Matemáticas, Educación y Sociedad

ISSN: 2603-9982
Matemáticas, Educación y Sociedad
http://mesjournal.es/
editor@mesjournal.es

Vol 4 No 1 (2021): Número monográfico de Historia de la Educación Matemática. Perspectivas de investigación en Historia de la Educación Matemática.

Editores : Alexander Maz-Machado y Carmen León-Mantero

Schubring, G. (2021). Interactions between epistemologies of mathematics and educational systems - the emergence of mathematical communities according to cultures and states in 19th century Europe. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *4*(1), 1-16

ISSN: 2603-9982

INTERACTIONS BETWEEN EPISTEMOLOGIES OF MATHEMATICS AND EDUCATIONAL SYSTEMS - THE EMERGENCE OF MATHEMATICAL COMMUNITIES ACCORDING TO CULTURES AND STATES IN 19TH CENTURY EUROPE[1]

Gert Schubring, Universität Bielefeld, Alemania

Abstract

This paper discusses the generally shared conviction of mathematics being a universal science, with a "common language" and a "shared research agenda". These convictions are discussed in particular with regard to assertions in the volume "Mathematics Unbound" of 2002, where it is maintained that national mathematical communities emerged during the 19th century but converged to a universal community during the 20th century. Emphasising the key importance of the national educational structures, it is argued here that national communities emerged already in the wake of Humanism. The differing "languages" for conceiving of negative numbers provide revealing examples for showing epistemologies related to different educational structures. And a fundamentalist "language" in Italy shows the alignment of mathematics education with classicist conceptions of education. Connecting with the conception of "national styles", the paper proposes approaches to understand characteristics marking the differences between national mathematical communities as tied to social and cultural values and revealed by the education systems. In the conclusion, the claim of an emerged international community is discussed.

Keywords: *universal mathematics; national communities; language of mathematics; negative numbers; fundamentalism; communication; transmission; systems theory*

[1] Revised version of the paper presented at the *Third International Conference on the History and Education of Modern Mathematics*, Hangzhou, China (20-25 September 2014).

Recibido: 17/01/2021; Aceptado: 15/03/2021

Interacciones entre epistemologías de las matemáticas y los sistemas educativos: el surgimiento de comunidades matemáticas según las culturas y los estados en la Europa del siglo XIX

Resumen

Este artículo analiza la convicción generalmente compartida de que las matemáticas son una ciencia universal, con un "lenguaje común" y una "agenda de investigación compartida". Estas convicciones se discuten en particular con respecto a las afirmaciones en el volumen "Mathematics Unbound" de 2002, donde se sostiene que las comunidades matemáticas nacionales surgieron durante el siglo XIX pero convergieron en una comunidad universal durante el siglo XX. Al enfatizar la importancia clave de las estructuras educativas nacionales, se argumenta aquí que las comunidades nacionales ya surgieron a raíz del humanismo. Los "lenguajes" diferentes para concebir números negativos proporcionan ejemplos reveladores para mostrar epistemologías relacionadas con diferentes estructuras educativas. Y un "lenguaje" fundamentalista en Italia muestra la alineación de la educación matemática con las concepciones clasicistas de la educación. Conectando con la concepción de "estilos nacionales", el artículo propone enfoques para comprender las características que marcan las diferencias entre las comunidades matemáticas nacionales como las vinculadas a valores sociales y culturales y reveladas por los sistemas educativos. En la conclusión, se discute el reclamo de una comunidad internacional emergente.

Palabras clave*: matemáticas universales; comunidades nacionales; lenguaje de las matemáticas; números negativos; fundamentalismo; comunicación; transmisión; teoría de sistemas*

INTRODUCTION

Mathematics uses to be regarded as a universal discipline, as constituting one whole – being coherent and without fragmentations. This corresponds to conceptualizations in sociology of science; Thomas Kuhn – in his seminal work "The Structure of Scientific Revolutions" of 1962 (Kuhn, 1962) and in later publications –- used to speak of 'scientific community' in the singular, thus assuming the existence of one global community in each scientific discipline and which would thus act as an entirety. If one investigates, however, the emergence of modern mathematics as a discipline from the 19th century, one remarks, for instance, revealing differences between French mathematics, focused on "physico-mathématique", Prussian mathematics, focused on "pure mathematics", and British and Italian mathematics, which even began to prosper with a certain delay.

THE EXISTENCE OF A PLURALITY OF MATHEMATICAL COMMUNITIES

There is, however, more recent research on the history of modern mathematics where one is aware of the parallel existence of a number of mathematical communities. These communities are identified, in fact, as national mathematical communities. I am speaking here in particular of the volume "Mathematics Unbound", edited in 2002 by Karen Parshall and Adrian Rice, where various such national communities are investigated. They clearly affirm: "To date, much historical scholarship has focused on the development of national mathematical community and on national mathematical developments" (Parshall & Rice, 2002, p. 6).

They situate the emergence of such mathematical communities during the period from 1800 onwards and align the process of emergence with the process of professionalisation of mathematics (Parshall & Rice, 2002, p.8). The ensuing process, the internationalisation of mathematics, the constitution of a universal mathematical community proves to be a rather recent process: although initiated already by the International Congresses of Mathematicians, from 1897 on, the definite universalisation is dated from about 1950 on.

Maybe, since the main focus of this volume is to investigate the process of internationalisation of the national communities, there is not much emphasis on analysing what constitutes a national mathematical community, what are its characteristics and by what one such community distinguishes itself from another national mathematical community. The emergence is seen basically as a consequence of a political process, the establishment of nation-states since Modern Times (from 1450 on), their establishment being based "on the political notion of the nation-state" (Parshall & Rice, 2002, p. 10).

The missing analysis of what constitutes a national mathematical community becomes perceivable by the repeated affirmations that there was and is just one mathematics - namely one universal mathematics. The subject matter of mathematics is identified with the "language of mathematics" and this shared language is claimed "to unite mathematicians" world-wide:

There is a distinct supranational, apolitical, intellectual component to this internationalization process, namely, the content of mathematics itself. Mathematicians in national contexts share educational experiences and, hence, research goals and agendas. As mathematics moves beyond national boundaries, these goals and agendas become more universally held. The subject matter – the language of mathematics – comes to unite mathematicians regardless of their national loyalties; the subject matter becomes supranational; it transcends national boundaries altogether. (Parshall & Rice, 2002, p. 10).

In fact, it is just what needs to be studied whether "mathematics moving beyond national boundaries" constitutes such an unproblematic easy process of extension. The extension can only be seen as an easy evolution if the mathematics from other communities follow the same "language", i.e., are of the same concepts and paradigms, and will not be in conflict with other conceptions and paradigms also moving beyond its boundaries. In fact, Parshall and Rice affirm again the key function of the claimed common language: "Mathematicians, perhaps more than other scientists, developed a common language over the course of the nineteenth century that allowed them to participate in shared research agendas" (Parshall & Rice, 2002, p. 13).

The claim of an unproblematic uniting of mathematics universally seems to parallel an analogous claim of universality of school mathematics. In fact, since the 1980s it was often claimed as evident, that "school mathematics is the same everywhere" (Malaty, 1999). This conviction even seems to be a fundament for the international comparisons like TIMSS and PISA. A closer look shows, however, that maybe the names of the sub-disciplines to be taught might be the same – like algebra and geometry -, but that the conceptions of school mathematics differ considerably, in particular due to different epistemologies.

For better understanding the characteristics of a national mathematical community, and thus to better understand the ultimate process of universalisation, exactly this claim of the language has to be investigated. Let us enter this investigation. But let me first give you an example from the first half of the 19th century that mathematicians in France and in Germany were far from speaking the same language of mathematics.

AN EXAMPLE OF EPISTEMOLOGICAL CONFLICTS BETWEEN THE LANGUAGE OF FRENCH AND GERMAN MATHEMATICS

There was a complete discordance between French mathematics and German mathematics around 1800. Since about 1780, a first mathematical school had been established, the combinatorial school, launched by Carl Hindenburg (1741-1808), mathematics professor at Leipzig University, aimed at establishing a general theory of combinations of any kind – thus trying a complete algebraisation of mathematics and following a programmatic claim of Leibniz Abstracting from particular qualities of elements, it studied all possible forms of their ordered arrangement and establishing new combinations by separation, transposition, permutation, etc., of individual or compound elements.

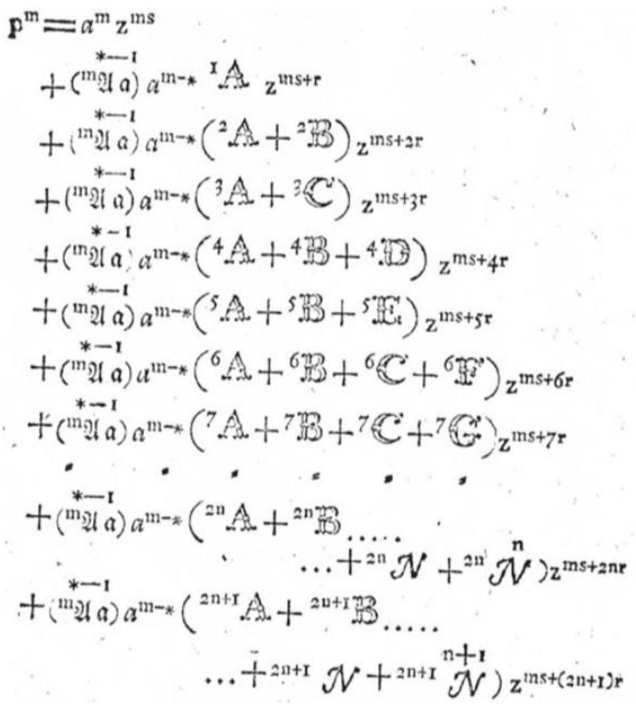


Figure 1. From a text on the polynomial theorem, Hindenburg (1795, p. 397).

The telling title of the key characteristic publication of the school was a paper of 1796: *Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis* – the polynomial theorem, the most important theorem of the entire analysis. This school remained in vigour in Germany until at least the 1830s and dominated the practice of mathematical research (Schubring, 2009, p. 432 f.). In France, it had been entirely rejected. Characteristic is a letter of 1810 from Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) to a mathematician in Alsatia who thus was somewhat mediating between France and Germany and who had asked Lacroix for his opinion about the school of combinatorial analysis:

> Analysis and pure geometry are doubtless in themselves very beautiful speculations, quite proper for the exercise of the mind, and they may offer the occasion for the development of much sagacity. But I must confess that I have never been able to attach much importance to these advantages understood as the unique object of the study of these sciences. I have always believed that there were ways of exercising one's reason, and especially of nourishing the activity of one's mind, much more satisfactory than the combination of fatiguing calculations which, when pushed too far, increasingly isolate one from the rest of humanity. After the usual applications, after the 'reasoned' exposition of the major methods, which introduce the philosophy of Science and point out the route for the human spirit to follow in its search for the properties of magnitude, the science of calculation would appear to me to be no more than a sort of game of chess were it not that it offers the key to many phenomena whose laws would be inaccessible without its aid. Therefore I examine each analytic discovery with reference to the hope it may inspire for the advancement of the physico-mathematical sciences. (own translation, quoted from Schubring, 1996, p. 371)

And Lacroix added a somewhat ironical assessment of the same issue by Lagrange: “Il faudrait plutot envelopper que developper" –one needs rather to enwrap than to develop!

The dominance of an understanding of mathematics as “physico-mathématique”, so nicely expressed by Lacroix as dominating in France, turned into a clash for a young German, Edmund Külp (1800-1862), who had studied mathematics in 1819 and 1820 with Alphonse Quetelet (1796-1874), the famous mathematician, astronomer and sociologist, in Brussels according to this epistemological view of physico-mathématique. Back to Germany, he wanted to obtain a doctorate for achieving a university position. He became deeply frightened upon remarking that for this goal he would be forced to work within combinatorial analysis. At Heidelberg he had to follow the mathematics professor Ferdinand Schweins (1780-1856), one of the protagonists of combinatorial analysis:

> Hence I find myself at the University of Heidelberg where I have followed the courses of philosophy and of logic and the lectures on geometry and on analysis […]. Monsieur Schweins, one of the most eminent mathematics professors of this university, absolutely wants me to seriously study combinatorial calculus, which I abhor. (own translation; quoted from Schubring, 2007, p. 111)

> I regret more and more to be have been born German. [...] Almost all German mathematicians are exclusively occupied with these calculi, which are so pernicious under all aspects. Please pardon the beginner for daring to speak too boldly. [...] Yes, I am obliged to occupy myself with a terribly voluminous volume of 774 pages, which deals only with this calculus. The result of all this scrupulous research is the discovery of nothing new at all. All what one is proving there is demonstrated [in French mathematics] hundred times more easily and more convenient to the character of the science. (quoted from Schubring, 2007, p. 112).

Eventually, in 1824, Külp had to give up his idea to obtain a doctorate there – his mathematical "language" did not sustain the German combinatorial "language". He became a teacher at secondary schools and is remarkable by having been the mathematics teacher of Georg Cantor in Darmstadt (Schubring, 2007, p.114).

THE EVOLUTION OF A NET OF MATHEMATICAL COMMUNITIES

I am now addressing the emergence of mathematical communities and the analysis of the characteristics of national communities.

In the volume "Mathematics Unbound", Parshall and Rice conceive of Modern Times and in particular what they call "the period of the Scientific Revolution" – for them "roughly from 1450 to 1700" – as the period of building the modern nation-state and consequently as preparing the emergence of national mathematical communities. The preceding period, the Middle Ages, is for them a period of internationalism: they state an essential unity, characterised by the common Catholic theology and the free interchange of studies and communication throughout Europe, based on the common Latin language (Parshall & Rice, 2002, p. 5). They speak therefore of this period as of "transnational universalism". Actually, this implies a too restricted understanding of mathematical communities:

- firstly, although speaking of Europe, in reality they deal with one of its parts, of Western Europe. Until 1453, there had been Eastern Europe, with political centre in Constantinople, but without a comparable development of mathematics. It would deserve another paper to reflect why there was less practice of mathematics in Eastern Rome.

- And secondly, Western Europe was not the only region practicing some mathematics – actually, there were to receive from other regions, with proper conceptions and "languages". There was the well-developed practice in Islamic civilisation, especially in the Maghreb and in Iran; and from the Maghreb initiated the transmission to Western Europe, and from Iran there was communication to India. And while the extensive culture of mathematics in China had for extended periods apparently been autonomous, without communication with other cultures, there occurred communication with India by the second half of the first millennium (of our era).

As a methodological consequence, one has to widen the notion of national mathematical community: as a more general notion, hence, I am proposing "cultural mathematical community".

Socio-political contexts for the emerging national communities

Turning now, with such an already indicated cultural meaning of mathematical communities, to Western Europe, we observe there from the beginning of Modern Times, thus say from 1450 or from 1500, at first a migration of mathematical centres, and then a diversification of mathematical centres. Highly aptly and significant, the term "plurality of algebras" has been coined to express the diversity of algebraic practices in the various areas of 16th century Europe (Rommevaux et al., 2012). By the end of the Middle Ages and by the Renaissance, we have initially Italy as a centre, at first by the commercial developments, but then developing into an algebra; their practice of commercial arithmetic becomes disseminated to other regions in Europe, in particular to Germany. Then there is as an epi-centre in Southern France (the Provence), proving dissemination from Arab Spain. Apparently due to this basis, the centre of mathematical activity eventually migrates from Italy to France. Here, at least by the end of the 17th century, a genuine mathematical community becomes firmly established, thanks in particular to the research structures provided by the *Académie des Sciences* in Paris (see Schubring, 2002, p. 367).

As a matter of fact, we can now observe the emergence of national mathematical communities and this clearly as an effect of the formation of nation-states since the Renaissance, and in particular of the manner how these new manners of governing territories affected education. These manners proved to be different and this markedly along the division into Protestant and Catholic territories since the Protestant Reform and the Catholic Counter-Reform. The differences affected the emergence of the mathematical communities.

The first structural change occurred jointly for all West-European regions: as a part of the Humanism movement during the Renaissance, the sovereigns increasingly took over the control of the universities, so far the only existing definite structures for higher learning but constituting until then closed corporations. As a part of the new state policy, specialised lecturer-ships or professorships for mathematics became instituted within the universities, thus abolishing the former practice of having read mathematical texts by non-specialists, freshly graduated bachelors drawn for this reading by sort. This structural change effected for the first time that the universities became susceptible of providing mathematical specialists who could constitute a community together with others from the same state, i.e. where a homogeneous education system was functioning (Schubring, 2020, pp. 293-294).

Yet, in Catholic territories after the Counter-Reform, where the Jesuits succeeded in taking over universities, they dismantled the traditional arts faculty, dissolved the chairs for mathematics and transformed mathematics, freshly created during Humanism, into a sub-subject of physics in the last grade of their colleges. Thus, in countries and territories remaining Catholic or re-conquered for Catholic faith, conditions for building a mathematical community were rather weak – in particular so in Italy, in Spain, in Portugal, and the Southern states of Germany. In Northern Italy, some states did not admit Jesuits taking over their universities and so there continued professorships for mathematics (Padua, Pisa). France constituted an exceptional case: thanks to the existence of the *Académie des Sciences*, it was a centre for professional mathematicians, producing new knowledge. In general, however, it was for engineering needs (hydraulics for inundation problems, navigational needs, colonial demands) that Catholic states would promote mathematics and thus contribute to establish mathematical communities with strongly applied orientations (Schubring, 2002, p. 367 ff.).

On the other hand, in Protestant countries and territories, the governments even stronger contributed to establish educational systems. In their universities, the professorships for mathematics introduced during Humanism became continued and were even improved. Although the universities continued to serve for teaching, without any obligation for research, some professors began to publish not only textbooks, but also research dissertations. The case of the religiously split Germany is telling: while the southern, Catholic states showed almost no mathematical activity until the 18th century, one remarks consolidated mathematical activity in the northern, Protestant states. Although embracing also all applications in higher education, mathematics there increasingly became oriented towards foundations. In Britain, due to Anglicanism, there was a somewhat mixed situation: the main teaching in universities was given in colleges, by tutors – in general not specialised, but encyclopaedically trained persons – complemented by some lectures besides the regular curriculum, by professors sponsored by some endowment (Schubring, 2002, p. 368 f.p).

As we can see clearly by now: the emergence of national mathematical communities is not due to the 19th century, but already to the 16th and 17th centuries and they are conditioned by the constitution of national educational systems. At the same time, one understands not only differences in the conceptual orientations of these communities; they show themselves also as expressions of different epistemological views of mathematics. In short, the contents are not "supranational"; in fact, I know of no case of "shared research agendas" before the 20th century.

MORE EXAMPLES FOR DIFFERENT "LANGUAGES": THE CONCEPTUAL FIELD OF NEGATIVE NUMBERS

In fact, these structural differences were accompanied by marked differences in methodology and epistemology. While the dominant approach in French textbooks was not to deter beginners ("ne pas rebuter les commençants") and thus to smooth inherent difficulties (Kästner spoke in this context of the "national carelessness of the French" ——(Kästner, 1792, p. 18)), German authors insisted on reflections on the foundations of science. An enormous number of German textbooks published in the second half of the eighteenth century reveals this ambition. Likewise, it is remarkable that Bézout's textbooks, which are so characteristic of the first modernisation of mathematics in the same period within the French military schools, found no contemporary German translators — despite the fact that they were translated into many other European languages. The preface to the German translation of Lazare Carnot's *Reflexions sur la metaphysique du calcul infinitesimal,* published in 1800, contains a revealing example of this attitude. The translator, J. K. F. Hauff, mathematics professor at the University of Marburg, admits that he had first seen an announcement of its French publication in 1797, but that the title had not attracted his attention at the time, "because I […] did not expect much from a metaphysics about geometry by a French author" (Hauff, 1800, p. 1; own translation).

The conceptual field of the negative numbers provides a revealing case of profound differences of epistemologies in various mathematical communities in Europe, from the

18th to the 19th centuries. Negative numbers had become mathematised in different ways in France, in England, and in Germany by the second half of the eighteenth century. By the end of the 17^{th} and by the early 18^{th} centuries, there had been generalizing, algebraizing tendencies in parts of the mathematics communities in England and in France, which had accepted to operate with negative numbers without ontological restrictions – one can name for this tendency Newton in England and the Oratorian mathematicians in France (Schubring, 2005, pp. 88 ff.). But by the middle of the 18^{th} century occurred a rupture in both countries, which made tendencies dominant based on ontological assumptions, which legitimised epistemologically only operations with quantities having some meaning in the real world. Thus, a deep divergence emerged with algebraising developments in Germany. Negative numbers thus became subjects of different mathematical theories and of diverging epistemologies.

In Germany, a theory of *opposite quantities* had emerged and became generally accepted: based on a philosophical notion of *opposition,* quantities were conceived of as provided not only with a quantitative attribute, but also with a second, qualitative one. This qualitative attribute consisted of the possibility of quantities being of the same type and of the same magnitude but of opposed qualities, cancelling out one another. By the turn of the nineteenth century, the legitimising philosophical notion of opposition became mathematised, and opposed quantities were expressed by algebraic notations, like $a + \bar{a} = 0$. Wilhelm A. Förstemann, a Prussian *Gymnasium* teacher, summarised these developments and made a step forward by separating the notions of quantity and of number, and by elaborating, in 1817, a coherent theory of negative numbers (Förstemann, 1817).

In France, during the first half of the eighteenth century, there were several approaches to acknowledging negative quantities as legitimate mathematical objects, in particular by real-world interpretations such as debts vs. assets and the like. The process of growing acceptance was stopped by d'Alembert, who campaigned against the use of “isolated” negative quantities, arguing that quantities smaller than “nothing” *(rien)* were contradictory and unacceptable. Assertions like that by Andreas Metz, mathematics professor at Würzburg University, in a textbook typical for the German scene: “It is now easy to understand that $-7 < -3$” (Metz, 1804, p. 53) would have sounded like pure nonsense to d'Alembert. D'Alembert did not differentiate between philosophical notions and mathematical notions like “nothing” and “zero”. Since this epistemological stance was widely shared, his conception of negative quantities became influential. Negative solutions of equations were understood as indicators of false assumptions in the hypotheses and as needing correction in order to arrive at positive solutions. This conception of transforming the negative to something positive, determined by a substantialist epistemology of mathematical objects, was in particular applied in textbooks like Bézout's for the military schools (Bézout, 1781). In England, it was in particular two authors who argued from the 1750s vehemently against the existence of negative numbers and against all operations with them: Francis Maseres (1758) and William Frend (1796), thus reducing algebra to arithmetic with natural numbers.

The rejection of negative numbers in France became radicalised, somewhat analogously to England, by Carnot's publications of 1801 and 1803. He reinforced the rejection of negative quantities and tackled this subject as an epistemological question of the relation between algebra and geometry. He denied to algebra all generalising functions, restricting it to a mere translation of geometrically legitimate propositions - and these were essentially interpretable in terms of the real world. Subtraction was accepted only in arithmetic, but not as an algebraic operation. As a consequence, Carnot replaced all notions concerning negative quantities by a geometrical theory, the *geometrie de position,* with a correlation between direct and inverse lines as the basic notion (Schubring, 2005, pp. 353 ff.).

Carnot's reinterpretation of algebra in terms of geometry had a decisive impact on the French view of the architecture of mathematics for a large part of the nineteenth century. Within a few years, his rejection of negative quantities became widely accepted and presented in textbooks.

A revealing indicator of the rupture thus effected is Lacroix's textbook *Elements d'algebre,* in Napoleon's era the only book admitted for this subject in the French secondary schools. In its first two editions (1797 to 1800), Lacroix largely followed Bèzout's model, adopting the ambiguous position of admitting negative quantities as 'real', legitimate objects, but of reinterpreting negative solutions as positive ones. In the third, entirely revised edition (1803), Lacroix replaced all assertions of reality of negative quantities by allusions to the absurdity of negative solutions. Solving equations became now a highly complicated technique and a search for a reinterpretation of the primary assumptions.

