una actividad en la que se encerrará al alumnado en la clase, se les juntará por grupos y deberán encontrar 5 sobres, con actividades similares a las redactadas anteriormente. La solución de las mismas les llevará a pistas, siendo la última la localización de la llave del aula.

Diana Herreros
Departamento Didáctica de la Matemática
Facultad de Magisterio
Universidad de Valencia, España
diaheto@alumni.uv.es

Maria T. Sanz
Departamento Didáctica de la Matemática
Facultad de Magisterio
Universidad de Valencia, España
m.teresa.sanz@uv.es

MES

Obra publicada con Licencia Creative Commons Atribución 3.0 España