A telling example for the different "languages of mathematics" in France and in Germany is provided by Lacroix: since his algebra textbook had to be used also in the German territories annexed to Napoleonic France, Matthias Metternich (1747-1825), mathematics teacher in Mainz, had published a translation. Right in his preface, Metternich emphasised that Lacroix's notions of the signs plus and minus are fluctuating and that his presentation of the different cases of the use of the signs plus and minus lacks mathematical precision. After introducing subtraction, Metternich explains in footnotes that Lacroix's proofs are not rigorous, showing how they have to be transformed in order to arrive at generally valid proofs. Soon, Metternich reaches a point where footnotes no longer suffice; he begins to insert entire paragraphs and even brief chapters in order to introduce a general notion of negative numbers. Consequently, he declared the continued discussion of particular cases in Lacroix's text as "fussily long" and, eventually, ceased translating: "I have ceased translating this long chapter [...] since the reader [after reading my insertions] will no longer doubt the theory of subtraction and of multiplication" (Metternich, 1811, p. 121; my transl.). Thus, the translation in reality was a refutation of the French "language".

The persistence of this epistemologically minded theorising in France is documented, for example, by the 23rd edition of Lacroix's *Eléments d'algèbre* textbook, published by E. Prouhet (Prouhet, 1871), which highly cautiously mentioned in an appendix that negative solutions are admittable - at least to the extent that geometrical interpretations of algebraic concepts were used. The first French textbook, on algebra, exposing negative numbers without reservations was published only in 1896, by Carlo Bourlet.

The conceptual field of negative numbers constitutes an essential element of algebra; differences in its view reveal characteristic differences in epistemology. Another, maybe better-known field of epistemological differences concerns the rigor in analysis and in particular the diverging reception of Weierstraß's famous example of 1872 of a continuous but nowhere differentiable function. The French mathematical community reacted by rejecting such monsters as foreign to sound mathematics. For instance, Gaston Darboux (1842-1917) emphasised in 1875 that practicing such mathematics would endanger the legitimacy of mathematics in France:

> You seem to attach great importance to functions that never have a derivative; for me who am placed in an environment where the kind of studies with which we are concerned are very contested and can only harm those who are working about it, it seems to me that the most considerable step has been taken when one has found continuous functions, which have no derivative for an infinity of values of the independent variable included in the entire interval. What was once admitted and sought to be demonstrated is that every function has a derivative except in exceptional points in a limited number. This idea was overturned by functions such as those by Mr. Schwarz and Hankel. (Schubring, 2012, pp. 571, own translation)

FUNDAMENTALIST "LANGUAGE" IN ITALY

Another revealing case of different "languages", i.e. of different – and here even of diverging – epistemologies is provided by Italy and its adoption of Euclid as official textbook upon establishing the educational system of the eventually united Italian state, in 1867, and the simultaneous rejection of Legendre's geometry: almost against all the other countries and mathematical communities.

Legendre's *Elements de geometrie*, first published in 1794, is the first and important result of the reorientation towards rigour since the French Revolution. Legendre's *Elements* won a distinction from the jury for the *concours* of *livres élémentaires* and the most favourable judgement in mathematics (Schubring, 1989). It was appreciated in this manner: "Monsieur Legendre, in 1794, undertook to revive among us the taste for rigorous demonstration". This geometry textbook turned out to become an international bestseller. From 1802 on, it became translated in at least 13 languages and was re-edited many times, not only in France but also in the other countries, until the end of the 19th century.

- 1794 Original
  - 1802 Italy
    - 1807 Spain
      - 1809 Brazil
        - » [1810/1812 Greece]
        - » 1819 USA
- 1819 Russia
  - 1822 England
    - 1822 Germany
      - 1826 Sweden
        - » 1829 The Netherlands
        - » ca. 1830 Switzerland

1836 Ottoman Empire

Figure 2. A list of some of the translations of Legendre's geometry.

Crelle, the translator into German, declared in his preface of 1822: "[It] is distinguished by wealth of content, by clarity, order and consistency of the exposition, by exactness and rigour of the demonstrations" (Crelle, 1822, p. iii).

The first reason for banning in 1867 Legendre and introducing Euclid was nationalism: one wanted to have "genuinely" Italian textbooks – Legendre had been in use in many of the former Italian states (while Euclid was Greek and not Italian …). The second major reason was the intention to achieve an optimal integration of mathematics instruction into the dominant values of Italian secondary schools. These values were then defined by classical languages and literary studies (Scarpis, 1911, p. 27). In the teachers' commentary on the 1867 syllabus, the notion of utility and applicability of mathematical knowledge was denied and replaced by its function to serve as “mental gymnastics to develop the abilities of reason *(raziocinio*)”(Scarpis, 1911, p. 26). Enrico Betti and Francesco Brioschi, the editors of the 1867 edition of Euclid's *Elements* that came into use in the Italian schools, emphasised in their preface the common function of classical languages and of mathematics to serve as "intellectual gymnastics" (Betti & Brioschi, 1867, p. v). In order to comply with this legitimising function, the “harmful confusion” with practical or professional aims in mathematics instruction had to be suppressed, and mathematics had to be “coordinated with the system of classical studies and defined to form an integral part of a common instruction” (Betti & Brioschi, 1867, p. iv). Apparently, classical values were enormously stronger than in any other European country, since “coordination” with these entailed a degree of striving for a ‘purity of method’ which outstripped cultural determinations of school mathematics in the other European countries.

This striving for ‘purity’ leads to the third major reason for the unanimous and flat rejection of Legendre's approach to geometry. In Betti's and Brioschi's preface, the main polemic is directed against Legendre: Euclidean geometry is claimed to constitute a complete science, which is self-sufficient and which does not need support by the science of numbers in any of its demonstrations (Betti & Brioschi, 1867, pp. vi-vii). In fact, the underlying epistemological question was that of the relation between geometry and arithmetic/algebra. Legendre was accused of having mixed both branches in his geometry, making his book unsuitable for the intended methodological instruction.

In all the Italian reflections of this period, the extolling of the educational function ascribed to Greek geometry is coupled with polemics against “mixing” geometry with arithmetic and algebra. While prescribing the Euclidean method as best suited for instilling in pupils the ability to reason rigorously, the instructions for the teachers of 1867 warned against “blurring the purity of ancient geometry by transforming the geometrical theorems into algebraic formula”. It is most characteristic of the underlying mathematical epistemology that geometry was conceived of in exactly the original Greek terms of proportions so that no modernisation by introducing numbers was allowed, and arithmetic remained strictly separated from geometry. The instructions therefore enjoined upon the teachers were to avoid “replacing the concrete magnitudes (lines, angles, surfaces, volumes) by their measures” while emphasising “to reason always on concrete magnitudes, even there where one considers their ratios” (Vita, 1986, p. 7).

MATHEMATICAL COMMUNITIES, COMMUNICATION AND INTERNATIONALISATION

So far, we have seen the rise and functioning of national mathematical communities in Western Europe, with communication still largely restricted to the proper confines until the end of the 19th century. One wonders therefore how these confines could be trespassed and more general communication be established since then so that the present international community of mathematicians could arise.

Which are the basic units for a common understanding of knowledge? My considerations here refer to the sociological theory of science as developed in the theory of systems, in particular by Niklas Luhmann and Rudolf Stichweh, who claim that communication constitutes the basic act of science (Luhmann, 1984; 1990; Stichweh, 1984).

The basic unit sought should thus be constituted by a *common language and a common culture*. These two notions should not be taken too generally, since the same language, for instance, might follow diverging patterns. The features of language and culture should therefore be complemented by that of *nation* or *state*. The interaction between these features occurs essentially within a state's educational system: within the same educational system, it may be reasonably assumed that an educational process extending over many years and the inevitable interactions between representatives of the established culture (and state) and adolescents succeed in constituting commonly accepted methods of attributing meaning and in establishing a shared certain general set of social and cultural values. Within this basic unit thus established, communication may be relatively unproblematic, whereas any step beyond its borders will require new interaction and negotiation for meanings in order to make communication successful.

To refer to 'national styles' seems to mean, in particular, different *epistemological* views. Differences between nations in that respect will usually not concern specific propositions, but rather how these are integrated into the discipline's system of knowledge, what their status is with regard to foundations, how they are interpreted with regard to a philosophy of mathematics, how they are conceived of in the educational curricula, etc. All these issues are contained within the epistemology of the discipline. Since the dominant cultural and social values in a given society and state have been moulded by the specific religious and philosophical traditions influential in its history, it is reasonable to assume a specific relationship between epistemological issues and the national culture in question. It becomes evident how crucial the particular educational system is for establishing typical patterns of communication and for attributing socially shared meanings to concepts – so that, for instance, national mathematical communities can emerge and function. Institutional structures of *schools and of higher education* are materialisations of underlying cultural values and can therefore be used to explore national differences.

We can thus assume that a common understanding will at first be restricted to social communities, which are tied together by certain conditions to form a basic unit of communication, say by sharing a common culture and language. Let us call this basic unit a scientific community of first order. In general, one can assume that these first order communities will share, too, a certain epistemological view of their subject. While there might co-exist different epistemological and conceptual views of mathematics in separate mathematical communities, there should begin processes of interaction at the moment when such separate communities come into contact with each other. Consequently, either the values and conceptions remain mutually alien so that—if there are no other pressures for establishing shared conceptions—the communities will continue to be separated, or a negotiation concerning the differences will begin with the effect of either certain compromises between the two sides or of the domination of one side by the other.

We should thus investigate by which mathematical issues and by which social and political processes communication became at least transnational. Given that one agrees that at least some patterns of internationalisation took place by about 1950, and given also that one agrees that a key factor for this had been the period of Fascism in various European countries, which effected fleeing into exile of an enormous number of mathematicians from these countries and in particular the forced emigration of allegedly Jewish mathematicians from Germany to the United States, it will be productive to remind of the conception of **transmission**. According to applying the notions of *metropolis* and *periphery*, countries where a mathematical community had not yet existed uses to become transmitted a practice of mathematics from some metropolis country. Upon reception, the transmitted system might be adapted and transformed. In the relevant period, from 1800 to 1950, one observes the rise of various mathematical communities in hitherto insofar “underdeveloped” countries by transmission. One revealing case is presented by Brazil, which in 1808 changed from the status of an exploited colony to the mainland of the Portuguese Empire and in 1822 to the Empire of Brazil, developing it science basically by transmission from France. It was in particular the United States, by the last third of the 19th century, by means of introducing graduate colleges – according to the Prussian-German model of Research University and by calling German mathematicians to professorships there. A next such case is presented by Japan, after the Meiji Restoration – also basically moulded by transmission from German mathematics. China seems to be a case of a second-instance transmission: from the United States, after its mathematical emergence due to Germany.

AN OUTLOOK

Since the United States received a second strong transmission from Germany, due to Nazism policy from 1933, one might understand the globalisation of mathematics, the emergence of an international mathematical community after WW II not so much as a consequence of generalised communication via international congresses and journals, but as a product of a multiplied transmission from a few metropolis countries. This does, therefore, not exclude that specific patterns in a number of countries will still persist, even under the conditions of an international community dominated now from a new centre and metropolis.

In fact, given that the emergence of disciplines is intimately tied to the institutionalisation of sciences, the processes of institutionalisation occur within the respective national systems of education and thus according to specific contexts, which can be characterised, on the one hand, by certain epistemologies revealing dominant cultural values and, on the other hand, by structures of that national educational system, which prefigure certain institutional forms and in particular specific embeddings of mathematics within a conception of teaching and research of a certain set of sciences. It is hence quite reasonable to assume that these specific contexts will continue to mould certain particular communities.

REFERENCES

Betti, E. & Francesco B. (1867). *Gli Elementi d’Euclide com note aggiunte ed esercizi ad uso de’ Ginnasi e de‘ Licei.* Firenze: Monnier (Libri I-III 1867, IV-VI 1868, XI-XII e Appendice 1868).

Bézout, É. (1781). *Cours de Mathématiques à l’usage des Gardes du Pavillon et de la Marine. Troisième Partie. Contenant l’Algebre et l’application de cette science à l’Arithmétique* et la *Géométrie* Paris: Pierres.

Crelle, A. L. (1822). “Vorrede”, Adrien Marie Legendre. *Die Elemente der Geometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie.* Aus dem Französischen übersetzt und mit Anmerkungen begleitet, A. L. Crelle (Herausgeber), Berlin: Rücker, iii-iv.

Förstemann, W. A. (1817). *Ueber den Gegensatz positiver und negativer Größen*. Nordhausen: Happach.

Frend, W. (1796). *Principles of Algebra*. 2 vols. London.

Hauff, J K. F. (1800). Vorwort. In Lazare Carnot, *Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung*, von dem Bürger Carnot. Aus dem Französischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet von Johann Karl Friedrich Hauff (Frankfurt am Main: Jäger.

Hindenburg, C. F. (1795). Allgemeine Darstellung des Polynomialtheorems nach de Moivre und Boscovich, nebst [...]. *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, Erster Band, viertes Heft, pp. 385–384.

Kästner, A. G. (1792). *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Perspectiv*. Der mathematischen Anfangsgründe 1ten Theils erste Abtheilung. Fünfte vermehrte Auflage (Göttingen: Vandenhoek und Ruprecht.

Kuhn, T. (1962). *The Structure of scientific revolutions.* Chicago, Ill.: University of Chicago Press

Lacroix, S.-F. (1803). *Éléments d'Algèbre.* Troisième édition, revue et corrigée. Paris: Courcier, an XI = 1803.

Legendre, A.-M. (1794). *Éléments de géométrie*. Paris: Imprimérie..., an II (= 1794)

Luhmann, N. (1984). Soziale Systeme – Grundriß einer allgemeinen Theorie. Frankfurt: suhrkamp.

Luhmann, N. (1990). *Wissenschaft der Gesellschaft*. Frankfurt: suhrkamp.

Malaty, G. (1999). The Third World mathematics education is a hope for the world mathematics education development in the 21st century. In Rogerson, A. (ed.), *Proceedings of the international conference mathematics education into the 21st century*, pp. 231–240. Cairo.

Maseres, (1758). *Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra*. London: Richardson/Payne.

Metternich, M. (1811). *Anfangsgründe der Algebra von Sylvestre-François Lacroix*. Nach der siebten Auflage übersetzt und mit erläuternden Anmerkungen und Zusätzen vermehrt. Mainz: Kupferberg.

Metz, A. (1804). *Handbuch der Elementar-Arithmetik in Verbindung mit der Elementar-Algebra* (Bamberg, Würzburg: J. A. Göbhardt.

Parshall, K. H. & Rice, A. (eds.) (2002). *Mathematics Unbound. The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945*. Providence, RI: American Mathematical Society, London Mathematical Society.

Prouhet, E (1871). Préface. In Sylvestre-François Lacroix. *Éléments d'Algèbre*. Vingt-troisième édition, revue, corrigée et annotée par E. Prouhet. Paris: Gauthier-Villars.

Rommevaux, S., Maryvonne S. & Massa Esteve, M.R (éds.). (2012). *Pluralité de l'Algèbre à la Renaissance*. Paris: Honoré Champion.

Scarpis, U. (1911). L'insegnamento della matematica nelle scuole classiche. I. I successivi programmi dal 1867 al 1910, *Commisssione Internazionale dell'Insegnamento Matemático, Atti della Sottocommissione Italiana*. Roma.

Schubring, G. (1989). La réforme du savoir savant: la contribution de Condorcet au premier concours des 'livres élémentaires', *Condorcet, Mathématicien, économiste,* *philosophe, homme politique*, éds. Pierre Crépel, Christian Gilain. Paris: Minerve , 44-51.

Schubring, G. (1996). Changing cultural and epistemological views on mathematics and different institutional contexts in 19th century Europe. *L'Europe mathématique - Mythes, histoires, identités. Mathematical Europe - Myths, History, Identity*, eds. Catherine Goldstein, Jeremy Gray, Jim Ritter (Paris: Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, 1996), 361-388.

Schubring, G. (2002). Aspetti istituzionali della matematica. *Storia della scienza*, ed. Sandro Petruccioli, Vol. VI: *L'Etá dei Lumi*. Roma: Istituto dell'Enciclopedia Italiana, 366-380.

Schubring, G. (2007). Documents on the mathematical education of Edmund Külp (1800-1862), the mathematics teacher of Georg Cantor. *ZDM The International Journal for Mathematics Education*, 2007, *39*: 107-118.

Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer.

Schubring, G. (2009). The way from the combinatorial school to the reception of the Weierstrassian analysis“. *Dalla pecia all'e-book. Libri per l'Università: stampa, editoria, circolazione e lettura*. Atti del Convegno internazionale di studi, Bologna, 21-25 ottobre 2008, a cura di Gian Paolo Brizzi, Maria Gioia Tavoni. Bologna: CLUEB, 2009, pp. 431-442.

Schubring, G. (2012). Lettres de mathématiciens français à Weierstraß – documents de sa réception en France“, *L'aventure de l'analyse, de Fermat à Borel. Mélanges en l'honneur de Christian Gilain*, éd. Suzanne Féry. Nancy: Presses Universitaires de Nancy, 567-594.

Schubring, G. (2020). The development of forms to study mathematics. “Dig where you stand” 6. Proceedings of the Sixth International Conference on the History of Mathematics Education, September 16-20, 2019, at the CIRM (Luminy) France, eds. Évelyne Barbin, Kristín Bjarnadóttir, Fulvia Furinghetti, Alexander Karp, Guillaume Moussard, Johan Prytz, Gert Schubring & Harm Jan Smid. Münster: WTM Verlag, 289-302.

Stichweh, R. (1984). *Zur Entstehung des modernen Systems wissenschaftlicher Disziplinen. Physik in Deutschland, 1740–1890*. Frankfurt/M.: suhrkamp.

Vita, V. (1986). *I programmi di matematica per le scuole secondarie dall'unita d'Italia al 1986. Rilettura storico-critica*. Bologna.

Gert Schubring
Universität Bielefeld, Alemania
gert.schubring@uni-bielefeld.de

Muñoz-Escolano, J.M., Oller-Marcén, A.M. (2021). Notas al pie en la *Aritmética* (1884) de los coroneles Salinas y Benítez. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 4*(1), 17-33

ISSN: 2603-9982

NOTAS AL PIE EN LA *ARITMÉTICA* (1884) DE LOS CORONELES SALINAS Y BENÍTEZ

José M. Muñoz-Escolano, Universidad de Zaragoza, España

Antonio M. Oller-Marcén, Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, España

Resumen

Dentro de la Historia de la Educación Matemática, el análisis de libros de texto antiguos es una importante línea de trabajo y el siglo XIX resulta un periodo de especial interés debido a su proliferación durante esa época. El estudio de ciertos elementos de una obra (prólogos, notas al pie, etc.) proporciona información relevante para los investigadores. Aquí, abordamos el estudio de las notas al pie de una obra de Manuel Benítez y Parodi e Ignacio Salinas y Angulo, dirigida a estudiantes de academias militares. Se detecta una mayor presencia en esta obra que en otras de la época. Al analizarlas por su función y temática, se aprecia que su función más común es plantear digresiones al discurso principal, en muchos casos ofreciendo información sobre aspectos etimológicos e históricos.

Palabras clave: *Historia de la Educación Matemática, siglo XIX, libros de texto, paratextos, notas al pie.*

Footnotes in the *Arithmetic* (1884) by the Colonels Salinas and Benítez

Abstract

In the field of History of Mathematics Education, the analysis of old Mathematics textbooks is an important line of work and the 19th century is a particularly interesting period due to its proliferation during that time. The study of certain elements of a work (prefaces, footnotes, etc.) provides relevant information to researchers. Here, we study the footnotes from a textbook written by Manuel Benitez y Parodi and Ignacio Salinas y Angulo addressed to military academy students. We detect a higher presence in this book than in others from that time. After analyzing them regarding their functions and themes, we see that their more common role is to digress from the main discourse, often providing information about etymological and historical aspects.

Keywords: *History of Mathematics Education, 19th century, textbooks, paratexts, footnotes*

Recibido: 29/01/2021; Aceptado: 18/02/2021

INTRODUCCIÓN

Durante el siglo XIX se desarrollaron las primeras leyes educativas en España que terminarían desembocando en la denominada Ley Moyano de 1857 cuyo espíritu se mantuvo vigente prácticamente hasta la Ley General de Educación de 1970. También es en el siglo XIX cuando se fundan las Escuelas Normales (Carrillo Gallego, 2005). Esta preocupación por la educación se hizo extensiva al contexto de la formación militar con la creación de múltiples centros de formación militar, el diseño y reforma de distintos currículos y la promoción de la redacción de libros de texto específicos (Ruiz, 2004).

En cuanto a las matemáticas, el tercio final del siglo XIX supuso en España "un periodo de consolidación y en el que se acorta la distancia que hasta entonces separaba el cultivo de esta ciencia en España de la de otros países avanzados" (García Camarero, 1984, p. 126). No es de extrañar, por lo tanto, que "el ámbito en el que se movieron los físicos y matemáticos españoles de aquella centuria fue, con muy pocas excepciones, el de la enseñanza" (Sánchez Ron, 1992, p. 58). En relación con esto, durante la época se produjo un gran aumento en la producción de libros de texto de matemáticas, así como una popularización de los mismos que ha llevado a que algunos autores hayan denominado el siglo XIX como el "periodo del libro de enseñanza" (Gómez, 2011, p. 13). Entre los múltiples autores de textos matemáticos de la época, Maz (2005) señala la existencia de un buen número de militares profesionales. Por citar unos pocos, podemos encontrar a Miguel Ortega y Sala, Antonio Terry y Rivas, Juan Montero Gabutti, Cirilo Aleixandre, Manuel Benítez y Parodi e Ignacio Salinas y Angulo. Las obras de todos estos autores, aunque inicialmente dirigidas a estudiantes de academias militares, tuvieron una gran influencia y fueron extensivamente utilizadas también fuera de ese ámbito.

El análisis de libros antiguos de Matemáticas es una importante línea de trabajo en el ámbito de la Historia de la Educación Matemática entre otros motivos porque permite contextualizar los conceptos matemáticos y conocer diversos acercamientos (López-Esteban, 2019). Fan, Zhu y Miao (2013) señalan que a nivel internacional los estudios más frecuentes son aquellos que se centran en el análisis del tratamiento recibido por algún contenido y en el caso de la investigación histórica esta tendencia parece mantenerse. Así, a modo de ejemplo, podemos citar los trabajos de González Astudillo y Sierra Vázquez (2004) sobre los puntos críticos de funciones, de Picado (2012) sobre el sistema métrico decimal o de Maraví Zabaleta (2019) sobre los números complejos.

En cualquier caso, aunque un buen número de trabajos se centran de forma prioritaria en el análisis del contenido matemático (Gómez, 2018), cabe señalar que existen cuestiones no directamente matemáticas que merece la pena tener en cuenta a la hora de analizar globalmente un texto matemático antiguo. La originalidad de la obra, los principios didácticos seguidos por el autor, etc. son aspectos que permiten contextualizar la obra, valorar su importancia o evaluar su posible impacto en la formación matemática de la época (Maz-Machado & Rico, 2015). Muchos de estos elementos, además, no se encuentran presentes en el cuerpo del texto, sino que pueden identificarse en otros elementos como los prólogos, las dedicatorias, las portadas, las notas al pie de página, etc.

OBJETIVOS

La investigación que pretendemos abordar surge en relación a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué información relevante desde el punto de vista de la Historia de la Educación Matemática está presente en las notas al pie de los libros de texto y manuales escolares del siglo XIX? Más en particular, el presente trabajo se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar la presencia de notas al pie en una obra de contenido elemental, pero dirigida a estudiantes de educación superior a finales del siglo XIX.
- Analizar el contenido de las notas al pie, determinando tanto sus posibles funciones, como los temas tratados en ellas.

MARCO TEÓRICO

Con el término 'paratexto' se definen todos aquellos acompañamientos de un texto escrito que hacen que dicho texto "se convierta en un libro" (Genette, 2001). En la Tabla 1 se proporciona un listado relativamente exhaustivo de posibles paratextos.

Tabla 1. *Posibles paratextos de una obra literaria (Genette, 2001)*

Peritextos del editor (portada, portadilla, anexos, etc.)	Epigramas
Nombre del autor	Prefacios
Título	Intertítulos
Prière d'insérer	Notas
Dedicatorias (del trabajo y del ejemplar)	Epitextos (públicos o privados)

La presencia de paratextos es especialmente importante y relevante en obras de carácter literario, pero se encuentran, de hecho, en todo tipo de libros. De hecho, es posible encontrar trabajos centrados en el análisis de paratextos de libros de texto de matemáticas. Por ejemplo, Barbosa (2014) analiza los paratextos de traducciones al portugués de manuales franceses utilizados en la Real Academia Militar de Río de Janeiro. Por su parte, Andrade y de Souza Ferreira (2015) ilustran la contribución que el análisis de los paratextos puede hacer a la Historia de la Educación Matemática estudiando en detalle los paratextos presentes la obra *Arithmetica theorico-pratica* de André Perez y Marín.

Dentro del ámbito de la Historia de la Educación Matemática, los prólogos son los paratextos que más atención han recibido. Posiblemente, esto se debe a que los prólogos aparecen en prácticamente cualquier texto matemático ya desde la antigüedad (Vitrac, 2008). Además, como Christiansen (2017) pone de manifiesto, es posible encontrar interesante información contextual y sobre aspectos didácticos en los prólogos de textos dedicados a la enseñanza de las matemáticas. En este sentido, existen trabajos centrados en diversas obras españolas de los siglos XVI y XVIII que muestran que los prólogos constituyen efectivamente una unidad de análisis interesante para identificar concepciones y creencias del autor de la obra sobre distintos aspectos de las matemáticas (Oller-Marcén & Muñoz-Escolano, 2019; Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, 2020a, 2020b).

Al margen de los prólogos, no conocemos apenas trabajos centrados en analizar la presencia y el contenido de otros paratextos concretos en libros de texto o manuales de matemáticas. Puig (2006), con su análisis del contenido de una nota al pie del *Tratado Elemental de Matemáticas* de Vallejo ya puso de manifiesto que las notas al pie pueden contener información de interés desde el punto de vista de la historia de la educación matemática. Oller-Marcén y Meavilla-Seguí (2018) señalan que las notas al pie eran utilizadas por algunos autores para aportar información que podía resultar formativa o interesante para el lector al margen del propio contenido del texto (sobre aspectos históricos, por ejemplo). Recientemente, y de un modo más sistemático, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (en prensa) han analizado las notas al pie de algunas obras del matemático bilbaíno Juan Cortázar, observando que su presencia es relativamente importante en las obras consideradas y que el uso de las notas al pie por parte del autor (en cuanto a funciones y temas tratados) parece variar según los destinatarios objetivos del texto.

Genette define las notas (2001, p. 272) del siguiente modo:

> Una nota es un enunciado de extensión variable (una palabra es suficiente) relativo a un segmento más o menos determinado del texto, y dispuesto ya sea junto a ese segmento o en referencia a él. El carácter siempre parcial del texto de referencia, y en consecuencia el carácter siempre local de enunciado de la nota, me parece el rasgo formal más distintivo de este elemento del paratexto, que lo opone al prefacio entre otros.

De entre los diversos tipos existentes (en función de elementos como el remitente, el destinatario, la temporalidad, etc.), nos centramos aquí en las notas más usuales, es decir, en aquellas escritas por el propio autor presentes en textos de carácter discursivo. Genette (2001) señala que la función básica de este tipo de notas es la de servir como un suplemento, una digresión o un comentario. No obstante, el propio Genette especifica hasta ocho funciones posibles para las notas: proporcionar definiciones o explicaciones de términos usados en el texto, aportar traducciones de citas que aparecen en el texto, proporcionar referencias de citas y fuentes empleadas, exhibir autoridades o documentos de apoyo o confirmativos, precisar un hecho mencionado de forma vaga o descuidada en el texto, señalar incertidumbres o complejidades que el autor ignoró en el texto por considerar que no interesan al lector ordinario, aportar argumentos suplementarios o anticipaciones a objeciones y, por último, realizar digresiones a propósito.

MÉTODO

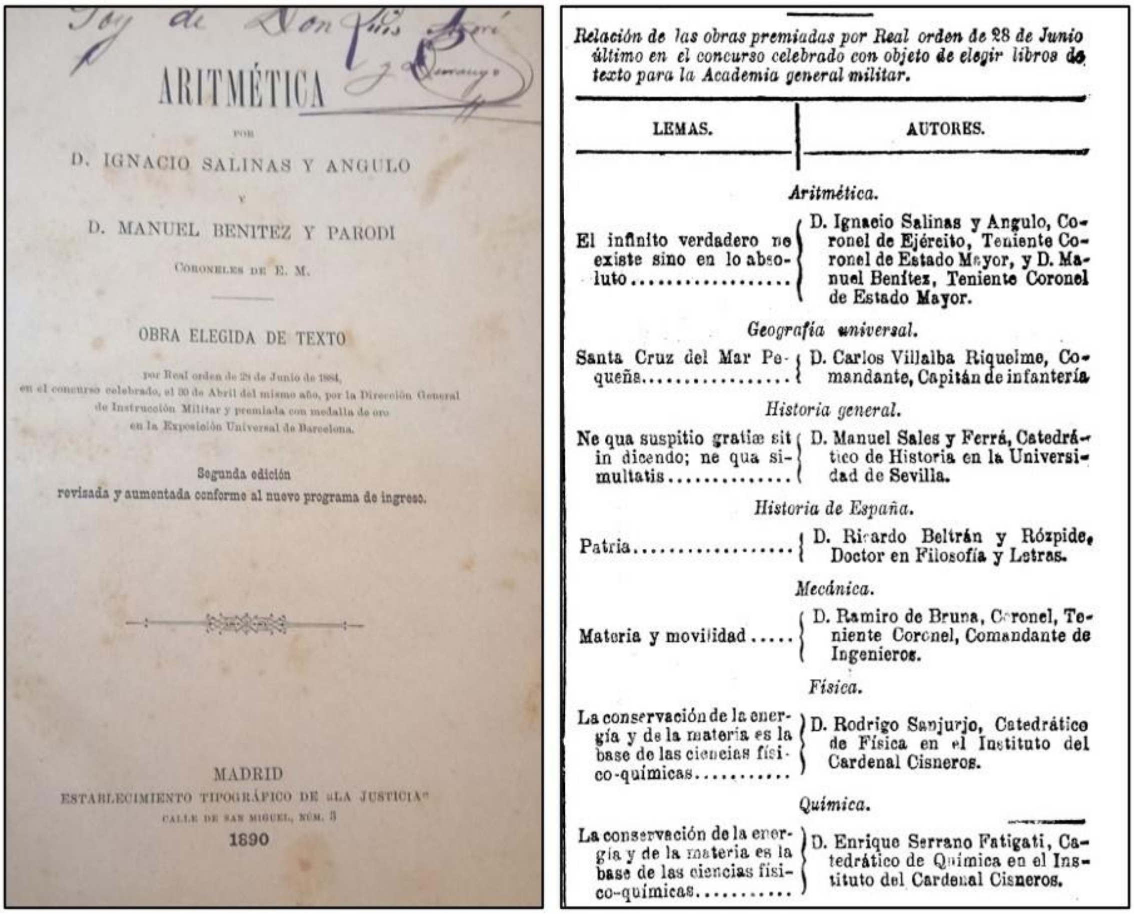
Para alcanzar los objetivos indicados anteriormente, realizamos un estudio de caso de tipo exploratorio (Lune & Berg, 2017). Más en particular, abordamos una investigación de carácter documental (McCulloch, 2004) que se lleva a cabo según las fases clásicas del método de investigación histórico (Ruíz Berrio, 1976): heurística, crítica (interna y externa) y hermenéutica. Este método se puede particularizar de forma fructífera en el ámbito de la Historia de la Educación Matemática (González Astudillo, 2009; Conejo, 2015). La fase heurística consiste en la búsqueda, selección y clasificación de los documentos relevantes; en la fase crítica se determina la autenticidad de los citados documentos y se analizan los mismos y, por último, la fase hermenéutica involucra la interpretación de los resultados obtenidos en la fase anterior.

El estudio realizado se centra en una pareja de autores de textos de aritmética de gran influencia en España durante los últimos años del siglo XIX y a lo largo de toda la mitad del siglo XX, a juzgar, entre otros aspectos, por el muy elevado número de reediciones de todas sus obras (Oller-Marcén & Meavilla-Seguí, 2018). Se trata del binomio formado por Ignacio Salinas y Angulo y Manuel Benítez y Parodi. Estos autores, ambos oficiales del Ejército de España, publicaron diversos manuales sobre aritmética y álgebra a finales del siglo XIX que serían ampliamente utilizados, y no solo en el ámbito militar, hasta muy entrado el siglo XX. En este trabajo nos centraremos en su primera obra publicada, la *Aritmética* (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1884).

Sobre Ignacio Salinas y Angulo no se posee información biográfica al margen de su hoja de servicios y no se le conoce labor pedagógica o producción científica más allá de los libros publicados con Manuel Benítez y Parodi. Sobre este último, sin embargo, se posee mayor información que pone de manifiesto una intensa actividad científica. Cabe señalar, por ejemplo, que en 1893 ganó un accésit de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales por la memoria titulada *Exposición razonada y metódica de los desarrollos en serie de las funciones matemáticas* (Octavio de Toledo, 1912). Además, fue colaborador de *El Progreso Matemático*, miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y vicepresidente de la Sociedad Matemática Española (Oller-Marcén & Meavilla-Seguí, 2018).

La *Aritmética* de Salinas-Benítez (Figura 1) fue elegida como libro de texto para todas las Academias Militares, por Real Orden de 28 de junio de 1884, en el concurso celebrado el 30 de abril del mismo año por la Dirección General de Instrucción Militar (*Gaceta de Madrid*, nº 191, 9 de julio de 1884). Fue además premiada con medalla de oro en la Exposición Universal de Barcelona celebrada en 1888. De su éxito da buena cuenta el gran número de reediciones de la obra. Antes de terminar el siglo aparecieron tres nuevas ediciones (en 1890, 1895 y 1898) y durante el siglo XX se siguió reeditando profusamente, siendo la edición más tardía de la que tenemos noticia la decimonovena, de 1955. El texto, cuyos contenidos y extensión aproximada se fijaban en las bases del citado concurso, se divide en dos partes. La primera parte, dedicada aspectos teóricos, se divide en cuatro libros; mientras que la segunda, dedicada a aplicaciones, se divide en dos libros. A continuación, indicamos el título de cada uno de los seis libros que componen la obra, lo que da una idea de los contenidos de cada uno de ellos. Para una descripción más detallada se puede consultar el trabajo de Oller-Marcén y Meavilla-Seguí (2018).

- Libro primero: Números enteros.
- Libro segundo: Fracciones.
- Libro tercero: Potencias y raíces.
- Libro cuarto: Números inconmensurables y aproximados.
- Libro quinto: Números concretos.
- Libro sexto: Magnitudes proporcionales.



ARITMÉTICA

POR

D. IGNACIO SALINAS Y ANGULO

Y

D. MANUEL BENITEZ Y PARODI

CORONELES DE E. M.

OBRA ELEGIDA DE TEXTO

por Real orden de 28 de Junio de 1884,
en el concurso celebrado, el 30 de Abril del mismo año, por la Dirección General
de Instrucción Militar y premiada con medalla de oro
en la Exposición Universal de Barcelona.

Segunda edición
revisada y aumentada conforme al nuevo programa de ingreso.

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE «LA JUSTICIA»
CALLE DE SAN MIGUEL, NÚM. 3
1890

Relación de las obras premiadas por Real orden de 28 de Junio último en el concurso celebrado con objeto de elegir libros de texto para la Academia general militar.

LEMAS.	AUTORES.
	Aritmética.
El infinito verdadero no existe sino en lo absoluto..................	D. Ignacio Salinas y Angulo, Coronel de Ejército, Teniente Coronel de Estado Mayor, y D. Manuel Benítez, Teniente Coronel de Estado Mayor.
	Geografía universal.
Santa Cruz del Mar Pequeña................	D. Carlos Villalba Riquelme, Comandante, Capitán de infantería.
	Historia general.
Ne qua suspitio gratiæ sit in dicendo; ne qua simultatis..............	D. Manuel Sales y Ferrá, Catedrático de Historia en la Universidad de Sevilla.
	Historia de España.
Patria..................	D. Ricardo Beltrán y Rózpide, Doctor en Filosofía y Letras.
	Mecánica.
Materia y movilidad.....	D. Ramiro de Bruna, Coronel, Teniente Coronel, Comandante de Ingenieros.
	Física.
La conservación de la energía y de la materia es la base de las ciencias fisico-químicas...........	D. Rodrigo Sanjurjo, Catedrático de Física en el Instituto del Cardenal Cisneros.
	Química.
La conservación de la energía y de la materia es la base de las ciencias fisico-químicas...........	D. Enrique Serrano Fatigati, Catedrático de Química en el Instituto del Cardenal Cisneros.

Figura 1. Portada del ejemplar utilizado en el trabajo (izda.) y declaración de la obra como libro de texto (dcha.). Fuente: Elaboración propia

Para este trabajo hemos utilizado el ejemplar de la segunda edición de la obra que forma parte de la colección privada del segundo autor (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890). Existe una versión digitalizada de la cuarta edición en la Biblioteca Nacional de España. Una inspección de estas dos ediciones ha puesto de manifiesto que no existen diferencias sustanciales entre su contenido. Del mismo modo, las notas al pie presentes en ambas ediciones son las mismas. De todo lo anterior se puede concluir que los criterios señalados por Scott (1990) para investigaciones de tipo documental (autenticidad, credibilidad, representatividad y significado) se cumplen en este trabajo.

Siguiendo la metodología establecida en (Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, en prensa) el análisis que se ha llevado a cabo es de tipo deductivo y se ha realizado en dos niveles. Una vez identificadas todas las notas al pie presentes en la obra, en el primer nivel de análisis se ha asignado a cada nota al menos una de las ocho funciones distinguidas por Genette (columna izquierda de la Tabla 2). El segundo nivel de análisis se centra en los temas tratados en las notas. Además de las categorías señaladas por Maz-Machado y Rico (2015), se ha tenido en cuenta que en la obra analizada “los autores incluyen algunos interesantes comentarios etimológicos e históricos en la forma de notas al pie” (Oller-Marcén & Meavilla-Seguí, 2018, p. 175). De este modo, las categorías utilizadas en este segundo nivel de análisis son las que se presentan en la columna derecha de la Tabla 2.

Tabla 2. *Categorías para en las dos fases del análisis*

Funciones	Temas
F1 – Definir o explicar términos.	T1 – Actualización.
F2 – Traducir fragmentos del texto.	T2 – Originalidad.
F3 – Mencionar referencias o fuentes.	T3 – Rigor y precisión.
F4 – Exhibir autoridades y/o documentos de apoyo.	T4 – Interés social de las matemáticas.
F5 – Precisar afirmaciones o enunciados.	T5 – Principios filosóficos.
F6 – Señalar complejidades ignoradas en el texto.	T6 – Principios didácticos
F7 – Aportar argumentos suplementarios o anticipar objeciones.	T7 – Aspectos etimológicos
F8 – Realizar digresiones.	T8 – Aspectos históricos

Para mejorar la fiabilidad de las interpretaciones realizadas y aumentar la legitimación del estudio en el sentido de Onwuegbuzie y Leech (2007) se ha seguido una estrategia de triangulación de investigadores (Flick, 2004) en las dos fases del análisis. De este modo, cada uno de los investigadores implicados en el estudio asignaron independientemente categorías a cada nota y, en los casos de discrepancia, estas se asignaron finalmente tras un proceso transaccional.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Presencia y densidad de notas

En primer lugar, presentamos un resumen sobre el número de notas al pie identificadas en cada una de los seis libros en los que se divide la obra analizada (Tabla 3).

Tabla 3. *Notas al pie en las distintas partes de la obra analizada*

	Notas al pie	Páginas	Densidad
Libro primero	41	82	0,50
Libro segundo	35	51	0,69
Libro tercero	15	40	0,38
Libro cuarto	42	48	0,88
Libro quinto	19	25	0,76
Libro sexto	50	36	1,39
TOTAL	202	282	0,72

Como podemos observar, en términos absolutos las notas son especialmente abundantes (por orden) en los Libros sexto, primero, cuarto y segundo. En términos relativos, los Libros tercero y primero presentan una densidad de notas al pie claramente por debajo de la global, mientras que el Libro sexto muestra una densidad de notas al pie que prácticamente duplica la densidad global de la obra.

La densidad de notas en esta obra es mucho mayor que la detectada en algunas de las obras de otro importante autor de la época, Juan Cortázar (Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, en prensa). Oller-Marcén y Meavilla-Seguí (2018) señalan que la *Aritmética* de Salinas y Benítez aborda contenidos que abarcan y extienden los de la Educación Secundaria de la época. De este modo, si comparamos la densidad de notas de la *Aritmética* con la de obras de Cortázar dirigidas a un público similar, vemos que llegan a multiplicarla por 7. Quizás una posible explicación pueda encontrarse en que la *Aritmética* se dirigía específicamente a un ámbito militar. Para poner a prueba esta hipótesis podría ser interesante analizar las notas al pie de la adaptación de la obra que hicieron los autores en 1887, dirigida a la Escuela Preparatoria de Ingenieros y Arquitectos; así como analizar más obras publicadas en España durante la época en el ámbito del Ejército (Velamazán, 1994) o de la Armada (Comas Roqueta, 2015).

Funciones de las notas

En cuanto a las funciones de las notas al pie identificadas en la obra, estas se recogen en la Tabla 4. Destaca la escasez de las notas correspondientes a F2 y la ausencia total de las relativas a F4. La ausencia de estas últimas se puede explicar quizás por tratarse de una obra matemática que probablemente no requiere de argumentos de autoridad.

Tabla 4. *Frecuencia de las funciones de las notas presentes en las distintas partes de la obra*

	F1	**F2**	**F3**	**F4**	**F5**	**F6**	**F7**	**F8**
Libro primero	17	1	16	0	3	7	3	26
Libro segundo	11	4	2	0	10	14	5	10
Libro tercero	1	0	1	0	4	6	1	5
Libro cuarto	6	2	3	0	25	13	7	2
Libro quinto	3	1	0	0	4	3	1	12
Libro sexto	17	1	1	0	7	15	9	9
TOTAL	55	9	23	0	53	58	26	64

Dentro de la finalidad F2, que Genette define como "traducir fragmentos de texto", ubicamos aquellas notas al pie dedicadas a aclarar aspectos notacionales y de simbolismo utilizados en el texto. En la Figura 2 damos un ejemplo. La escasez de estas notas se debe, probablemente, a la relativa ausencia de lenguaje simbólico especializado en una obra de contenido aritmético.

> (**) La letra *a* se escribe debajo de ε para indicar que se trata del error absoluto: ε_a se enuncia *epsilon sub a*.

Figura 2. Nota al pie correspondiente a F2 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 186)

Como se observa, las notas al pie se plantean mayoritariamente con el objetivo de realizar digresiones (F8). Como veremos más adelante cuando se presenten los resultados por temática, esta función suele realizarse habitualmente para abordar aspectos de la etimología del nombre de un concepto matemático presentado en el texto o para señalar alguna nota sobre el origen histórico de un concepto matemático. Por estos motivos, esta función como digresión de las notas al pie suele aparecer acompañada de otras funciones como la de definir y precisar términos (F1) o la de mencionar o exhibir fuentes (F3). En consecuencia, las digresiones están presentes mayoritariamente en los Libros I, II y V, que son principalmente aquellos en los que se introducen por primera vez conceptos matemáticos más básicos, susceptibles de apuntes históricos o etimológicos.

> (**) Cuando se adoptó el sistema métrico, los académicos franceses propusieron someter también á la ley decimal las unidades de tiempo y la división de la circunferencia. Las dificultades que presentan la transformación de las tablas y cálculos astronómicos y la de los aparatos de medición construidos, han imposibilitado la adopción del sistema en lo que se refiere al tiempo, si bien los ingleses lo emplean en la circunferencia.

Figura 3. Nota al pie correspondiente a F8 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 229)

La abundante presencia de la función F8 (ver un ejemplo en la Figura 3) en este libro marca una nueva diferencia con los resultados obtenidos a partir del análisis de las notas presentes en diferentes obras de Cortázar (Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, en prensa). Esto pone de manifiesto una clara diferencia entre el estilo expositivo de los distintos autores.

Además de la función de digresión, son también bastante abundantes las relacionadas con las funciones F1 (definir y precisar términos), F5 (precisar afirmaciones o enunciados) y F6 (señalar complejidades ignoradas en el texto). La presencia de la función F1 (ver Figura 4) es especialmente habitual en los dos primeros libros, cuando se introducen términos o conceptos, y nuevamente en el Libro VI de proporcionalidad. En ellas se precisan aspectos de una definición de un concepto que no ha quedado reflejadas en el texto.

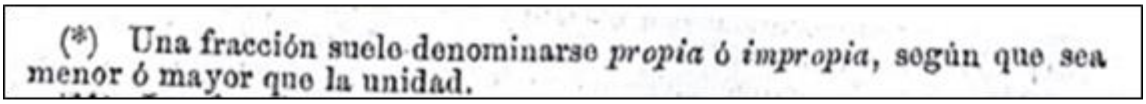

(*) Una fracción suele denominarse *propia ó impropia*, según que sea menor ó mayor que la unidad.

Figura 4. Nota al pie correspondiente a F1 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 85)

Por su parte, las funciones F5 y F6 están especialmente presentes en el Libro IV, que es el que aborda un contenido matemático de carácter más abstracto y complejo. De hecho, como sucede en la Figura 5, es relativamente común encontrar notas que se corresponden con ambas funciones.

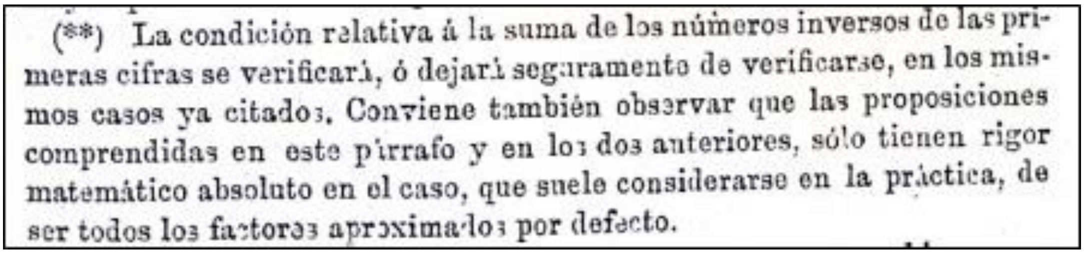

(**) La condición relativa á la suma de los números inversos de las primeras cifras se verificará, ó dejará seguramente de verificarse, en los mismos casos ya citados. Conviene también observar que las proposiciones comprendidas en este párrafo y en los dos anteriores, sólo tienen rigor matemático absoluto en el caso, que suele considerarse en la práctica, de ser todos los factores aproximados por defecto.

Figura 5. Nota al pie correspondiente a F5 y F6 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 209)

Por último, las funciones menos habituales, al margen de las ya comentadas F2 y F4, son F3 y F7. Genette define la función F7 como "aportar argumentos suplementarios o anticipar objeciones" (ver Figura 6). En esta función, podemos clasificar también algunas notas en las que se avisa o indica al lector que un resultado o un término pudiera aparecer o poseer otro uso en otro punto de la obra.

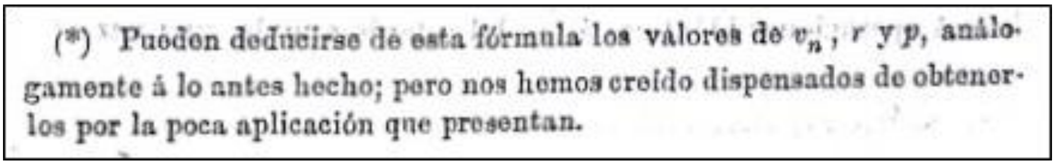

(*) Pueden deducirse de esta fórmula los valores de v_n, r y p, análogamente á lo antes hecho; pero nos hemos creído dispensados de obtenerlos por la poca aplicación que presentan.

Figura 6. Nota al pie correspondiente a F7 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 265)

La función F3, de la que ya hemos hablado, es escasa en términos absolutos en la obra completa, pero es muy abundante en el Libro I. Su presencia marca una clara distinción en el modo en que los autores abordan el tratamiento de las fuentes. Mientras que Salinas y Benítez incluyen referencias incluso en el cuerpo de la obra (Oller-Marcén & Meavilla-Seguí, 2018), en Cortázar, la mención explícita a fuentes está prácticamente ausente (León Mantero, 2017). Sobre este asunto volveremos más adelante.

Temas abordados en las notas

En la Tabla 5 se recogen los temas abordados por los autores en las distintas notas al pie identificadas en el texto.

Tabla 5. *Frecuencia de las temáticas de las notas presentes en las distintas partes de la obra*

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
Libro primero	3	0	17	1	0	3	8	20
Libro segundo	0	0	27	1	0	2	4	3
Libro tercero	0	0	11	0	0	2	0	1
Libro cuarto	1	0	41	2	0	0	1	3
Libro quinto	0	0	9	7	0	0	6	2
Libro sexto	0	0	31	7	0	2	5	3
TOTAL	4	0	136	18	0	9	24	32

Podemos ver que, como cabría esperar en un texto matemático, predominan claramente las notas relacionadas con el rigor y la precisión (T3), como la que se puede ver en la Figura 7.

> (*) Como 10^n, que es la unidad seguida de n ceros, puede ser mayor que cualquier número, la fracción $\frac{2}{10^n}$ podrá ser tan pequeña como se quiera.

Figura 7. Nota al pie correspondiente a T3 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 182)

El resto de las temáticas recogidas por Maz-Machado y Rico (2015), excepto T4, o bien no aparecen (T2 y T5) o bien lo hacen de forma no significativa (T1 y T6). En particular, resulta llamativa la escasez de la temática T6 (principios didácticos) en una obra destinada a servir de libro de texto. Mostramos un ejemplo en la Figura 8.

> (***) Interesa fijarse en las relaciones que establece esta expresión, las cuales pueden traducirse verbalmente y son la clave para resolver gran número de problemas.

Figura 8. Nota al pie correspondiente a T6 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 274)

En el caso de T4 (interés social de las matemáticas), su presencia se concentra principalmente en los Libros V y VI (ver Figura 9). Esto se debe a que estos dos últimos libros son precisamente los dedicados a las aplicaciones prácticas de la aritmética.

> (*) La *cotización* es el señalamiento oficial, hecho cada día por los Agentes de Bolsa, de los precios de las operaciones efectuadas, ó sea de los cambios corrientes.

Figura 9. Nota al pie correspondiente a T4 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 268)

Al margen de las temáticas recogidas por Maz-Machado y Rico (2015) hemos detectado una presencia bastante relevante de los temas T7 (aspectos etimológicos) y T8 (aspectos históricos) que habían sido apuntados por Oller-Marcén y Meavilla-Seguí (2018). Como podemos observar en la Tabla 5, los 24 comentarios con contenido etimológico (ver Figura 10) se reparten de forma bastante equitativa por toda la obra.

(*****) Procede este nombre de la palabra lemosina *pesseta*, diminutivo de *pesa*.

Figura 10. Nota al pie correspondiente a T7 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 225)

Sin embargo, aunque todos los Libros de la obra contienen al menos una nota al pie con contenido histórico, la mayor parte de los 32 comentarios relacionados con este tipo de contenido (ver Figura 11), se concentran en el Libro I.

(**) Este signo fué usado, por vez primera, para denotar la igualdad de dos números, por Roberto Recorde, matemático inglés, de mediados del siglo XVI. Las partes, que dicho signo separa, se llaman primero y segundo miembro.

Figura 11. Nota al pie correspondiente a T7 (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 13)

Estos temas T7 y T8 aparecen vinculados generalmente a la función F8 y su presencia es relativamente poco habitual. Esta tendencia a realizar digresiones al margen del discurso puramente matemático está insinuada en parte en las palabras de Octavio de Toledo (1912, p. 195) que, en su obituario, se refería a Manuel Benítez y Parodi en los siguientes términos:

> Como Profesor de Matemáticas y como expositor, nuestro biografiado era inimitable; tenía la envidiable habilidad de hacer interesante y atractiva la materia que exponía; su ingenio y gracejo natural le llevaban a mezclar términos gráficos militares en la exposición y enseñanza de materias matemáticas, y esta mezcla ingeniosa contribuía no poco a fijar la atención del oyente y a hacer amenísimas teorías, al parecer abstrusas y desabridas

Parece, por tanto, que el propio estilo expositivo y docente del autor puede verse reflejado en los temas y funciones de las notas al pie presentes en su obra.

Aspectos etimológicos e históricos

Como acabamos de adelantar, la presencia de los temas T7 y T8, que abordan aspectos etimológicos e históricos, es un rasgo poco habitual y muy específico de la obra analizada. Estos temas no aparecen en absoluto en las notas al pie de las obras de Cortázar (Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, en prensa). De hecho, en relación con la presencia de elementos históricos en las obras matemáticas españolas de principios del siglo XIX, Garma Pons (1980, p. 70) señala que: “los textos que se usaron en la enseñanza de las matemáticas en la enseñanza superior fueron los de Vallejo, Cortázar, [...] junto con las traducciones de textos franceses [...]. Ninguno de ellos hace referencias históricas”.

A lo largo del texto aparecen 24 notas que contienen información sobre la etimología o el origen de distintos términos. En la Tabla 6 se listan los términos cuyo origen se proporciona.

Tabla 6. *Términos sobre cuyo origen o etimología se proporciona información en notas al pie*

	Términos
Libro primero	Cálculo, Algoritmo, Dígito, Millón/Billón/Trillón…, Cero, Cociente, Congruente, Primo
Libro segundo	Magnitud, Módulo, Fracción, Inconmensurable
Libro tercero	n/a
Libro cuarto	Límite
Libro quinto	Metro, Litro, Gramo, Peseta, Día, Quintal métrico/Tonelada métrica
Libro sexto	Esquema, Incógnita, Fórmula, Aligación, Conjunta

Podemos observar que generalmente se trata de términos técnicos (congruente, primo, límite, etc.). Llama la atención que se explique el origen de los nombres de las unidades del Sistema Métrico Decimal (ver Figura 12). A este respecto hay que tener en cuenta que el uso de este sistema no se impuso por ley en España hasta 1849 (Aznar, 1997) por lo que el uso de estos términos podría no estar aún completamente extendido entre los lectores de la obra.

(**) Procede esta denominación de la palabra λιτρα, que usaban los griegos para designar una medida destinada á los líquidos.

(***) Se deriva este nombre de la palabra γραμμα, peso de un *escrúpulo* entre los médicos griegos.

Figura 12. Información etimológica (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 225)

Muchas de las notas con contenido histórico hacen mención a personajes, en su mayor parte matemáticos y científicos. En la Tabla 7 recogemos los 34 personajes mencionados en notas al pie en los distintos libros que componen la obra (algunos de ellos en más de una ocasión).

Tabla 7. *Personajes históricos mencionados en notas al pie*

	Personajes históricos
Libro primero	Wronski,Vieta, Harriot (2), Recorde, Rudolff, Gunter, Oughtred, Leibnitz (3), Pitágoras, Descartes, Pell, Leopoldo de Pisa, Baltzer, Gauss, Eratóstenes, Tolomeo Evergetes
Libro segundo	Leonardo de Pisa, Brounker, Juan Muller (Regiomontano)
Libro tercero	Cardano, Tartaglia, Rudolff
Libro cuarto	Arquímedes, D'Alembert, Duhamel, Rubini, Arbogast
Libro quinto	Císcar, Jorge Juan, Ulloa, Delambre, Mechain, Godin, Bouguer, Lacondamine
Libro sexto	Arquímedes (2), Wronski

Observamos que entre los nombres reseñados en la obra encontramos desde autores de la antigüedad clásica (Arquímedes, Eratóstenes) hasta contemporáneos de los autores (Rubini); y tanto españoles como extranjeros.

Por otro lado, hay un gran número de notas al pie que contienen información sobre el origen de diversas notaciones (símbolos de las operaciones, signo de igualdad, etc.). Es el caso de la Figura 13, donde vemos un ejemplo en el que no solo se informa sobre el origen y evolución de la disposición de los datos en una división, sino que se presenta la figura del matemático Leonardo de Pisa (nótese la errata).

(*) El conjunto de las líneas vertical y horizontal, que sirven para disponer convenientemente el dividendo, el divisor y el cociente, se llama *caja de la división*. En un principio sólo se usó la línea vertical, llamada *barra*, que fué empleada, por vez primera, por Leopoldo de Pisa, matemático italiano de principios del siglo XIII.

Figura 13. Información sobre notación (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 39)

Estas notas de contenido histórico, como indican Oller-Marcén y Meavilla-Seguí (2018, p. 175) "anticipa, en cierto modo, el interés posterior por introducir la historia en la enseñanza de las matemáticas". Actualmente es habitual encontrar elementos de historia de las matemáticas en libros de texto con diferentes objetivos (Madrid, Maz-Machado, León-Mantero & López-Esteban, 2018), pero a finales del XIX, como ya hemos indicado, no era usual. En cuanto a los objetivos perseguidos por los autores con estas notas al pie, son diversos, y se corresponden con algunos de los señalados por Fauvel (1991).

Además del carácter motivador genérico que puede tener esta información, la nota presentada en la Figura 13 relaciona la técnica de la época con otra anterior; mientras que la Figura 14 muestra un caso en que la información proporcionada contribuye a resaltar el carácter multicultural de las matemáticas.

(*) Estas cifras, que han experimentado algunas modificaciones en su forma, son de origen indio, si bien fueron introducidas por los árabes cuando se establecieron en España. Por ese motivo algunos atribuyen á éstos su invención; pero los mismos árabes declaran en sus obras aquella procedencia, llamándolas cifras indias. Lo comprueba también el nombre *Hendesséh*, que daban á su aritmética, que quiere decir *la ciencia indiana*.

Figura 14. Carácter multicultural (Salinas y Angulo & Benítez y Parodi, 1890, p. 8)

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos continuado con una reciente y poco explorada línea de trabajo que se inició en (Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, en prensa). El estudio de las notas al pie presentes en libros de texto de matemáticas y, en concreto, de su función y de los temas tratados en ellas puede aportar información interesante sobre los autores y sobre el carácter de la obra.

De hecho, en el trabajo citado, ya se apreció la posibilidad de que, dentro de las obras de un mismo autor, el uso de las notas al pie fuese diferente en función de los destinatarios objetivos de cada texto. Con los resultados obtenidos en el estudio que nos ocupa, podemos plantear la hipótesis de que el uso de las notas al pie también se vea influido y refleje las características específicas de los autores. De hecho, hemos detectado grandes diferencias entre el uso de notas al pie por parte de Juan Cortázar y del binomio Salinas y Benítez. Estas diferencias se manifiestan tanto en la cantidad y densidad de notas en las obras, como en sus funciones y temas. Evidentemente, serán necesarios trabajos más amplios y sistemáticos para poder explorar esta idea en profundidad.

En cuanto a los instrumentos analíticos utilizados, debemos hacer algunos comentarios. Por un lado, parece necesario realizar una labor de adaptación de las categorías F1 - F8 al contexto de los libros de texto de matemáticas. Hay que tener en cuenta que estas funciones de los pies de página propuestas por Genette (2001) se plantearon para el análisis de obras literarias (aunque Genette hable en algún punto de libros educativos). En primer lugar, esto obliga a redefinir funciones como F2 (traducir fragmentos del texto) que, en nuestro ámbito, pueden estar relacionadas con la explicación del significado de símbolos matemáticos o con la "traducción" entre distintos sistemas de representación. En segundo lugar, pensamos que resultará indispensable (y algo más complejo) detallar y refinar el significado de las funciones F5 y F6. Estas funciones suelen estar asociadas a procesos de demostración y sería necesario proporcionar definiciones de las mismas en términos relacionados con dichos procesos.

Por otro lado, si bien las categorías T1 - T6 (extraídas del trabajo de Maz-Machado y Rico (2015) para clasificar los temas abordados en las notas al pie) fueron adecuadas para el análisis de la obra de Cortázar, habrían resultado claramente insuficientes para el análisis realizado en este trabajo. Además de esta ampliación, y al igual que en el caso anterior, pensamos que será necesario refinar alguna de ellas. Es el caso, especialmente de la categoría T3 (rigor y precisión) que está resultando la más frecuente con gran diferencia. El gran número de notas al pie clasificadas en este tema sugiere que quizás sea posible obtener subcategorías de la misma que permitan realizar un análisis más fino de los datos.

Los futuros trabajos a realizar en esta línea, en los que se consideren muestras más amplias y con una mayor variabilidad, nos permitirán también desarrollar instrumentos válidos para el análisis de las notas el pie de textos matemáticos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado dentro del Grupo S60_20R (Gobierno de Aragón y Fondo Europeo de Desarrollo Regional).

REFERENCIAS

Andrade, M.M., & de Souza Ferreira, M.P. (2015). Uma análise paratextual da obra "arithmetica theorico-pratica". *Conexões-Ciência e Tecnologia*, *9*(4), 153-165.

Aznar, J.V. (1997). *La unificación de los pesos y medidas en España durante el siglo XIX*. Tesis doctoral inédita. Valencia: Universidad de Valencia.

Barbosa, E.M. (2014). *As matemáticas puras e mistas e a Academia Real Militar do Rio de Janeiro: análise de paratextos de tratados, elementos e compéndios*. Tesis de maestría inédita. Sao Paulo: Universidad de Sao Paulo.

Carrillo Gallego, D. (2005). *La Metodología de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-68) y sus antecedentes*. Tesis doctoral inédita. Murcia: Universidad de Murcia.

Christiansen, A. (2017). The function of a preface: Contextual information and didactical foundation described in the preface of a textbook in arithmetics from 1825. En K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, M. Menghini, J. Prytz y G. Schubring, (Eds.). *"Dig where you stand" 4. Proceedings of the fourth International Conference on the History of Mathematics Education* (pp. 415-416). Torino: Edizioni Nuova Cultura.

Comas Roqueta, J. (2015). *La enseñanza de las matemáticas en la armada española en el siglo XIX*. Tesis doctoral inédita. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Conejo, L. (2015). *Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad: de la Ley General de Educación a la Ley Orgánica de Educación*. Tesis doctoral inédita. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, *45*(6), 633-646.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *11*(2), 3-6.

Flick, U. (2004). Triangulation in qualitative Research. En U. Flick, E. von Kardoff, & I. Steinke I. (Eds.), *Companion to Qualitative Research* (pp. 178-183). London: SAGE.

García Camarero, E. (1984). La matemática en la España del siglo XIX. En M. Hormigón (coord.), *La ciencia y la técnica en España entre 1850 y 1936* (pp. 115-130). Jaca: SEHCYT.

Garma Pons, S. (1980). Los Matemáticos Españoles y la Historia de las Matemáticas del siglo XVII al siglo XIX. En S. Garma (Coord.), *El científico español ante su historia: la ciencia en España entre 1750-1850: I Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias* (pp. 59-72). Madrid: SEHCYT.

Genette, G. (2001). *Umbrales*. México: Siglo XXI.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon*, *28*(1), 9-22.

Gómez, B. (2018). El uso de la historia en la educación matemática: El caso de los gemelos póstumos. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *1*(1), 11-21.

González Astudillo, M.T. (2009). La investigación en historia de la educación matemática. *Educación y Ciencia*, *1*(36), 37-58.

González Astudillo, M.T., & Sierra Vázquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(3), 389-408.

León-Mantero, C. (2017). *Juan Cortázar y su contribución a la formación matemática española en el siglo XIX*. Tesis doctoral inédita. Córdoba: Universidad de Córdoba.

López-Esteban, C. (2019). La institucionalización del análisis matemático en el siglo XVIII a través de libros históricos y su reflejo en la enseñanza para Educación Secundaria en España a través del análisis de manuales. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 95-116). Valladolid: SEIEM.

Lune, H., & Berg, B. L. (2017). *Qualitative Research Methods for the Social Sciences*. Essex: Pearson.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C., & López-Esteban, C. (2018). La historia de las matemáticas en libros de texto de matemáticas de los primeros cursos de la ESO. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 310-319). Gijón: SEIEM.

Maraví Zabaleta, L. (2019). Los números complejos en el texto sobre aritmética de G.M. Bruño. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 2*(1), 1-11.

Maz, A. (2005). *Los Números Negativos en España en los siglos XVIII y XIX.* Tesis doctoral inédita. Granada: Universidad de Granada.

Maz-Machado, A., & Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 49-76.

McCulloch, G. (2004). *Documentary research in education, history, and the social sciences*. New York: Routledge/Falmer.

Muñoz-Escolano, J.M., & Oller-Marcén, A.M. (2020a). Análisis de los prólogos de los textos algebraicos publicados en España durante el siglo XVI. *Historia y Memoria de la Educación*, *11*, 51-85.

Muñoz-Escolano, J.M., & Oller-Marcén, A.M. (2020b). Paratextos de libros españoles de matemáticas del siglo XVIII. El caso de los prólogos. En C. López-Esteban & A. Maz-Machado (eds.) *Las Matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores* (pp. 63-92). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Muñoz-Escolano, J.M., & Oller-Marcén, A.M. (En prensa). Notas al pie en libros de texto españoles del siglo XIX. El caso de Juan Cortázar. En *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 1-8). Valencia: SEIEM.

Octavio de Toledo, L. (1912). Sección Biográfica [Biographical section]. *Revista de la Sociedad Matemática Española*, *6*, 193-196.

Oller-Marcén, A.M., & Meavilla Seguí, V. (2018) Arithmetic in the Spanish Army at the end of the 19th century: The textbooks by Salinas and Benítez. En Furinghetti, F. & Karp, A. (Eds.) *Researching the History of Mathematics Education. An International Overview* (pp. 167-187). New York: Springer.

Oller-Marcén, A.M., & Muñoz-Escolano, J.M. (2019). Conceptions about mathematics, its teaching and its learning in the Compendio Mathematico (1707) written by the Spanish Thomas Vicente Tosca (1651-1723). *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(64), 635-648.

Onwuegbuzie, A.J., & Leech, N. L. (2007). Validity and qualitative research: An oxymoron? *Quality & Quantity*, *41*(2), 233-249.

Picado, M. (2012). *El sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)*. Tesis doctoral inédita. Granada: Universidad de Granada.

Puig, L. (2006). Vallejo perplejo. En A. Maz, M. Torralbo, & L. Rico (Eds.). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática* (pp. 113-138). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Ruiz, J.M. (2004). La enseñanza militar en el alto mando: Historia, organización y metodología. *Educación XX1*, *9*, 199-220.

Ruiz-Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la Educación. *Revista Española de Pedagogía*, *134*, 449-475.

Salinas y Angulo, I., & Benítez y Parodi, M. (1884). *Aritmética*. Madrid: Imprenta y fundición de Manuel Tello.

Salinas y Angulo, I., & Benítez y Parodi, M. (1890). *Aritmética*. Segunda edición. Madrid: Establecimiento Tipográfico de “La Justicia”.

Sánchez Ron, J.M. (1992). Las ciencias Físico-Matemáticas en la España del siglo XIX.

Ayer, *7*, 51-84.

Scott J. (1990). *A matter of record, documentary sources in social research*. Cambridge: Polity Press.

Velamazán, M.A. (1994). *La enseñanza de las Matemáticas en las Academias Militares en España en el siglo XIX*. Cuadernos de Historia de la Ciencia, 7. Zaragoza: SEHCTAR.

Vitrac, B. (2008). Promenade dans les préfaces des textes mathématiques grecs anciens. En: P. Radelet-de-Grave (Ed.). *Liber amicorum Jean Dhombres* (pp. 519-556). Turnhout: Brepols.

José M. Muñoz-Escolano
Universidad de Zaragoza, España
jmescola@unizar.es

Antonio M. Oller-Marcén
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, España
oller@unizar.es

ISSN: 2603-9982

Barrantes-Hernández, A. y Picado-Alfaro, M. (2021). El Sistema Métrico Decimal en manuales de aritmética para el maestro de educación primaria en Costa Rica durante 1885-1914. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 4*(1), 34-56

EL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL EN MANUALES PARA EL MAESTRO DE PRIMARIA EN COSTA RICA DURANTE 1885-1914

Andrey Barrantes-Hernández, Universidad Nacional, Costa Rica

Miguel Picado-Alfaro, Universidad Nacional, Costa Rica

Resumen

El estudio tuvo como objetivo caracterizar la formación de los maestros ante la adopción del Sistema Métrico Decimal, a partir de las especificidades matemáticas y didácticas reconocidas en libros de texto para la educación primaria en Costa Rica entre 1885 y 1914. El estudio se ubica dentro de las investigaciones históricas en educación matemática; corresponde a un estudio descriptivo cuyas fuentes primarias fueron dos manuales para el maestro de enseñanza primaria. El análisis de los textos tomó como base los principios del análisis didáctico. Los resultados acentúan tendencias en cuanto a la estructura conceptual y las representaciones que exponen el sistema en los manuales, se caracterizan las tareas y se resaltan las sugerencias para el maestro, al momento de la enseñanza del Sistema Métrico Decimal.

Palabras clave: *aritmética, educación primaria, formación de maestros, libros de texto, Sistema Métrico Decimal*

The Metric System in manuals for primary education teachers in Costa Rica during 1885-1914

Abstract

The study aimed to characterize the training of teachers when Metric System was adopted in Costa Rica, based on the mathematical and didactic specificities recognized in textbooks for primary education between 1885 and 1914. The study is located within the historical research in mathematics education; it corresponds to a descriptive study whose primary sources were two manuals for the primary school teacher. The analysis of the texts was based on the principles of didactic analysis. The results reveal trends in the manuals regarding the conceptual structure and representations that show the system in these texts, tasks are characterized and suggestions for the teacher when teaching Metric System are highlighted.

Keywords: *arithmetic, primary education, primary teacher training, textbooks, Metric System*

Recibido: 29/12/2020; Aceptado: 09/03/2021

INTRODUCCIÓN

La evolución de las civilizaciones ha involucrado diversas actividades en las que inciden distintos factores y necesidades que requieren de ciertos procesos cognitivos para obtener resultados concretos. Dentro de estos procesos podemos destacar la medición que, desde la antigüedad, ha sido una necesidad para los grupos de personas y que con el paso del tiempo ha derivado en la cuantificación de diversas magnitudes como la distancia, el tiempo, la capacidad y el peso (Zumbado, 2013), y en el establecimiento de unidades de medida para su registro.

Particularmente, entre las primeras unidades para la longitud destacan las medidas antropométricas que hacen referencia a partes del cuerpo humano como el pie, el palmo, el codo, la pulgada y la braza, así como a distintos gestos derivados de estas como el paso y la vara, que surgieron en el antiguo Egipto y la Mesopotamia asiática (Díaz, 1990; Centro Español de Metrología, 2011). Este tipo de medidas conllevaba una variabilidad intrínseca, debido a las dimensiones de cada persona y a la diversidad de unidades utilizadas por cada Civilización. Con el paso del tiempo, en diferentes regiones se fueron estableciendo conceptos propios de medidas que derivaron en una diversidad metrológica y, en consecuencia, en tratos poco igualitarios para los intercambios comerciales entre naciones.

Durante el siglo XVIII, en varios países surgieron diversas iniciativas para una estandarización y universalización de las pesas y medidas, de manera que se facilitaran el intercambio de conocimiento, las actividades comerciales y culturales tanto a nivel local como entre regiones. Esta situación, junto al impulso dado por la Revolución Francesa, condujo a la definición del metro como unidad de medida única, invariable y fundamental de un nuevo sistema metrológico mundial: el Sistema Métrico Decimal (SMD).

Dentro de este orden de ideas, en las últimas décadas, varios autores se han dedicado a estudiar las particularidades de los procesos de adopción e implantación del SMD en distintos países desde ámbitos diferentes. Por ejemplo, Basas (1962) analiza el proceso de implantación del SMD en España desde una perspectiva económica, Ten (1989) y Aznar (1997) acentúan el carácter científico del sistema, y Picado (2012) que enfatiza sobre los textos utilizados para la difusión del sistema en el sistema educativo español. Por su parte, Amaral, Ralha y Gomes (2011) y Zuin (2007) han dirigido sus estudios a la enseñanza de la medida en Portugal y la incorporación del SMD en el mismo país, respectivamente. En Francia, Débarbat y Quinn (2018) destacan el origen del SMD y la dinámica gubernamental para la evolución y adopción del Sistema Internacional de Medidas y Dhombres (1993) refiere a los procesos de adaptación de las personas campesinas a la nueva metrología.

La problemática metrológica de los siglos XVIII y XIX en países de Europa y de otros continentes, tuvo su réplica en los países americanos. Con especificidad, la provincia de Costa Rica sufría de lo que podemos llamar una “incompatibilidad comercial”, ocasionada por el uso de una diversidad de medidas locales y arbitrarias, muchas de estas derivadas de los sistemas metrológicos del Reino de España. Ante la unificación metrológica que se estaba dando en el siglo XIX, Costa Rica no fue la excepción. Las dificultades comerciales ocasionadas por la diversidad de unidades de medida, el avance de la ciencia y la necesidad de formar parte del grupo de países que habían unificado su metrología, impulsaron la adopción del SMD.

> Si en algún país se ha hecho sentir la necesidad de establecer un sistema uniforme de pesas y de medidas, es en Costa Rica, en donde puede decirse que no existe ninguno que

> satisfaga las exigencias del público y del comercio en general. (Medidas y pesas del Sistema Métrico y tablas de equivalencias con las antiguas, 1885, p. 1)

Las iniciativas para la adopción del SMD en Costa Rica se dieron a partir de 1881. El Gobierno de turno dictaminó una serie de Decretos que estipularon la entrada en vigor y la obligatoriedad de uso del SMD y sentaron las bases para la creación de reglamentos que normaban la utilización de pesas y medidas métrico-decimales. El SMD estuvo vigente en Costa Rica hasta el año 1973; la Ley N°5292 titulada "Uso Exigido Sistema Internacional Unidades Medida 'SI' Métrico Decimal", estableció la transición del SMD al Sistema Internacional de Unidades (SI).

Resulta claro que, al igual que en otros países, la educación —particularmente la instrucción primaria— se convirtió en una de las mejores aliadas para la difusión de las nuevas unidades métricas entre los ciudadanos costarricenses. De allí que los maestros debían estar preparados para formar a los estudiantes en edades tempranas en las nuevas unidades métricas. Desde este posicionamiento, los libros de texto se convierten en referentes importantes para encontrar y conocer acerca del rol de los maestros, sobre las estrategias que utilizaron y cómo desarrollaron los contenidos matemáticos en las aulas con respecto a la adopción del SMD en Costa Rica.

Este artículo muestra los resultados de un estudio sobre la implantación del SMD en Costa Rica en el siglo XIX y las implicaciones que tuvo en la formación de maestros de educación primaria, desde la oficialización del uso de este sistema en 1885 hasta la fundación de la Escuela Normal en 1914. Se recalcan las particularidades históricas y educativas del proceso de adopción del SMD en Costa Rica. El estudio tuvo como objetivo determinar las especificidades matemáticas y didácticas sobre el SMD que muestran libros de texto de aritmética para uso del maestro de educación primaria, editados entre 1885 y 1914, que permitan una caracterización de la formación de estos docentes en Costa Rica ante la adopción de este sistema metrológico en esta época.

CONTEXTO HISTÓRICO DEL ESTUDIO

A manera de síntesis, durante el periodo Prehispánico, la educación —instrucción o adiestramiento, como se suele llamar en este periodo— constituyó una actividad espontánea que respondía a las necesidades de supervivencia de los pobladores. El énfasis de estas necesidades era la transmisión de las técnicas desarrolladas para la perpetuidad de actividades laborales, espirituales y artísticas propias de la comunidad. En el siglo XVI, iniciadas las expediciones españolas en el territorio costarricense, comienzan las actividades de catequesis para la evangelización e instrucción a cargo de clérigos, como primeros maestros. La bibliografía permite identificar dos periodos representativos en cuanto a la historia de la educación en Costa Rica en el siglo XVI: La Conquista, caracterizada por la catequización de indígenas, y La Colonia donde la educación deja de ser una actividad propia de la Iglesia y pasa a ser considerada como una actividad urgente del Reino de España.

La fundación de la primera escuela elemental en Cartago, por parte del sacerdote Don Diego de Aguilar —considerado el primer maestro de Costa Rica—, trae consigo una serie de limitaciones concretadas en la falta de experiencia de los maestros para la educación de indígenas y colonos, y una falta considerable de recursos didácticos. Esta escuela se mantiene hasta el siglo XVII (1623) cuando cierra por falta de recursos y debido a las nuevas disposiciones de La Corona Española para la educación en el Istmo. La falta de escuelas en el país, durante el siglo XVII conduce —en el siglo XVIII— a la contratación de maestros formados en Guatemala y Nicaragua para la enseñanza de la lectura, la escritura, la aritmética y la doctrina católica en poblados costarricenses como Heredia y Nicoya. A finales de este siglo, se emite una orden para declarar la obligatoriedad de la educación en Cartago y se dan las primeras iniciativas para dotar a San José de un centro de estudios.

Con la llegada del siglo XIX, las iniciativas del presbítero Florencio de Castillo, en las recién instauradas Cortes de Cádiz, hacen que se promueva la educación entre los habitantes de la Provincia de Costa Rica. En 1814 se funda la Casa de Enseñanza de Santo Tomás para la instrucción en las “primeras letras” (lectura, escritura y doctrina cristiana), institución emblemática de la educación costarricense y de las ideas ilustradas para la búsqueda de la libertad de la Región. La apertura de este centro de enseñanza marca el inicio de una etapa trascendental en la educación: se modifica la tutela religiosa, pero se mantiene la enseñanza de las primeras letras; a estas se les incorporó la gramática y la aritmética (Picado-Alfaro y Espinoza-González, 2020).

Aparte de la Casa de Enseñanza de Santo Tomás, dedicada a la primera enseñanza y la educación secundaria (Rodríguez y Ruiz, 1994), también se fundaron otros centros de primeras letras en diversas localidades del país, dedicados al aprendizaje de la lectura y regulados administrativamente por los municipios (Quesada, 2005a). En 1843 este centro de estudios pasó a ser una institución de formación superior: la Universidad de Santo Tomás, hasta su cierre en 1888.

Dada la Independencia del Reino de España en 1821, se dicta la primera Constitución de Costa Rica: *El Pacto de Concordia*, que establece la educación como un asunto de atención prioritaria, convirtiéndola en los siguientes años en una de las prioridades de la administración pública. Ejemplo de esto son la promulgación de la *Ley de Compulsión Escolar* (1832) que exigía a los padres de familia que enviaran a sus hijos a la escuela, y del *Reglamento Orgánico del Consejo de Instrucción Pública* que establecía que la educación escolar sería en lo sucesivo gratuita, sostenida por el Gobierno y los Ayuntamientos municipales (Martínez, 2016). Durante estos primeros años de vida independiente es notorio un dato interesante: los primeros indicios de la enseñanza de la matemática en Costa Rica se datan en 1822, cuando se integra la aritmética dentro de los planes de formación (Quesada, 2005a).

Para el año 1847 la educación mantiene un papel preponderante en el desarrollo del país. El crecimiento económico en esa época, debido a la exportación de café, condujo a iniciativas que derivaron en reformas educativas que, bajo la dirección del Estado, procuraron mejorar todos los niveles de la escolaridad (Quesada, 2005a).

Con el paso de los años, los avances en materia educativa empezaban a notarse y los logros incluyeron la declaración de obligatoriedad de la educación pública para todas las clases sociales (Quesada, 2005a). La Constitución de 1869 otorgaba al Estado un rol más importante en términos de educación: se establece la enseñanza primaria obligatoria, gratuita y costeada por la nación y el Estado tenía a cargo la selección de los textos de primaria, la inspección de los centros educativos, el control de personal docente, entre otras funciones. Particularmente, es necesario resaltar que la llegada de la imprenta al país, en 1830, permitió la difusión masiva de información a través de textos y diarios (periódicos) que promovían una instrucción cultural y educativa. De hecho, el primer libro editado en Costa Rica corresponde a un texto de aritmética: Breves lecciones de aritmética, publicado por el Bachiller Rafael Francisco Osejo ese mismo año.

El dinamismo de las decisiones sobre educación no cesó. La Reforma de 1886 —promovida por D. Mauro Fernández Acuña— y la promulgación de la *Ley Fundamental de la Instrucción Pública* incidieron en una organización de la propuesta educativa: se determinó que la enseñanza oficial se dividía en primaria, complementaria, de adultos, normal, general, especial, profesional y universitaria para lograr un sistema educativo integrado desde los primeros años de escolaridad hasta la formación universitaria. También, se promueven acciones para el inicio de la profesionalización de la actividad docente en dos instituciones específicas: el Liceo de Costa Rica y el Colegio Superior de Señoritas (Barrantes y Ruiz, 1994a), y se decreta la *Ley General de Educación Común* que dictaba los requisitos mínimos de instrucción obligatoria, en cuanto al conocimiento, para los alumnos.

> Artículo 7: El mínimo de instrucción obligatoria comprende las siguientes materias: Lectura, Escritura, Aritmética, (las cuatro primeras reglas y el sistema métrico decimal) Geometría objetiva, Nociones de Geografía universal y particular de Costa Rica, Ejercicios prácticos de lenguaje, Gimnástica, Moral y Educación Cívica. (Ley General de Educación Común. Reglamento de la misma. Decreto sobre Empréstito Escolar, 1886, p. 2)

En 1890 se nombra una comisión conformada por docentes extranjeros y nacionales que tendría a su cargo la elaboración de nuevos programas para educación primaria. Los cambios generados culminaron con la Reforma de 1908 y la instauración de los programas para la enseñanza primaria redactados por D. Roberto Brenes Mesén y D. Joaquín García Monge, junto con los programas para la enseñanza media. Estos programas dividían las escuelas primarias en urbanas y rurales, proponiendo diferencias en cuanto a la enseñanza (Barrantes y Ruiz, 1994b). Los programas tuvieron un año de vigencia, ya que fueron tomados con cierto rechazo y cuestionamientos. Para el siguiente año, se elaboraron otros programas basados en las nuevas corrientes pedagógicas, vigentes hasta 1918.

Desde 1814, cuando se fundó la Casa de Enseñanza de Santo Tomás, hasta la creación de la Escuela Normal en 1914 —instaurada para la preparación de maestros que dirigirían las escuelas primarias oficiales en Costa Rica— el país tuvo una expansión a nivel educativo para la enseñanza primaria que fue creciendo con el pasar de los años. Este incremento de centros educativos demandaba una mayor cantidad de maestros que el país no lograba formar por diversos motivos: salarios bajos y pagos irregulares para los maestros y malas condiciones de las escuelas. Esta situación fue la constante durante el siglo XIX, hasta la creación de la Escuela Normal en 1914, cuya actividad formadora de maestros se ve finalizada con la creación de la Universidad de Costa Rica en 1941 (Quesada, 2005a, 2005b), institución que asume los procesos de formación y capacitación de maestros.

Los centros de formación de maestros de educación primaria

Las iniciativas para crear centros de formación de maestros de primera enseñanza surgieron de la escasa cantidad que había de estos profesionales y de la preocupación de dar al encargado de la enseñanza primaria la formación específica en esta área. Durante la primera mitad del siglo XIX, la fundación de colegios para varones y colegios para niñas permitió la formación de maestros y maestras en las conocidas "Secciones normales" dentro de estas instituciones, principalmente en zonas centrales del país. Ejemplo de estos centros son la Escuela Normal para Varones (1840) y el Liceo de Niñas (1849). Esta forma de organizar la formación de docentes se institucionalizó en la segunda mitad del siglo XIX y durante los primeros años del siglo XX, derivando en un incremento de secciones normales en diversos centros educativos en el país. Las secciones normales incluían una serie de cursos adicionales —a la educación secundaria— para los maestros en formación, junto con la presentación de conferencias y la aplicación de exámenes, complementados con las políticas de inspección vigentes y el asesoramiento necesario.

La reforma educativa de 1885 impulsó la profesionalización del docente desde dos ópticas: el refrescamiento y capacitación del personal, y la formación adecuada de nuevos docentes (Barrantes y Ruiz, 1994a; Martínez, 2016). La revista *El Maestro*, dedicada a las escuelas primarias, publicaba contenido de ayuda para el maestro con respecto a diferentes materias y metodologías para aplicar en el aula. A raíz de la continua carencia de docentes en el país, en 1897 el Gobierno optó por enviar jóvenes estudiantes al Instituto Pedagógico de Chile. En 1906 se estableció el *Reglamento Orgánico del Personal Docente de las Escuelas Comunes* con el propósito de mejorar la preparación de los maestros de primaria, esto por medio de la ejecución de exámenes para otorgar certificados de "aptitud e idoneidad profesional" y, además, de la presentación de conferencias pedagógicas (Quesada, 2005a).

Finalmente, en 1914 se fundó la Escuela Normal de Costa Rica, que adoptó las "Secciones Normales" que estaban implantadas en las instituciones de segunda enseñanza para la formación de maestros y maestras, con el fin de otorgar un título de maestro.

LA INTRODUCCIÓN DEL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL EN COSTA RICA

Brevemente, debe apuntarse que las primeras iniciativas para la creación de una unidad fundamental de medida invariable, que permitiera el establecimiento de un sistema metrológico estable, uniforme y sencillo, se dieron en Francia en la última década del siglo XVIII. Finalizados los trabajos de medición en 1798, se convocó a científicos de distintas naciones a formar parte de la Comisión de Pesas y Medidas que, en 1799, fijó el valor definitivo de la nueva unidad de medida, el metro —vocablo que proviene del griego *metron* (medida)—, definido como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París. Así, surgió un sistema que, como indica Kula (1980) "toma como unidad de medición fenómenos astronómicos independientes del hombre" (p. 4). Con el paso de los años, se destacó el carácter decimal del sistema, a partir de las unidades de medida superiores e inferiores al metro que están relacionadas entre sí por múltiplos y submúltiplos de diez. El SMD tuvo una aceptación por parte de la comunidad científica debido a su fundamentación matemática, científica y social. En 1875 con la Convención del Metro, o Tratado del Metro, llevada a cabo en París con la participación de representantes de 17 países, se estableció una autoridad mundial en la metrología y se impulsó la implantación del SMD.

Inicialmente, el SMD se compuso de dos magnitudes básicas: longitud y peso, cuyas unidades de medida correspondían al metro y al kilogramo, respectivamente. De estas se derivaron otras unidades de medida: el litro, como la unidad de volumen de líquidos (equivalente a un decímetro cúbico), el estéreo como la unidad de volumen de sólidos (equivalente a un cubo de un metro de lado), y el área, como una unidad de superficie equivalente a un cuadrado de diez metros de lado. Luego, con la inclusión del tiempo como una tercera magnitud básica, el SMD se amplió al sistema MKS (metro, kilogramo y segundo). Con el paso del tiempo se fueron agregando otras magnitudes básicas que cimentaron el camino para el establecimiento del Sistema Internacional de Unidades (SI).

Por último, es conveniente acotar que la finalidad fundamental del SMD fue unificar y racionalizar las unidades de medición, así como sus múltiplos y submúltiplos, obteniendo neutralidad y universalidad. Este sistema fue el oficial en Costa Rica desde 1885 hasta 1973 cuando se oficializó el SI, que tiene como base el SMD.

En el marco de la historia política, metrológica y educativa de Costa Rica en 1881, a través de la Ley No. 46 “Sistema Métrico Decimal para pesos y Medidas”, se decreta la adopción del SMD, pero sin establecer la fecha oficial para su implementación definitiva. En 1884, se establece que a partir del 10 de agosto de 1885 este sistema iba a ser de uso obligatorio para todos los actos oficiales de la República, y para esa misma fecha del año de 1886 sería efectivo en todas las actividades públicas y comerciales. Ante estas ordenanzas, el Gobierno define una serie de acciones como estrategias para incorporar el SMD en los ámbitos social, educativo y comercial. Se promulga la “Ley del Sistema Métrico Decimal” (1884) que consigna el Reglamento de Pesas y Medida; estas directrices disponen la adopción del denominado sistema métrico decimal francés. De manera particular, con el reglamento se impone la enseñanza del SMD en las instituciones educativas:

> Artículo 3. En todos los establecimientos de enseñanza costeados o subvencionados por el Gobierno, se hace obligatorio el aprendizaje del sistema métrico decimal, y de las tablas de equivalencia a que se refiere el artículo anterior, tan luego como estas se hayan publicado. (Medidas y pesas del Sistema Métrico y tablas de equivalencias con las antiguas, 1885, p. 8)

En este marco legal y educativo, se fundaron escuelas nocturnas de adultos para el aprendizaje del sistema, en las capitales de provincia y en las cabeceras de los cantones.

La edición, impresión y distribución de textos se convirtió en una de las estrategias más adecuadas para la difusión de los conceptos y procedimientos relacionados con el SMD. Uno de estos textos fue la traducción de la obra titulada *Sistema Métrico: Demostrado según el aparato del método Level* (1886), hecha por D. Manuel A. Quirós, usada como guía para el maestro en la instrucción escolar y para la formación de los pobladores. El texto se constituía de una serie de tareas que promovían el uso de las unidades métrico-decimales en las aulas (Ruiz y Barrantes, 2000), como indica su autor, “encontrarán los preceptores [los maestros] las facilidades indispensables para inculcar en la inteligencia de los niños cuantas nociones son necesarias para adquirir el conocimiento del sistema” (Level, 1886, p. 1). Además, la difusión de la guía —el manual— se extendió a los municipios con el fin de actualizar a los habitantes que no se encontraban en el sistema educativo.

El SMD se incorporó a la enseñanza de la aritmética, a partir de los programas de primaria emitidos con la “Ley General de Educación Común”, de 1886. Dentro de este orden de ideas, el SMD llegó a convertirse en un requisito de la instrucción mínima obligatoria en primaria.

METODOLOGÍA

El estudio se enmarca en la investigación cualitativa-descriptiva. Por sus características, se ubica dentro de las investigaciones históricas en educación matemática, basada en el análisis de libros de texto (Maz, 2005; Picado, 2012). Como se ha descrito, caracteriza la introducción del SMD en la formación de maestros en Costa Rica en el periodo 1885-1914, desde el estudio de manuales para su enseñanza.

Fuentes de información

En la perspectiva que aquí se adopta, los libros de texto son un reflejo del estado de la ciencia, una muestra indicativa de las concepciones dominantes en los distintos momentos de la historia acerca de qué contenidos deben ser enseñados, cuáles deben ser enfatizados, cuál es la forma de organizarlos, con qué enfoques conceptuales y con qué metodología (Gómez, 1999).

Los libros de texto son las fuentes de información para abordar cuestiones como la manera en que se enseñaba y las formas de construcción de los conceptos del SMD en las aulas de Costa Rica, esto al momento en que se introdujo dicho sistema en los planes educativos. Dado el caso de cómo irrumpió el SMD dentro del sistema educativo costarricense en 1885, se considera el libro de texto como la herramienta utilizada para solventar la introducción del SMD en las aulas de las escuelas y colegios.

La búsqueda de estos textos se llevó a cabo a través de los catálogos electrónicos de centros de documentación como la Biblioteca Nacional de Costa Rica, las Bibliotecas Federico Tinoco y Carlos Monge de la Universidad de Costa Rica, y la Biblioteca Joaquín García Monge de la Universidad Nacional. Como resultado de esta búsqueda se localizaron ocho textos; esta lista se restringió solamente a dos textos, a partir de dos criterios de selección: representatividad del texto en el periodo histórico y que su contenido incluyera el SMD. Los textos seleccionados son: *Sistema Métrico demostrado según el aparato del método Level* (1886) y *Manual del maestro: curso elemental de aritmética arreglado de acuerdo con los programas oficiales* (1897). Especialmente, la obra *Level* se concibe como uno de los textos más importantes para el proceso de instrucción temprana en las nuevas unidades de medida.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Debido a la similitud del estudio con los trabajos realizados por Maz (2005) y Picado (2009, 2012) orientados a la investigación histórica basada en el análisis de libros de texto, se siguió esta línea en el proceso de definición de las categorías de análisis. Primero, se establecieron tres focos de información determinados por una caracterización del autor, de la estructura del texto y de su contenido.

Cada foco de información contiene una serie de categorías y unidades de análisis. Así en la caracterización del autor se contemplan las categorías de información personal y profesional. Luego para la caracterización de estructura se tomó en cuenta datos propios del libro de texto. Por último, en la caracterización del contenido se hace referencia a información sobre historia del SMD, su utilidad, conceptos y modos de representación de las unidades métrico-decimales, limitaciones de aprendizaje, tareas y recursos propuestos para su enseñanza.

En lo que sigue se presenta el resultado del análisis de dos libros de texto que fueron editados entre la oficialización de uso del SMD (1885) y la fundación de la Escuela Normal de Costa Rica (1914). A partir del análisis se acentúan las particularidades matemáticas y didácticas que caracterizan la introducción del SMD en estos documentos y, por tanto, en el sistema educativo. Asimismo, se caracteriza la preparación que recibieron los maestros, ante la adopción del SMD, para su difusión en el entorno escolar de la época. La información de cada texto se organiza en cuatro partes: la primera incluye una presentación general del texto y su autor; la segunda se titula preliminares y expone las evidencias sobre los propósitos del texto, la historia del SMD, las disposiciones legales para su implantación y los conocimientos matemáticos que el autor consideraba como necesarios para su aprendizaje; la tercera parte destaca las particularidades de la estructura matemática-conceptual para la inclusión del sistema en el texto; y, finalmente la cuarta parte, acentúa las especificidades didácticas para la enseñanza del sistema.

Como se ha expuesto, a partir de 1881 se reconocen los primeros indicios de la implementación del SMD en el país. Sin embargo, no fue sino hasta 1885 cuando su uso se hizo oficial y obligatorio, logrado a través del “Reglamento de Pesas y Medidas” emitido en 1884. La incidencia de esta disposición en la educación es notoria. El gobierno toma medidas como la fundación de escuelas nocturnas de adultos para el aprendizaje del sistema, se incentiva su enseñanza en las escuelas de primera enseñanza y se promueve un proceso de divulgación en los municipios mediante la impresión y el reparto de textos (manuales con ejercicios). En esta etapa de la historia educativa y metrológica de Costa Rica, destacan las diligencias políticas realizadas en las administraciones de D. Próspero Fernández Oreamuno (figura 1) y D. Bernardo Soto Alfaro —quien, debido a la muerte del Presidente Fernández Oreamuno en 1885, es el designado a culminar el periodo presidencial 1882-1886— para implantar el SMD en el país, que además buscaron el mejoramiento y la centralización de la educación pública como medidas para fortalecer la educación primaria y la segunda enseñanza.

Figura 1. Retrato de D. Próspero Fernández Oreamuno[1]

El esfuerzo por mejorar la educación da como resultado una reforma educativa liderada por D. Mauro Fernández Acuña (figura 2); se promulgan la “Ley Fundamental de la Instrucción Pública” (1885) y la “Ley General de Educación Común” (1886). A partir de la Reforma, el SMD fue incorporado en el área de aritmética. Con especificidad, en la educación primaria, para primer grado se integra el concepto del metro y este se aprovecha para el estudio de la representación de cantidades decimales; para segundo grado se introduce el tema de pesas y medidas del SMD.

[1] Imagen en https://es.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%B3spero_Fern%C3%A1ndez_Oreamuno

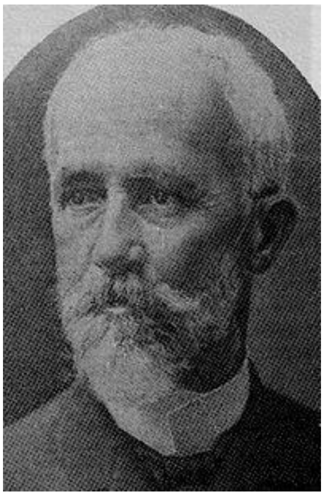


Figura 2. Retrato de D. Mauro Fernández Acuña[2]

Libro 1: Sistema Métrico demostrado según el aparato del método Level

El texto pertenece a D. Manuel Antonio Quirós, fue publicado como primera edición, en 1886, por la Imprenta Nacional de Costa Rica. Corresponde al estilo Cartilla y fue propuesto como guía a los maestros para la enseñanza del SMD a los niños. La figura 3 muestra la portada del texto. Por la relevancia del texto en la época, constituye una de las obras más sobresalientes en el proceso de introducción del SMD en el país, particularmente en el sistema educativo.

Figura 3. Imagen de la portada del texto[3]

En cuanto a su autor, D. Manuel Antonio Quirós, se entiende su dedicación a la traducción de obras literarias. Junto a Austergildo Bejarano realiza, en 1888, la traducción del libro *Geometría Objetiva para uso de las escuelas primarias*, como texto oficial en Costa Rica. En 1908 publicó el libro *Tablas de equivalencia entre el Sistema Métrico y los usados hasta hoy*, obra que fue dedicada al profesor Rodolfo Bertoglio (Barrantes y Ruiz, 1994c).

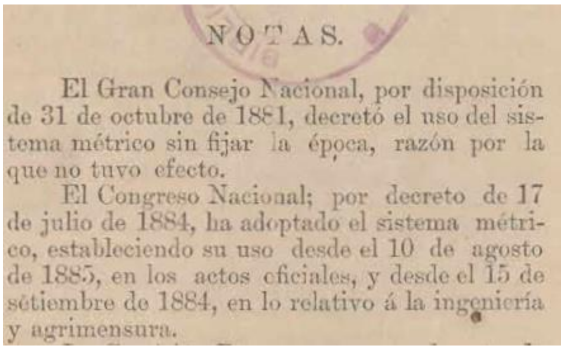
[2] Imagen en https://es.wikipedia.org/wiki/Mauro_Fern%C3%A1ndez_Acu%C3%B1a

[3] https://www.sinabi.go.cr/ver/Biblioteca%20Digital/LIBROS%20COMPLETOS/Level%20J/Sistema%20Metrico.pdf#.X1RsCGdKjlw

La obra *Level*, texto de 58 páginas, se organiza en dos partes. La primera parte se compone de ocho capítulos, en cada uno se exponen diversos problemas relacionados al tema abordado.[4] Esta distribución temática permite la descripción y la explicación del SMD y la presentación de ejemplos que muestran conversiones entre unidades de medida. La segunda parte se titula la Aritmética de G. Ritt; los problemas que aquí se muestran son tomados de la publicación del libro *Nueva aritmética* (1874), que contiene ejercicios y problemas hechos por G. Ritt. En esta sección se muestra una breve explicación de la conversión entre algunas medidas antiguas y las métrico-decimales; por ejemplo, de varas a metros y viceversa, lo mismo para varas cuadradas a metros cuadrados. También se presentan equivalencias de los múltiplos y submúltiplos con respecto a su medida base, esto para las magnitudes de longitud, superficie, capacidad y peso.

Preliminares

Este texto se elaboró exclusivamente para el aprendizaje y la enseñanza del SMD. Sin embargo, carece de una introducción histórica del SMD, de una presentación de conocimientos previos para su aprendizaje y de la exposición de ideas sobre el impacto que socialmente tendría el sistema. Desde una perspectiva legal, el autor se refiere a la legislación en Francia para el establecimiento de un sistema de medidas único, permitido a partir del 1° de enero de 1840. Luego se destacan las directrices legales adoptadas en Costa Rica para la introducción del SMD, como se muestra en la figura 4.


NOTAS.

El Gran Consejo Nacional, por disposición de 31 de octubre de 1881, decretó el uso del sistema métrico sin fijar la época, razón por la que no tuvo efecto.

El Congreso Nacional; por decreto de 17 de julio de 1884, ha adoptado el sistema métrico, estableciendo su uso desde el 10 de agosto de 1885, en los actos oficiales, y desde el 15 de sétiembre de 1884, en lo relativo á la ingeniería y agrimensura.

Figura 4. Directrices legales en Costa Rica para el uso del SMD (p. 37)

Estructura matemática del Sistema Métrico Decimal

El texto inicia con la presentación de un significado para el concepto de medida, que es combinado con el concepto de peso. “Medir o pesar es comparar el tamaño o el peso desconocido de un objeto con una unidad de tamaño o peso tomado por término de comparación” (p. 2). Esta se complementa con la definición de longitud, superficie, volumen, capacidad, peso y moneda.

En la primera parte del texto el autor refiere al SMD como el “Sistema Métrico”, que también es presentado como “sistema legal” o “sistema decimal”. Estas formas de denominarlo se explican desde la relación entre las pesas y medidas y el metro, la unidad única y fundamental, y que los múltiplos de las nuevas medidas se expresan en números de diez, cien, mil, diez mil veces más grandes que la unidad, y los submúltiplos, se obtienen a partir de números que son la décima, centésima, milésima y diezmilésima parte de la unidad (p. 3). En la segunda parte del texto se retoma la definición del sistema de

[4] Los capítulos llevan por título: (1) el Sistema Métrico, (2) Del metro y de las medidas de longitud, (3) De las medidas de superficie, (4) De los cubos, (5) De las medidas de capacidad, (6) Medidas de pesos, (7) Medidas de Volumen y (8) Las monedas.

una forma simple y concisa: “el sistema métrico es el conjunto de las unidades de medida que tiene por base el metro” (p. 30).

Para los múltiplos, se definen cuatro palabras provenientes del griego y que se colocan delante de cada unidad de medida. Estas son: *Deca*, que significa 10 veces, *Hecto* que significa cien veces, *Kilo* que significa mil veces y *Miria* que significa diez mil veces. Por otro lado, para los submúltiplos se exponen las palabras provenientes del latín: *Deci* que significa décimo, *Centi* que significa centésimo y *Mile* que significa milésimo.

En cuanto al metro, este se define como la unidad para las medidas de longitud y “es igual a la diez millonésima parte de la distancia del polo al ecuador, y a la cuarenta millonésima parte de la longitud del meridiano terrestre” (p. 4).

En el texto se adoptan seis clases de medida con su respectiva unidad: longitud, superficie, volumen, capacidad, peso y moneda. Para cada una de ellas el autor detalla los múltiplos y submúltiplos. La presentación de algunas medidas se acompaña de la exposición de otras unidades usadas en situaciones que involucran cantidades grandes, como las medidas agrarias, que forman parte de la medición de superficies y que son utilizadas para medir las superficies de campos, bosques y otras propiedades extensas. Se especifica que su unidad es el área. De manera similar, para el peso se define el quintal métrico, y el millar métrico o tonelada. También se expone la unidad de medida para la leña, como parte de los volúmenes.

El sistema monetario se basa en el franco, presentado como la unidad monetaria, este se acompaña de una lista con las denominaciones y equivalencias para cada tipo de metal. Cabe indicar que no correspondía a la moneda costarricense de la época, sino a la moneda francesa, incluida en el texto original.

La presentación de procedimientos matemáticos, vinculados al SMD, incluye algunos “experimentos” que, con ayuda de instrumentos de medida, contribuirían a la comprensión de las magnitudes y sus unidades de medición y, a su vez, de su relación con el metro. Además, se muestran tablas de equivalencias con los múltiplos y submúltiplos respecto a la unidad básica.

En algunos capítulos se enfatiza la manera de leer fracciones decimales dependiendo de la magnitud. El autor introduce la multiplicación como primera operación aritmética, para el cálculo de una superficie: “1º.– Para determinar en metros cuadrados la extensión de una superficie que tiene 9 metros de largo por 7 de ancho, se multiplica 9 por 7, y el producto 63 expresa que la superficie contiene 63 metros cuadrados” (p. 8). Luego, se presentan las operaciones multiplicación y potencias para el cálculo de superficies y para efectuar equivalencias entre las unidades utilizadas en la época y las del SMD. En el texto solo se explican cuatro conversiones, la primera es la conversión de varas a metros, y viceversa. El procedimiento se repite para la conversión de metros cuadrados a varas cuadradas, y viceversa.

> Para reducir varas á[sic] metros, se multiplica el número de varas por 0,836, así: 98 varas = 0,836 x 98 = 81,928 metros. Para reducir metros a varas, se divide el número de metros por 0,836, así: 300 metros = $\frac{300}{0{,}836} = \frac{300000}{836} = 358{,}85$. (p. 42).

En cuanto a la identificación de sistemas de representación, destacan cuatro modos para la presentación de conceptos vinculados con el SMD; estos son: verbal, numérico, simbólico y tabular. La mayor parte del texto se muestra a través de la representación verbal, con la que se presentan las definiciones y características más relevantes, para el autor, referentes a cada medida del SMD.

> 13.– Se llaman medidas de superficie las que emplean para evaluar la extensión de una superficie cualquiera.
>
> 14.– Evaluar el contenido de una superficie es buscar cuántas veces ella contiene la extensión de un cuadrado tomado por unidad.
>
> 15.– La unidad de las medidas de superficie es el metro cuadrado; se entiende por metro cuadrado una superficie que tiene un metro de largo por un metro de ancho. (p. 7).

Con la representación numérica se muestran las cantidades métricas y equivalencias entre el sistema métrico y las medidas antiguas. También se encuentra en la explicación de algunos cálculos como conversiones "…98 varas = 0,836 × 98 = 81,928 metros" (p. 42). La simbología se usa en la representación de las abreviaciones de las unidades métricas, por ejemplo, el metro se representa con la letra m, el hectómetro con hm, etc. Y, la utilización de tablas se muestra mayormente para la presentación de los múltiplos y submúltiplos. También se utilizan para la representación abreviada de cada unidad.

El énfasis en cuanto a la utilidad del SMD se identifica en cuatro tipos de fenómenos, particularizados en cuatro situaciones: natural, matemática, comercial y técnica. La situación natural se distingue en la exposición de una situación física de la naturaleza, como es la temperatura, en la sección del peso: "es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada, tomada en su maximun de densidad a la temperatura de cuatro grados un décimo (4º,1) …" (p. 18). Las situaciones matemáticas se presentan en un contexto de una o varias operaciones aritméticas.

> b.1. Aplicación de operaciones: "Para reducir varas cuadradas á[sic] metros cuadrados, se eleva al cuadrado 0,836 y se multiplica por el número de varas, así 163=0.8362x163=0,698896x163=113,92 metros cuadrados." (p. 42).
>
> b.2. Aplicación de fórmulas: "Sea evaluar en metros cúbicos una piedra que tiene 14 metros de largo por 3 de ancho y 2 metros de altura; es suficiente multiplicar estos tres números entre sí, y se obtiene el producto de 84 metros cúbicos." (p. 13).

Comercialmente, este tipo de situación se identifica hasta el final del texto, en los ejercicios adicionales propuestos por el autor. Por ejemplo, "si el hectólitro de trigo de primera calidad vale $3,65, cuanto habrá que pagar por 36 hectólitros?" (p. 56).

La situación técnica se evidencia cuando se destaca la utilidad del hectómetro y del kilómetro para evaluar distancias geográficas y para medir caminos (p. 6). Además, se dan ejemplos de cómo medir la superficie de terrenos.

> Para evaluar la extensión de un campo que tenga un hectómetro y 3 décimos de largo por 9 decámetros y 8 metros de ancho, se reduce el largo dado a metros: sean 130 metros; se hace otro tanto con el ancho, lo que da 98 metros; después multiplicando 130 metros por 98, se obtiene por producto 12740 metros cuadrados … (p. 10).

Especificidades didácticas sobre el Sistema Métrico Decimal

A partir de los planteamientos del autor, se identifican los fines político y formativo en la elaboración del libro de texto. El texto promueve la memorización de información, aunque también la comprensión de conceptos y procedimientos asociados al SMD.

El autor inicia con una lista de materiales e instrumentos necesarios para las demostraciones que el maestro tiene que ejecutar en el desarrollo de algunos capítulos; esto responde a uno de los objetivos planteados para la elaboración del texto: "destinado como guía para dirigir al Maestro" (p. 1). Aunado a lo anterior, el autor expone una explicación sobre lo que tiene que hacer el maestro en el aula para la demostración y comprensión de cada medida con los alumnos, y omite referirse a alguna dificultad para el aprendizaje del SMD, pero sí expone un posible error que se puede cometer en el uso de dicho sistema, al presentar las medidas de superficie:

> No se debe confundir 3 decímetros cuadrados, por ejemplo, con un cuadrado de 3 decímetros: porque por 3 decímetros cuadrados se entiende 3 cuadrados conteniendo cada uno un decímetro de lado; mientras que un cuadrado de 3 decímetros indica un solo cuadrado teniendo 3 decímetros de lado, y que vale, por consiguiente, 9 decímetros cuadrados. (p. 9).

Desde el inicio, el autor enfatiza el manejo de los múltiplos y submúltiplos del metro y es aquí donde recomienda la repetición de ejercicios sobre conversiones, ya sea "subiendo" a un múltiplo y "descendiendo" a un submúltiplo, hasta que haya un manejo seguro por parte del alumno; esto con el fin de una mejor comprensión para las explicaciones de los siguientes capítulos.

En el texto se sugiere la utilización de varios instrumentos de medición para la noción de los conceptos de las medidas que componen el SMD. Por ejemplo, se menciona la Balanza Roberval, un metro que se doble (también conocido como metro de carpintero que consta de 5 piezas avisagradas cada una de 20 cm) y de un decímetro, esto con el fin de realizar ejercicios con los alumnos donde se utilicen estos instrumentos para obtener un mejor entendimiento de las medidas. El autor afirma que "el hábito de mirar este instrumento [el metro] y el de tocarlo, es una enseñanza más eficaz que todas las explicaciones orales" (p. 6).

Para fortalecer el aprendizaje del SMD, expuesto en la primera parte del texto, el autor presenta una diversidad de tareas (ejemplos) para reforzar el contenido expuesto. En la segunda parte aparecen varios ejemplos para la lectura de números métricos y, seguidamente, se da una serie de ejercicios y problemas para poner en práctica lo relacionado sobre el SMD.

También, para una compresión clara del metro como unidad de medida, se incluyen varias demostraciones con ayuda de algunos instrumentos que ejecuta el maestro con los alumnos para la introducción y comprensión de cada una de las medidas del sistema.

> El profesor mostrará á[sic] los discípulos el vaso A, lo medirá él mismo, ó[sic] lo hará medir por uno de los discípulos; y como se ha visto ya que este vaso tiene interiormente un decímetro de largo, un decímetro de ancho y un decímetro de altura, todos comprenderán que este vaso es un litro. Se hace ver en seguida el vaso B, cuya base es igual á[sic] la del vaso A, … (p. 15).

Esto muestra que el autor opta por una clase donde el propio alumno cumple un rol más activo, ya que va construyendo con demostraciones y cuestionamientos una idea para cada una de las medidas del SMD. En otras ocasiones se plantean cuestionamientos que el maestro dirigirá al alumno, para que este conteste antes de continuar con la explicación.

> Se hace ver a los discípulos el vaso D lleno de agua y se pregunta: ¿Cuánto pesa el líquido contenido en este vaso? La respuesta es fácil: Este líquido pesa un gramo, puesto que este vaso es el centímetro cúbico. Se pregunta luego: ¿Qué fracción decimal del litro es esta misma cantidad de agua? (p. 19).

Libro 2: Manual del maestro: curso elemental de aritmética arreglado de acuerdo con los programas oficiales

El texto pertenece a D. Félix Francisco Noriega; fue publicado como primera edición en 1897 por la Imprenta Comercial de San José en Costa Rica (figura 5). El texto se compone de 195 páginas, corresponde al estilo Manual y se describe como un recurso para el maestro dirigido para los primeros cuatro años de la educación primaria. El texto resalta el nivel al que va dirigido su contenido y la actividad didáctica sugerida al maestro, características propias de un manual (Picado, 2009). En su contenido se le indica al maestro la manera de abordar cada tema, con preguntas a los estudiantes, y los respectivos ejemplos. Está organizado por año escolar, que va desde el primer año hasta el cuarto año. El texto fue adecuado con respecto a los programas de matemáticas de la época. Cabe mencionar que a partir del segundo año se empiezan a dar las nociones sobre el SMD, con la definición del metro. A partir de ahí, en cada año se profundiza en el tema.

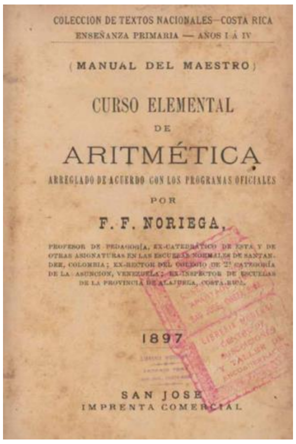


Figura 5. Portada del texto[5]

D. Félix Francisco Noriega fue profesor de pedagogía y catedrático de varias asignaturas en las escuelas normales en Santander, Colombia. También laboró como Rector en Venezuela en el colegio de segunda categoría de la Asunción. En Costa Rica, fue Inspector de las escuelas de la provincia de Alajuela. Para 1904 publicó un libro llamado *Diccionario Geográfico de Costa Rica*, luego publicó una edición ampliada en 1910 del *Curso elemental de la Aritmética*, que tituló *Tratado Elemental de Aritmética*.

Preliminares

El libro de texto sigue los programas oficiales de matemáticas de la época. Introduce el SMD hasta el segundo año, donde se presentan algunos conceptos previos para el estudiante. El texto presenta una introducción histórica que destaca el momento y lugar de los orígenes del metro. Por otra parte, se omite cualquier mención sobre las normas legales en el país —o fuera de este— en cuanto al uso del sistema, así como también sobre el impacto social del sistema.

Estructura matemática del Sistema Métrico Decimal

Debido a que el libro de texto inicia con la enseñanza de la aritmética desde el primer año de la escuela primaria, es notorio el abordaje de varios conceptos matemáticos básicos antes de la exposición del sistema métrico. Las definiciones de unidad, cantidad y número están directamente relacionadas y se definen en conjunto, al inicio del primer capítulo. La unidad se presenta como un solo objeto; y la reunión de varios objetos definen cantidades que, dependiendo de la cantidad específica, se relacionan con un número que

---

[5] http://www.sinabi.go.cr/ver/Biblioteca%20Digital/LIBROS%20COMPLETOS/Noriega%20Felix%20Francisco/Curso%20elemental%20de%20aritmetica.pdf#.X1RuOWdKjlw

las representa. El número fraccionario se presenta como la división de varias partes de un objeto: “Divídanse otras manzanas u objetos sucesivamente en tres, cuatro, seis, etc… Estas partes o fracciones de objetos, se llaman números fraccionarios o quebrados, porque no representa sino partes de la unidad” (p. 140). En cuarto año se definen las fracciones decimales mediante el valor de la moneda, por ejemplo, con un peso que se divide en diez décimos o cien centésimos o mil milésimos. Sobre el concepto de magnitud no se encontró una definición.

Inicialmente se expone la noción de longitud, latitud y altura, luego se propone mostrar otros objetos de diferentes tamaños para reforzar los conceptos mencionados y así introducir el concepto de medida. Esto por medio de la comparación entre longitud y latitud —entendida como el ancho— del salón de clase, utilizando un prototipo de metro sucesivamente tantas veces sea posible. Una vez que se han explicado estos conceptos, se refiere al metro como sigue:

> Un objeto que los hombres no pudieran variar, de modo para que la medida fuera invariable, por lo cual se tomó la circunferencia de la tierra, o bien la cuarta parte de ella, es decir la distancia del ecuador al polo. (p. 109).

Se especifica que el metro es especialmente para la mensura de las líneas rectas, curvas o mixtas. Sus múltiplos —del metro— se presentan con referencia a los prefijos deca, hecto, kilo y miria, provenientes de la lengua griega. Se indica que a cada prefijo se le agrega la palabra metro para su formación. En cuanto a los submúltiplos, primero se hace la comparación de un objeto (un libro) con el metro y se visualiza que este es menor que el metro; con esto se justifica la necesidad de medidas más pequeñas. Se presenta el decímetro como una décima parte del metro, el centímetro como la centésima parte del metro y el milímetro como la milésima parte del metro. Aparte de la definición de metro, como unidad de medida para las longitudes, también se presenta la de metro cuadrado como unidad para la medición de superficies, el gramo para las medidas de peso, el área para la medición de campos y el litro para la capacidad. Junto a la presentación de estos conceptos, se exponen las operaciones de adición y sustracción para la resolución de problemas utilizando “números métricos”. La figura 6 muestra un ejemplo sobre la adición.

Adición.

—Cuál es en metros la suma de 7 Mm, 125 cm, 2 Km, 6 Dm, 5 dm y 521 m ?

Resolución:

7 miriámetros	=	70,000	metros
125 centímetros	=	1.25	„
2 kilómetros	=	2,000.00	„
6 decámetros	=	60.00	„
5 decímetros	=	0.50	„
521 metros	=	521.00	„
		72,582.75	.

Figura 6. Suma de números métricos (p. 118)

También se presentan procedimientos para la conversión de las varas a metros y viceversa: “para reducir metros a varas se multiplica por mil el número de varas y se divide por 836; y al contrario, para reducir varas a metros, se multiplica por 836 y se divide por 1000” (p. 190).

En el texto se muestra una variedad de representaciones para la explicación y la definición de conceptos vinculados al SMD. Se encontraron seis tipos. La representación verbal es la que más se encuentra en el libro de texto; al inicio de un tema o para la definición de un concepto nuevo, su introducción se realiza de manera textual, al igual que las sugerencias o comentarios dirigidos al maestro.

> El maestro ejercitará repetidamente a los niños sobre las tres dimensiones, sirviéndose de diferentes objetos y teniendo cuidado de indicarles que tratándose de un libro, por ejemplo, se dice grueso en lugar de altura; y se dirá profundidad, si se trata de una cisterna… (p. 109)

La exposición de números métricos, la suma o sustracción de una misma magnitud incluye el uso de representaciones numéricas. Además, este tipo de representación contribuye en la exposición de las equivalencias del sistema antiguo a las medidas del sistema métrico.

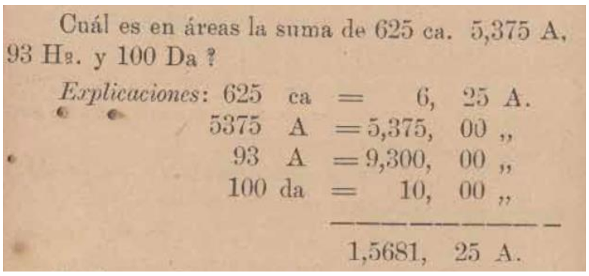
A pesar de que se introducen sumas y restas entre números métricos, la simbología algebraica no se llega a utilizar de manera significativa; solo se encontró el uso de símbolos para la operación multiplicación (×), al momento de exponer el valor de la unidad base respecto a sus múltiplos en las unidades cúbicas, así como en algunas conversiones de medidas antiguas al SMD. También, se reconoce la simbología que representa las abreviaturas de los múltiplos y submúltiplos de las diferentes unidades del sistema, como la del metro.

Las tablas, como sistemas de representación, se utilizan generalmente para organizar los múltiplos y submúltiplos de las unidades básicas en diferentes magnitudes, con su respectivo valor según la unidad base. El uso de elementos ilustrativos se identifica en la exposición de “repasos” sobre cantidades y sus respectivos símbolos numéricos: se presentan cuadros con figuras (puntos) y números que representan ciertas cantidades. Este tipo de representación se repite al exponer la composición y descomposición de los números.

La utilidad de las unidades métrico-decimales se muestra a partir de dos tipos de situaciones. En la definición del peso se refiere a situaciones naturales, que abordan elementos de la naturaleza (la temperatura) vinculados al peso de algún objeto.

> … el agua se dilata á[sic] causa del calor, como puede observarse en una vasija que la contenga puesta al fuego, y entonces el mismo volumen pesa menos, ha sido necesario atender a su grado de calor o sea a su temperatura, y se ha convenido en que esa temperatura sea la de la nieve en fusión, por encontrarse entonces el agua en su máximo de condensación. (p. 159).

También, se reconoce la presencia de situaciones matemáticas, basadas en la aplicación de operaciones aritméticas y el uso de fórmulas. En cuanto a la aplicación de operaciones, esta se reconoce, por ejemplo, en la suma o resta de medidas lineales, áreas y peso, donde primeramente se realiza la conversión a la unidad respectiva (ver figura 7). La aplicación de fórmulas matemáticas se presenta al calcular el área de una figura regular plana; por ejemplo, el autor indica: “para hallar el valor del área o superficie de un rectángulo, se multiplica la longitud por la latitud.” (p. 124).


Cuál es en áreas la suma de 625 ca. 5,375 A, 93 Ha. y 100 Da ?

Explicaciones: 625 ca = 6, 25 A.
5375 A = 5,375, 00 ,,
93 A = 9,300, 00 ,,
100 da = 10, 00 ,,

1,5681, 25 A.

Figura 7. Suma de números métricos con áreas (p. 180)

Especificidades didácticas sobre el Sistema Métrico Decimal

El libro de texto conduce a la identificación de un fin formativo: el texto se dirige a procesos propios de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, para la elaboración de la obra, el autor sigue el principio del aforismo pedagógico: "todo en la educación debe ir de lo simple a lo compuesto, de lo fácil a lo complicado, etc." (p. 16). Por ejemplo, se enseña a escribir primero el 1 y luego el 4, por tener una composición sencilla y similar. Como se ha indicado, el texto está dirigido a la enseñanza de la aritmética para los primeros cuatro años de Educación Primaria, fundamentado y adecuado según los programas oficiales del país en la época. Esto con el propósito de estandarizar y nivelar la enseñanza de la aritmética en la educación en todo el país, que justifica su utilidad como una guía para los maestros.

En el texto no se destacan errores que se puedan cometer al operar con el SMD. El autor recomienda suspender la enseñanza de multiplicaciones y divisiones en la resolución de problemas con las unidades métricas de longitud, debido a que el estudiante tiene que conocer fracciones decimales. De esto se interpreta la previsión de posibles dificultades asociadas a las mediciones lineales y a la conversión entre unidades.

Para la enseñanza del metro y el peso, se propone al maestro tomar en cuenta el contexto en el que estos están envueltos, de manera que se fomente una mayor comprensión e interpretación por parte del estudiante. Como ejemplo, se toma el salón de clase para conocer la longitud de este con ayuda de un metro, o en el caso del peso se toman diferentes objetos para compararlos.

En cada tema, se incluye un cuestionario a los estudiantes sobre el tema explicado en lecciones anteriores, de manera que se realice un "repaso" de lo abordado en lecciones anteriores. Las tareas que abordan el SMD proponen una variedad de preguntas con el fin de establecer definiciones y relaciones sobre los múltiplos y submúltiplos de las diferentes magnitudes, e incentivar la escritura de los números métricos. También, el autor sugiere que se agreguen más ejercicios similares a los expuestos en el libro de texto. En cuanto a los recursos y materiales mostrados para el abordaje del SMD, se menciona la regla, cuerda y el metro para la realización de ciertos ejercicios. Una vez que finaliza la exposición de cada tema, se sugiere al maestro realizar una serie de preguntas a los estudiantes para valorar si hubo un aprendizaje correcto; de lo contrario —indica el autor— se debe repetir el cuestionario hasta que este considere que hay un dominio claro sobre el tema. Esto se debe a la base en el método socrático identificada en el texto, donde el desarrollo de la enseñanza tiene como principios la claridad, el orden y una buena condición de las preguntas.

CONSIDERACIONES FINALES

Desde 1881, en el ámbito político costarricense, se dieron presiones para hacer un cambio con respecto al sistema de medidas utilizado en el país. Estas recomendaciones rindieron frutos en 1884 cuando se deja atrás el sistema castellano de pesas y medidas y se implanta el SMD como sistema oficial de medidas. En consonancia con las estrategias políticas para la implantación del sistema en otros países (Picado, 2012), su incorporación a la sociedad costarricense impactó directamente la educación. La Reforma educativa liderada por D. Mauro Fernández Acuña provoca una serie de cambios en la educación matemática, que incluyen la incorporación del SMD en la enseñanza de la aritmética para las nuevas generaciones, con esto se fomentó el cambio metrológico y se aseguró el uso del nuevo sistema de medidas en los más jóvenes.

Las estrategias gubernamentales no solo se dirigieron al ámbito educativo, sino también al entorno social, de manera que las personas iletradas y aquellas formadas en el sistema educativo, en periodos previos a la incorporación del SMD, se familiarizaran con estas pesas y medidas para paliar el impacto de su aplicación en el comercio, donde se tendría afectaciones con los cambios en las unidades de medida. Las acciones efectuadas por el gobierno de la época fueron importantes, así como los medios para su alcance como la apertura de escuelas nocturnas para adultos y la distribución de material impreso; estas se visualizaron para disminuir las incidencias negativas del cambio metrológico en otros contextos aparte del educativo.

En cuanto al material impreso, debe reconocerse que los libros de texto constituyeron un recurso importante para propagar la enseñanza y el aprendizaje del SMD en Costa Rica. Sin duda, los libros de texto antiguos de matemáticas son un recurso que brinda una variedad de estrategias y técnicas diversas al docente, que pueden implementarse no solo en la enseñanza del SMD, sino también en otros temas de las matemáticas.

La formación matemática de maestros se vio impactada con la adopción del SMD. Los cambios en cuanto al contenido matemático y didáctico son evidentes en los libros de texto analizados; en estos se reconocen distintas conexiones entre la aritmética tradicional —la expuesta a los maestros en formación hasta ese momento— y los nuevos conceptos “métrico decimales”, al igual que una variación metodológica basada en estrategias didácticas para la enseñanza del sistema, que los maestros debían conocer y aplicar.

Con especificidad, los textos analizados se diferencian en cuanto a la presentación de datos sobre el origen del SMD. Solo el texto de Noriega (1897) expone las iniciativas dadas en Francia que impulsaron la creación de un sistema único, natural e invariable, que tomara como unidad fundamental al metro. Además, en la obra *Level* se echa en falta información sobre los conocimientos previos necesarios para el abordaje del SMD. Quizás, esto se debe a que el texto corresponde a una traducción del texto al castellano o a la urgencia por mostrar la estructura y nomenclatura del nuevo sistema, más que su vínculo con las matemáticas. Esta particularidad es distinta en el texto de Noriega (1897), donde se señalan especificaciones para los maestros que acentúan el conocimiento que los niños deben tener antes de aprender el SMD. De esto se interpreta que, después de un primer momento de instrucción sobre el SMD se identificaron cuáles conceptos eran necesarios y cuál debía ser el nivel educativo adecuado para el aprendizaje del SMD.

La exposición de directrices legales para la introducción del SMD en Costa Rica, están presentes en la obra *Level* (1886). Estas disposiciones legales recalcan la “Ley del Sistema Métrico Decimal” (1884). Cabe considerar, por otra parte, que la ausencia de este tipo de información legal en el texto de 1897 se deba a un interés, en los primeros años de la implantación del sistema, por el aprendizaje de la terminología métrico-decimal y de los procedimientos para el cambio entre unidades de medida (conversiones). En relación a esta idea, siendo la diversidad de unidades de medida y las dificultades que esta acarreaba en la actividad comercial algunas de las razones para la adopción del sistema, resulta curioso que en estos textos no insistieran en los beneficios de una unificación metrológica.

Conceptualmente, los libros de texto analizados muestran una similitud en su estructura. Por ejemplo, para la definición del metro se mantiene su origen científico, sin especificar en una perspectiva instrumental; los múltiplos y submúltiplos se introducen a partir de los prefijos griegos y latinos con su respectivo significado, para luego continuar con la definición de cada unidad de medida que compone el sistema. Los conceptos de unidad, cantidad, magnitud y número generalmente son abordados al inicio de los textos, es decir antes de presentar el SMD, a excepción del texto traducido por D. Manuel Antonio Quirós (1886), una excepción que puede justificarse por el propósito del libro: dedicado totalmente al aprendizaje del SMD delegando al lector el conocimiento previo de varios conceptos —incluidos los mencionados—. Por su parte, en el texto de 1897 se abordan varios temas de aritmética de manera preliminar.

Los conceptos y procedimientos para el aprendizaje y manejo del SMD y las sugerencias al maestro para su enseñanza en el aula se hicieron presentes en los textos —principalmente— a través de la prosa, es decir, con representación verbal. Por otra parte, la organización tabular de la información constituye una representación notable, reconocible en los textos, para la representación y enseñanza de los múltiplos y submúltiplos de cada unidad de medida del SMD.

La exposición de situaciones comerciales sobresale en el texto de los primeros años de implantación del SMD. Esto refuerza y está acorde con su intencionalidad sobre el uso del sistema en actividades mercantiles, para la producción, compra y venta de productos, logrando que el maestro tuviera un amplio panorama de situaciones comunes que se daban en la época; los textos no abordan con especificidad situaciones vinculadas a los contextos científicos y sociales. Las operaciones que mayormente se destacan promueven las conversiones entre unidades de medida del sistema viejo al SMD, al igual que pasar de múltiplos a submúltiplos de alguna unidad básica, para las diferentes magnitudes. Una actividad cercana a los intercambios comerciales.

Los textos tienen en común estar destinados a ser un manual (una guía) para el maestro. De esta manera se procuraba la estandarización del SMD en la educación costarricense. Además, el propósito de los textos resalta la necesidad de ampliar el conocimiento que tenían, o no, los ciudadanos sobre el SMD, destacando su utilidad por encima de la novedad del sistema en la metrología del país.

Dentro de este orden de ideas, se reconoce la exposición de recomendaciones con la intención de evitar alguna dificultad en el aprendizaje del SMD. Particularmente, el primer texto pretende una comprensión adecuada de las magnitudes, destaca la necesidad de diferenciar entre la unidad de medida de superficie y la de longitud; por su parte, en el segundo libro de texto la recomendación sugiere un orden conceptual al enseñar el SMD, acentuando la enseñanza de las fracciones decimales como un conocimiento preliminar a la resolución de problemas con unidades métrico-decimales.

La presentación de tareas se basa en la exposición de ejemplos y ejercicios para desarrollar con los alumnos en el aula. Aquí es relevante la cantidad de ejercicios propuestos en los textos. Esto sustenta que, al momento de la introducción del SMD, había un mayor interés por la rápida compresión de este, mediante la práctica reiterada, reforzando los conceptos con bastantes ejercicios. Mayormente, las tareas propuestas en los textos se orientan a la conversión entre las medidas antiguas y las del SMD. Estas conversiones son reforzadas con las equivalencias entre el sistema antiguo y el SMD, propio de la transición del “sistema viejo” al SMD.

Previo a la fundación de la Escuela Normal, hay una similitud en los libros de texto: exponen instrucciones a los maestros para el desarrollo de la clase, con demostraciones para la comprensión de las unidades del sistema. Por ejemplo, con la longitud, se sugiere utilizar las dimensiones del aula y otros objetos que se encuentran alrededor, y el uso de un instrumento de medición. Esto puede estar directamente relacionado con la reciente introducción del sistema al país y el poco conocimiento sobre la composición de este.

Asimismo, puede establecerse un vínculo con la falta de maestros en la época, que condujo a la inclusión de una exposición detallada de estrategias de enseñanza para la persona que tomara el rol de maestro, de manera que se facilitara el proceso de enseñanza.

RECONOCIMIENTO

El estudio forma parte del proyecto SIA0134-16, desarrollado en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, Costa Rica.

REFERENCIAS

Amaral, A., Ralha, E. y Gomes, A. (2011). The historical approach of the fundamental concept of measurement in Portuguese mathematics textbooks for 5th and 6th grades. En E. Barbin, M. Kronfellner y C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Sixth European Summer University – History and Epistemology in Mathematics Education* [CD-ROM] (pp. 259-270). Vienna, Austria.

Aznar, J. V. (1997). *La unificación de los pesos y medidas en España durante el siglo XIX* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valencia, España.

Barrantes, H. y Ruiz, A. (1994a). La Reforma de Mauro Fernández y las Matemáticas. En A. Ruiz (Ed.), *Historia de las matemáticas en Costa Rica. Una introducción* (pp. 35-42). San José, Costa Rica: EUCR.

Barrantes, H. y Ruiz, A. (1994b). Los programas de Matemáticas en la enseñanza de primaria y secundaria costarricense entre 1886 y 1940. En A. Ruiz (Ed.), *Historia de las matemáticas en Costa Rica. Una introducción* (pp. 43-59). San José, Costa Rica: EUCR.

Barrantes, H. y Ruiz, A. (1994c). La Escuela Normal, los colegios y las matemáticas hasta la creación de la Universidad de Costa Rica. En A. Ruiz (Ed.), *Historia de las matemáticas en Costa Rica. Una introducción* (pp. 60-69). San José, Costa Rica: EUCR.

Basas, M. (1962). *Introducción en España del Sistema Métrico Decimal.* Milán, Italia: Dott. A. Giuffrè.

Carvajal, V. y Ruiz, S. (2016). Escuela Normal de Costa Rica: Historia y Legado. *Revista Electrónica Educare*, *20*(1), 1-18. Recuperado de https://www.scielo.sa.cr/pdf/ree/v20n1/1409-4258-ree-20-01-00433.pdf

Centro Español de Metrología (2011). *Breve Historia de la Metrología*. Madrid, España: CEM. Recuperado de https://www.cem.es/sites/default/files/files/breve%20historia_de%20la%20metrologia_doc.pdf

Débarbat, S. y Quinn, T. (2018). Les origines du système métrique en France et la Convention du mètre de 1875, qui a ouvert la voie au Système international d'unités et à sa révision de 2018. *Comptes Rendus Physique 29*. 6-21. DOI: https://doi.org/10.1016/j.crhy.2018.12.002

Decreto No. 1 que reorganiza la Segunda Enseñanza y los Estudios Normales (1892). San José, Costa Rica: Tipografía Nacional.

Dhombres, J. (1993). Résistances et adaptation du monde paysan au système métrique issu de la Révolution: les indices d'évolution d'une culture de la quantification. En A. Croix y J. Quéniart (Eds.), *La culture paysanne(1750-1830)* (pp. 427-439). Université Rennes, Francia. Recuperado de https://www.persee.fr/doc/abpo_0399-0826_1993_num_100_4_3492

Díaz, A., Elórtegui, N., Fernández, T., Góngora, J., Rodríguez, J. y Moreno, T. (1990). *Sistema Métrico cumple 200 años*. España: Grupo Blas Cabrera Felipe.

Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas "compañías". *Relime*, *2*(3), 19-29. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/9591/1/Gomez1999Tendencias.pdf

Kula, W. (1980). *Las medidas y los hombres* (W. Kuss, Trad.). Madrid, España: Siglo XXI.

Level, J. (1886). *Sistema Métrico demostrado según el aparato del método Level* (Trad. de M. Quirós). San José, Costa Rica: Imprenta Nacional. Recuperado de https://www.sinabi.go.cr/ver/Biblioteca%20Digital/LIBROS%20COMPLETOS/Level%20J/Sistema%20Metrico.pdf#.X1RsCGdKjlw

Ley General de Educación Común. Reglamento de la misma. Decreto sobre Empréstito Escolar (1886). San José, Costa Rica: Tipografía Nacional.

Martínez, B. (2016). *Cronología de la Educación Costarricense.* San José, Costa Rica: Imprenta Nacional.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX* (Tesis doctoral). Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Medidas y pesas del Sistema Métrico y tablas de equivalencias con las antiguas (1885). San José, Costa Rica: Imprenta Nacional.

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de Estudio Matemática*. San José, Costa Rica: MEP.

Noriega, F. (1897). *Manual del maestro: curso elemental de aritmética arreglado de acuerdo con los programas oficiales*. San José, Costa Rica: Imprenta Nacional. Recuperado de http://www.sinabi.go.cr/ver/Biblioteca%20Digital/LIBROS%20COMPLETOS/Noriega%20Felix%20Francisco/Curso%20elemental%20de%20aritmetica.pdf#.X1RuOWdKjlw

Pachón, R. y Manzano F. (2002). Metrología en las civilizaciones de Mesopotamia, Egipto, Israel, Grecia, Cartago, Roma y otras culturas de la antigüedad. En F. Fadón y A. Badiola (Eds.), *XIV Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica*. Santander, España: INGEGRAF.

Picado, M. (2009). *Tratamiento del Sistema Métrico Decimal en textos de matemáticas en España en el período 1849-11892*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Picado, M. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)* (Tesis doctoral). Granada, España: Universidad de Granada.

Picado-Alfaro, M. y Espinoza-González, J. (2020). Las sugerencias didácticas en un libro de texto de aritmética para la formación de maestros en las secciones normales de Costa Rica en el siglo XIX. *Historia y Memoria de la Educación 11*, 151-190. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7287121

Quesada, J. (2005a). *Un siglo de Educación costarricense: 1814 - 1914*. San José, Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Quesada, J. (2005b). *Estado y Educación costarricense*. San José, Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Rodríguez, P. y Ruiz, A. (1994). Antes de la Reforma de Mauro Fernández. En A. Ruiz (Ed.), *Historia de las matemáticas en Costa Rica. Una introducción* (pp. 22-34). San José, Costa Rica: EUCR.

Rojas, F. (1937). *Elementos de Aritmética Razonada*. San José, Costa Rica: Imprenta Lehman.

Ruiz, A. y Barrantes, H. (2000). La reforma liberal y las matemáticas en la Costa Rica del siglo XX. *Revista Llull*, *23*(46), 145-171. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/62244.pdf

Solano, D. y Ruiz, A. (1994). El Dr. Bernardo Alfaro Sagot y las matemáticas. En A. Ruiz (Ed.), *Historia de las matemáticas en Costa Rica. Una introducción* (pp. 167-170). San José, Costa Rica: EUCR.

Ten, A. (1989). El sistema métrico decimal y España. *Arbor*, (527/528), 101-121.

Zuin, E. (2007). *Por uma nova Arithmetica: o sistema métrico decimal como um saber escolar no Portugal e no Brasil Oitocentistas* (Tesis doctoral no publicada). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Zumbado, M. (2013). Sistema Métrico Decimal: La historia del surgimiento del metro. En H. Barrantes (Ed.), *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (pp. 3-12). San José, Costa Rica: Ministerio de Educación Pública.

Andrey, Barrantes-Hernández
Universidad Nacional, Costa Rica
barrantesandrey@gmail.com

Miguel, Picado-Alfaro
Universidad Nacional, Costa Rica
miguel.picado.alfaro@una.cr

Matos, J.M. y Almeida, M.C. (2021). Evaluating modern mathematics curricula. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 4*(1), 57-72

ISSN: 2603-9982

EVALUATING MODERN MATHEMATICS CURRICULA

José Manuel Matos, Universidade Nova de Lisboa, Portugal

Mária Cristina Almeida, CICS.NOVA - Interdisciplinary Center of Social Sciences, Portugal

Abstract

This article intends to understand the degree in which expectations about the modern mathematics reform were fulfilled. Focusing on the Portuguese case, we probed four quantitative studies developed by governmental institutions at the time of the reform, usually intended to evaluate its implementation at several grade levels. Re-appreciated in modern times, these studies provided us with insights about the reform. More specifically, following Gimeno's distinction among several curricular levels, the contemporary inspection of those studies allowed us to have an insight of the curriculum presented to teachers, the curriculum modelled by them, and the attained curriculum at the time of the reform.

Keywords: *history of mathematics education, modern mathematics reform, curricular studies, meta studies*

Evaluación del currículo de matemáticas modernas

Resumen

Este artículo pretende comprender el grado en que se cumplieron las expectativas sobre la reforma matemática moderna. Centrándonos en el caso portugués, examinamos cuatro estudios cuantitativos desarrollados por instituciones gubernamentales en el momento de la reforma, generalmente destinados a evaluar su implementación en varios niveles de grado. Reconocidos en los tiempos modernos, estos estudios nos proporcionaron ideas sobre la reforma. Más específicamente, siguiendo la distinción de Gimeno entre varios niveles curriculares, la investigación contemporánea de esos estudios nos permitió tener una idea del currículum presentado a los maestros, el currículo modelado por ellos y el currículo alcanzado en el momento de la reforma.

Palabras clave*: historia de la educación matemática, reforma matemática moderna, estudios curriculares, meta estudios*

Recibido: 15/01/2021; Aceptado: 19/03/2021

INTRODUCTION[1]

We can date from the 1950s the beginning of the reform of Modern Mathematics. Born out of the need to recompose programs, adapting them to new content and methods that economic development and the political situation demanded from the post-war period, the reform took place in all levels of education from primary to higher education in most countries of the world. In Portugal, new ideas circulated from the end of the 1950s until the end of the 1980s. From the mid-1970s onwards, other curriculum options were developed internationally and reform was declining (Furinghetti, Matos, & Menghini, 2013).

The reform created high expectations for the improvement of mathematics learning. According to the reformers, it was well adjusted to recent psychological findings, guarantying shorter learning times and, as it was closer to up-to-date mathematical research, it would facilitate de formation of highly skilled technicians (mathematicians, physicists, engineers, etc.) needed, either for an improved development of the society, or to ensure advantages in economical or military competition.

It is the purpose of this article to understand the degree in which these expectations were fulfilled. Focusing on the Portuguese case, we probed four quantitative studies developed by governmental institutions at the time of the reform, usually intended to evaluate its implementation at several grade levels. Re-appreciated in modern times, these studies provided us with insights about the reform. More specifically, following Gimeno's distinction among several curricular levels (2000), the contemporary inspection of those studies allowed us to have an insight of the curriculum presented to teachers, the curriculum modelled by them, and the attained curriculum at the time of the reform.

From the 1960s until the 1980s decades, the Portuguese school system begun with the mandatory primary school (grades 1-4). Those that wanted to continue school should choose between the technical schools or the l*iceus*. Technical schools started with a preparatory cycle (grades 5-6) followed by courses for specific professions. The course of *liceus* was divided into three cycles (grades 5-6, 7-9, 10-11). From 1968, the mandatory Preparatory Cycle for Secondary Education (CPES) unified the first two cycles of technical schools and *liceus*. From 1975, the courses of *liceus* and technical schools were gradually unified into a "secondary" course and, from 1977, this course was extended and a 12th grade was created.

This text addresses three sub-systems where the new curriculum was evaluated. Firstly, we used a report elaborated in 1969 about an experiment on the last two years of secondary schools. Despite its limitations, this document, which was never published and became available to us in 2014, allowed us to examine the curriculum presented to teachers and the curriculum modelled by them. Secondly, we used two studies focused on CPES, an unpublished report about the results of 6th graders in a national exam of 1972 and a published inquiry about curricular effectiveness in 1986, that gave us insights about the curriculum modelled by teachers and the accomplished curriculum. Thirdly, we compiled the results of several published studies intending to evaluate mathematical teaching and learning in the late 1970s of grades 7 through 9 and discuss both the curriculum presented to teachers and the accomplished curriculum.

[1] This work was supported by the Portuguese FCT - Foundation for Science and Technology, I.P., within the scope of the project «UIDB / 04647/2020» of CICS.NOVA – Interdisciplinary Centre of Social Sciences.

THE SEBASTIÃO E SILVA EXPERIMENT

In Portugal, since 1963, a well-known pedagogical experience of modern mathematics took place in the last cycle of *liceus*, under the leadership of a Commission chaired by José Sebastião e Silva (Almeida, 2013). With the support of the Organization for Economic Cooperation and Development, the project began with three pilot classes composed of students with high performance in mathematics. The number of classes involved was gradually increased.

In 1968 Manuel Sousa Ventura, a mathematics teacher of *liceus*, then working at the Ministry of Education, was assigned to write an evaluation of the project (Ventura, 1968). Details about the report and the context in which it was produced were studied in Almeida and Matos (2021). His research was very superficial and did not address key questions about the experience, however, we studied it because it contains information concerning some aspects of the experience that are relevant for our purpose.

Focussing on the school years 1965/66 and 1966/67, the Ventura report (1968) evaluated the experience considering quantitative and qualitative "aspects". To study the first ones, pilot classes in seven liceu were paired with control classes (called "testimony classes") with traditional mathematics programs. Quantitative data collected included: number of students at the beginning and at the end of each academic year studied; frequency of classifications in each discipline; likewise for the final exam classifications. The Report includes 23 graphs with the percentages of the classifications during the school year (11 graphs) and in the final exams in Mathematics (12 graphs) of the seven *liceus*.

Ventura did not perform an analysis of the quantitative results and actually devalued any attempt to compare the classes of experience with control classes, arguing that data lack statistical significance (…) [because] the pilot class was organized and operated under different conditions than the testimony group (number of students, number of weekly hours in the subject of Mathematics, teachers in a given class, as a rule, would not be the same as in the other class, etc., etc.). (Ventura, 1968, p. 10)

In addition, students in the experiment took special final national mathematics exams and, as several accounts indicate (Almeida & Matos, 2021), students' motivation was different as the enthusiasm surrounding the experiment, namely, parents' intervention to include their siblings in the pilot classes.

Although Ventura's presentation of the quantitative results is just a set of graphs about students' performance in examinations and during the school year, his graphs provided us with valuable data concerning the experience. These 23 line graphs have an identical structure: the abscissa axis indicates classifications from 0 to 20, called "Number - frequency of classifications", and the ordinate axis is called "Percentages". For each year and each liceu, the same graph shows data from the classifications in mathematics of the experience and the control classes.

We looked specifically for differences between pilot and control classes in students' performance either during the school year or the examinations, especially concerning the curriculum modelled by teachers and the accomplished curriculum of the experiment.

We began by analysing the graphs with grades in the discipline of Mathematics during the school years 1965/66, 1966/67. Three times a year, at the end of a term ("*período*"), students were given a grade from 0 to 20 points and for students to pass the 6th year of the course of *liceus* or having access to the final exam at the end of the 7th year, they should add at least 29 points each year. If, in the course of the school year, students thought they had no chance of obtaining the 29 points at a given discipline, they could cancel their enrolment and take the exam as "external" students. In the graphs with the term grades in Mathematics, scores for the three school terms, so the cumulative "frequencies" resulted in values close to 300%.

In a first step, we built a table of percentages of frequencies for each graph of the term grades, in a total of 11 tables. As the Report provided no numerical data, we performed a conversion of the line segment lengths in the graphs into numerical data, necessarily incorporating some inaccuracy, as the percentages did not always add up to exactly 300%. We admitted, however, that a 10% error in the total frequency percentages would not fundamentally alter our analysis. Even so, there were still inconsistencies in the data that should have originated from errors in the graphs' original data or in their elaboration, so we excluded three cases, all from the control classes, in which the total frequencies (considerably) exceeded this margin. In a second phase, we calculated the means (necessarily approximate), the medians, and the modes of the term grades in Mathematics of the remaining 19 classes, which are shown in Table 1.

Table 1. *Modes, approximate means, and medians of term grades in Mathematics of the pilot and the control classes in 6 liceus, 1965/66, 1966/67*

	Pilot classes			*Control classes*		
Year/Liceu	*Mode*	*Mean*	*Median*	*Mode*	*Mean*	*Median*
1965/66						
Alex. Herculano	9	11,1	10	10	11,2	11
D. João de Castro	10	10,9	10	10	11,6	11
D. João III	10 & 11	11,4	11	9, 10 & 11	10,8	10
D. Manuel II	12	11,5	12	10	10,6	10
Oeiras	13	12,9	13	(a)	(a)	(a)
Pedro Nunes	10	11,1	11	(a)	(a)	(a)
Santa Isabel	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)
1966/67						
Alex. Herculano	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)
D. João de Castro	11	11,8	12	10	10,1	10
D. João III	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)
D. Manuel II	9 & 15	13,8	14	11	10,4	10
Oeiras	13	11,6	12	(a)	(a)	(a)
Pedro Nunes	10	11,8	11	9 & 10	9,5	9
Santa Isabel	10	11,2	11	9	9,8	9

Note: (a) excluded data; (b) non-existent data.

We then performed eight comparisons between the pilot and the control classes. In six of them, the pilot classes show higher modes, means, and medians. Higher modes denote that the most frequent grade given in during the school year is higher in pilot classes. Table 1 shows that modes in these classes may attain 15, 13, 12 points, which differentiates them from the control classes. Medians also show that in pilot classes the lower half of students has higher grades than in control classes and this difference is often greater than 1 point. Means just confirm these differences. Although our analysis is based on data that must be handled with a grain of salt, we believe it is possible to, at least, state that, from the teachers' perspective, learning was more successful in pilot classes.

It is almost impossible to draw definitive conclusions, apart from the fact that those statistical indicators are higher in pilot than in control classes[2]. Were students in pilot classes better achievers? Were they more motivated as they were participating in a "modern" experiment involving top methods and contents? Was teaching more

[2] We refrained from applying inferential statistics, as the number of cases is low.

successful? Or were teachers just fulfilling high expectancies about the experience and tended to give better grades? As Ventura himself says, in the absence of a more sophisticated methodology, it is impossible to go any further.

To extend our study, we proceeded by analysing the graphs concerning the results from the final exams as the effect of teachers' expectancies would be minimized. At the time, the score of the exams was given in a scale from 0 to 20, and students had to have a final grade equal or above 10 to pass. As the graphs did not include grades smaller than 10, we assumed that they showed the frequency of the grades of the students who attended classes and passed the exam, i. e., those that failed the exam, or that, during the year, cancelled their enrolment, were not included. So, the population from which these new data was collected was not the same as the previous population and weaker students have been excluded.

For each graph of the results of the exams we built a table of percentages of frequencies, totalling 12 tables. As before, we followed a procedure for converting lengths of line segments into numbers and we considered, that a 10% error in the total frequency percentages would not alter our analysis and so we excluded three cases from the pilot classes and four from the control groups, in which the total frequencies (considerably) exceeded this margin. In a second phase, we calculated the means, necessarily approximate, the modes, and the medians of the classifications in the Mathematics exams of the remaining 17 classes, which are shown in Table 2.

Table 2. *Modes, approximate means, and medians of grades of Mathematics exams of the pilot and the control classes in 7 liceus, 1965/66, 1966/67*

	Pilot classes			*Control classes*		
Year/Liceu	*Mode*	*Mean*	*Median*	*Mode*	*Mean*	*Median*
1965/66						
Alex. Herculano	(a)	(a)	(a)	10	12,3	11
D. João de Castro	10	11,1	10	10	12,0	11
D. João III	10	11,7	11	(a)	(a)	(a)
D. Manuel II	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)
Oeiras	13	12,9	13	(a)	(a)	(a)
Pedro Nunes	10	12,1	11	10	10,2	10
Santa Isabel	10	11,9	11	10	10,9	10
1966/67						
Alex. Herculano	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)
D. João de Castro	11	12,9	11	11	11,2	11
D. João III	10	11,6	10	10	11,1	10
D. Manuel II	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)
Oeiras	(a)	(a)	(a)	10 & 12	11,7	12
Pedro Nunes	15	12,9	13	10	10,2	10
Santa Isabel	10	11,4	10	(a)	(a)	(a)

Note: (a) excluded data; (b) non-existent data.

In six cases, the approximate means of the pilot classes are higher than the control classes, except for one case (*D. João de Castro*, 1965/66), but either the modes, or the medians do not provide such a clear distinction. Again, we find better means for the pilot classes. Conclusions, however, were difficult to formulate: did modern mathematics produce better quality of learning? Were the results naturally due to the criteria used for the selection of students in the experimental classes? Did the number of students per class (considerably smaller in the pilot classes) have an influence? Did the greater number of hours of mathematics (6, compared to 4) make a difference? Did students' motivation about modern mathematics explain the results? Were pilot class exams easier?

There was a detail, however, that allowed us to go further. Both in pilot and in testimonial classes, the modes for classifications in Mathematics exams is mostly 10 points, except for the *Liceu D. João de Castro*, which, in 1966/67, presented a mode of 11 points in both classes, the *Liceu Pedro Nunes* with a mode of 15 points in the pilot class of 1966/67 and the *Liceu de Oeiras* with a mode of 13 points in the pilot class in 1965/66 and bimodal (10 and 12 points) in the testimony class of 1966/67. So, in both types of classes, most students' grades laid on the border between passing and failing and a visual inspection of the graphs showed that many resembled L curves. However, the fact that, roughly, modes were similar but means were higher in pilot classes indicated that in the experimental group higher mathematics achievers were obtaining higher examination grades. In fact, when we observed the distribution of the grades, all the comparisons except one (*D. João de Castro*, 1965/66), showed that the examination grades range was more extended in experimental classes. An extreme example was *Liceu Pedro Nunes* where the range of grades for the control classes was 10-11 points in both years, whereas for the experimental classes was 10-16 and 10-15 points.

We already knew that pilot classes were different because they were exposed to a special program, but, from our analysis of the "quantitative" aspects of the Report, we argued that the curriculum modelled by teachers in these classes produced a distinct class environment as can be seen by the grades attributed by teachers during the school year. Newspaper articles confirm this opinion (Matos, 2019). Moreover, as exam results show, this environment had the effect of enhancing performance of some students, most likely those that had already a preference for mathematics. This conclusion is consistent with the common current opinion about the experiment. Many contemporary mathematicians and physicists attribute their enthusiasm about science to these classes. However, we must also note that there are also successful persons in areas other than "hard" sciences that express a rejection of those classes. Our analysis also suggests that this may be the case, as results show that the examination curves tend to show a concentration of students are at the borderline between pass and failure and this is not different from what occurs in the control classes.

The qualitative aspects that Ventura's report (1968) allowed us to picture teachers' opinions about the curriculum presented to teachers, namely, the program and the overall experiment. Data was obtained through opinion surveys ("Information Sheets") of two types. Type I Sheets were sent to mathematics teachers who taught experimental classes and asked, "What is your opinion on the results achieved by the experimental groups in which you participated in the course of this experiment?" Type II sheets were sent to all the Rectors, and all the "qualified" teachers of Mathematics, Physics and Philosophy of the *liceus* and asked, "What impressions and suggestions could you give us about these experiment?"

In this case, Sousa Ventura actually conducted a data analysis. He received 130 responses from 30 high schools, of which 25 said they had no opinion. He then emphasized 13 "themes", that is, categories of opinions, indicating the number of responses that he included in each one, rarely distinguishing between responses from teachers of mathematics or other disciplines. About the curriculum presented to teachers, they thought that the programs of the experimental classes were excessively long, the number of hours (6h) per week of these classes was excessive (33 responses) and that these programs must have been coordinated with Physics and Philosophy programs (26 responses). As for the curriculum modelled by teachers, some believed that modern mathematics developed a taste for scientific research, provides greater capacity for analysis and rigor in the type of hypothetical-deductive reasoning (25 responses). This may have been the case for some students, as we have seen previously. Finally, significant numbers of teachers think that pilot classes should be started at all levels of primary and secondary education (37 responses) and that experimental classes should consist of non-selected students with a number of students of not less than 30 (24 responses). These opinions signal a desire to enlarge modern mathematics to all students.

TEACHING AND LEARNING IN CPES

The new CPES for grades 5th and 6th began in 1968, unifying similar courses for *liceus* and technical schools. It was a cycle with a new philosophy fostering the use of innovative teaching methodologies, with specific schools and a teaching staff organized according to new interdisciplinary areas. The new programs advocated active and practical teaching, seeking to awaken the spirit of observation, creative imagination, aesthetic sense, the taste of inventiveness and personal effort, as well as the recognition of the value of work, although the programs of some disciplines reflected the conservative nature of the regime.

The discipline of Mathematics took 3 hours per week for the two years and its program was designed by Sebastião e Silva. Strongly recommending the use of new methodologies, he made two major changes: 1) the older program was organized around geometrical ideas and the new one would give prominence to arithmetic including an initiation to algebra, 2) the language of sets would become a standard way to address mathematical content (Matos, 2014).

The program, which without major changes prevailed until the end of the 1980s, started in the 1st year with sets and their operations, followed by the study of arithmetic, rational numbers, calculation with decimals, measurement of lengths, times and speeds, and finally solid and plane geometry. The 2nd year, in addition to deepening these notions, included the study of proportionalities (direct and inverse). Simple equations were also taught.

Change was not simple. Three months after the start of the new program, the Inspector Joaquim Redinha issued a note to teachers (1969) advising them against spending too much time on sets. A second note in the beginning of 1969/70 ("A programação de Matemática do 1º ano do Ciclo Preparatório", 1969) written also by Redinha and supported by Sebastião e Silva, used stronger terms to caution teachers against the excessive development of the topic and discussed adequate terminology (Matos, 2009). The Inspectorate and Sebastião e Silva believed that the source of the problem laid partially on the available textbooks. However, we may conjecture that the main issue could be essentially placed in the excessive linguistic precision of the program, forcing either textbooks or teachers to spend too much time to teach 10 and 11 years old the details of the definitions of set terminology.

Two reports allowed us to characterize the curriculum modelled by teachers and the accomplished curriculum. The first, conducted by the Inspector Paulo Crato (1972), analysed the responses of the 31217 students of the 2nd year of CPES who took the first edition of the national exam in 21 June 1972 and we already performed a preliminary study (Matos, 2005). The exam was a mandatory written test lasting 90 minutes, which conditioned the progression to the following cycles in *liceus* or technical schools. It had ten questions with several items. The report values a detailed analysis of answers and, for each question, discriminates the percentage of totally correct answers, of totally incorrect answers, the absence of answers, the percentages of different types of answers, and the frequency of some common errors. Crato does not provide an indication of students' total scores but, given the partial results, we may suspect the pervasiveness of low total grades.

Geometry was represented by three of the ten test questions. The first (question 1, with four items) focused on the classification of geometric solids. The responses revealed that more than 80% of students correctly identified cylinders and cones. The identification of prisms (40% correct answers) showed some problems related to the exclusion of cubes or parallelepipeds. The other two geometry questions (questions 9 and 10) involved the calculation of areas and volumes. Both required two phases of calculation, the area of a semi-circle and a rectangle in one question, and of fitting cubes in a parallelepiped in the other. These questions required the use of complex solution strategies and the percentages of correct answers (8% and 13%) reflected that. Even so, the percentages of students who correctly calculated some of the required areas or volumes were very low (rectangle area, 60%; circle area, 20%; parallelepiped volume, 42% and 25%). Paulo Crato attributed these low percentages to "deficiencies in simple calculation" among other reasons. However, the next study suggests, these topics may not have been even taught.

Five questions dealt with arithmetic. Question 3 involved the determination of divisors and obtained success rates of 60% and 49% in its two items, with 81% of students having the concept of divisor and 68% that of common divisor. The main mistake made was not including 1 or the number itself in the set of dividers. Only 15% and 20% of students included strange elements. Question 4 asked for the comparison between two numerals (fractions or decimal numbers). About 60% of the students answered appropriately to each of the four items. Questions 5 and 6 (with two items) required writing and calculating of numerical expressions involving fractions and decimal numbers. These were difficult questions and had very low percentages of correct answers, around 20%, with high rates of completely incorrect or even unanswered questions. Errors in intermediate arithmetic operations played an important role in these results. Question 2, although using numbers, essentially involved operations on sets and will be discussed later.

Question 7 could be solved using an equation. The problem "which number multiplied by 15 gives 240" was correctly solved by 53% of students. A significant percentage of students indicated the correct number, but included an equation unrelated to the problem (15%), or did not write any equation (28%), thus suggesting the use of alternative non-algebraic methods.

Finally, question 8 tested knowledge in proportionality and percentage. Correct answers were scarce (24% and 18%, respectively), with many answers completely incorrect (about 40%), with many students choosing not to answer (22% and 33%).

Through out his analysis, Paulo Crato repeatedly mentioned the deficient performance of arithmetic operations. This happened in all questions that require the performance of arithmetic algorithms (questions 5, 6, 8 and 9) where the percentage of errors was substantial. For example, in question 6, 28% of students made a subtraction mistake, 20% a multiplication and 34% a division. It is unclear whether this is a by-product of modern mathematics, but a small group of teachers from Ventura's research (1968) thinks so.

We looked specifically at questions in which modern mathematics topics were clearly present. The use of mathematical language was strongly present in questions 1, 2, and 3. Paulo Crato studied the understanding of concepts of set theory and its symbolism in questions 1 and 3. The success percentages on the knowledge of the subset concept, the use of braces, and the separation of elements by commas were over 80%. In question 2, the percentages for understanding intersection, union and their symbols were over 70%.

However, despite the correct use of this terminology by large percentages of students, the comprehension of mathematical concepts in these questions was low.

Question 2 in particular focused on the proper use of the language of sets:

> 2. Given the sets
>
> A = {whole numbers less than 6}
>
> B = {integer numbers greater than 3 and less than 8},
>
> represent, using curly brackets and indicating its elements:
>
> a) $A \cap B$;
>
> b) $A \cup B$. (Crato, 1972, p. 6, our translation)

The percentage of correct answers was discouraging (42% and 23%, for items a) and b) respectively). As the question did not require any arithmetic calculation, and students understood the notions of union and intersection of sets, the issue may lie essentially in the domain of language, either due to difficulties in interpreting the question or due to the lack of mathematical writing skills. Crato did not propose an explanation.

In summary, Paulo Crato's study proved us with a glimpse of the accomplished curriculum and globally mathematics learning was low. Looking in particular to the use of modern mathematics language, although students seemed well acquainted with most of its symbols, framing problems in the new language produced very low results.

We can have a perspective of the modern mathematics accomplished and modelled curriculum by teachers in CPES by looking at a large quantitative study performed by the Inspectorate (Monteiro, Sá, & Loureiro, 1986) focusing on the degree at which the several topics of the curriculum were actually taught during the school year 1985/86. A teachers' questionnaire was sent to a sample of Preparatory Schools covering the continental part of the country asking for the degree of coverage of 20 topics in the programs of each of the two years course. A total of 48 schools comprising 478 first year classes and 391 second year classes was studied. The authors concluded that there was a considerable imbalance of curriculum coverage as geometry was barely taught in the two years and this fact explained the high rate of failure in the national exams. In the end of the study the Inspectorate recommended that it was time to change all the programs at non-university levels, which occurred by the end of the 1980s decade.

We looked particularly at the accomplished curriculum in the two years by looking both at the percentages of classes that taught the complete topic and the average number of class times devoted to the topic. To do that, we aggregated the topics of the original study (numbered from 1 to 20) into 7 topics for the first year (Table 3) and 6 for the second year (Table 4).

Table 3. *Accomplished curriculum in the first year, per topic*

Topics	*Sets*	*Complementary set*	*Arithmetic operations*	*Equations*	*Multiples, divisors*	*Numerical expressions*	*Geometry*
Percentage of classes that taught the topic entirely (*n*=478)	90,2	7	81,4	73	44	87	20,2
Average of total number of class time devoted to the topic	26,9	0,2	28,9	3,3	2,5	5,4	8,5

Source. Table compiled from Monteiro, Sá, and Loureiro (1986, pp. 30, 40). Aggregation of topics: sets: 1-5; complementary set: 7; arithmetic operations: 6-11; equations: 12; multiples, divisors: 13; numerical expressions: 14; geometry: 15-20.

We also looked at data from topics clearly associated with modern mathematics, namely, sets and complementary sets in the first year and partitive operators in the second. In the first year (Table 3) we notice that sets occupy one third of the whole school year. It seems that the recommendations to limit the topic to two weeks given in 1969 was still largely ignored by the teachers 14 years latter.

Table 4. *Accomplished curriculum in the second year, per topic*

Topics	*Multiples, divisors*	*Partitive operators*	*Fractions*	*Equations*	*Proportionality*	*Geometry*
Percentage of classes that taught the topic entirely (*n*=391)	98,5	20	89,8	75	52	8,9
Average of total number of class times devoted to the topic	14,9	1,7	41,4	5,8	5,8	6

Source. Table compiled from Monteiro, Sá, and Loureiro (1986, pp. 35, 45). Aggregation of topics: multiples, divisors: 1-2; partitive operators: 3; fractions: 3-8; equations: 9; proportionality: 10; geometry: 11-20.

We also noted that the two remaining topics that relate to modern mathematics, and complementary sets in the first year (Table 3) and partitive operators in the second (Table 4), were barely taught. In the minds of the reformers of 1968, the first, complementary sets, was necessary in order to understand subtraction as the cardinal of complementary sets. Apparently, teachers were bypassing this approach (Table 3), most probably teaching subtraction the “classic” way. The same occurs with partitive operators (Table 4) which were not explicitly included in the program of 1968 but took a major role in the program of 1974 where fractions were taught as operators either partitive, multiplicative, or both. This study provides a glimpse of the curriculum modelled by teachers as they devoted residual class time to this notion, which may imply that they also taught fractions “the classic way”, eventually merely retaining the terminology.

Both studies, Crato’s research on the 1972 exam and the Inspectorate report of 1986, confirmed that sets, their basic operations, and associated terminology remained the only successful topic of the modern mathematic reform in CPES. They also showed that most of class time of the first year was devoted to this topic, which naturally diminished the amount of time available to other topics, namely geometry or sharpening arithmetic and algebraic calculations. Both studies also showed that students and teachers alike did not relate well with other notions of modern mathematics. In the 1972's exam we saw students' performance in a very simple arithmetic task hindered by the use of modern language and in the 1986's survey we noticed how teachers avoided the most complex modern approaches to subtraction and fractions.

MODERN MATHEMATICS IN GRADES 7TH THROUGH 9TH

From 1977 until 1979, a major project involving the collaboration of Swedish educators evaluated teaching and learning of grades 7th through 9th and published a total of 16 reports, 15 of which of empirical research by collecting data from students, teachers, parents, members of Executive Councils, and businesses (Matos, 2010). Five of these studies refer specifically to teaching and learning mathematics between 1975 and 1979. These studies assume great importance today, as they provide an opportunity of studying the conditions in which the reform of modern mathematics was applied, in particular, an appreciation of the curriculum presented to teachers and the accomplished curriculum of mathematics. They are particularly helpful as they provide a foreign perspective, as was the case of Wiggo Kilborn, a critique of modern mathematics, often at odds with the perception of the Portuguese educators supervising mathematics programs at the time. Sticking with the purpose of this article, we will look into the several levels of curriculum development we have been discussing.

The 1977 program for grades 7th through 9th was the third version of the original modern mathematics program implemented in 1970. For the purposes of our research, there were no major differences among these versions. It involved the study of rational and real numbers, first and second degree equations and inequalities, applications (functions). Geometry included transformational geometry (isometries, homotheties), Pythagorean theorem, space geometry and trigonometry. The new language of mathematics was incorporated in all these topics: the program began with a propaedeutic to logic, binary relationships precede the study of functions, and vector algebra predating the study of geometry.

Reports were very critical of the curriculum presented to teachers. For example, one of them states, by analyzing the curricula for the 7th, 8th and 9th grades it appears that they are curricula typical of the first generation of modern mathematics; they show, moreover, a keener interest in teaching pure mathematics that will make the students good mathematicians. (Catela & Kilborn, 1979, p. 41)

The reports mentioned several times the bad results the new approaches produced in foreign countries. Adopting simultaneously a pedagogical and a critical tone the reports explained that in other countries the initial enthusiasm was replaced by a disenchantment caused by learning difficulties, motivation, and major limitations of the students in solving even simple problems. These opinions were supported by references to the three ICME held recently (in 1976) and to international studies, remarking what extent is modern mathematics necessary, both in Portugal and elsewhere, to the child's education or profession in the future. The answer to this question is also one of the main reasons many countries have changed their [modern] mathematics curricula, using other alternatives according to the capabilities and needs of children. (Catela & Kilborn, 1979, p. 42).

Textbooks, another dimension of the curriculum presented to teachers, were also assessed by the Project. At the time, there was a dominant collection of textbooks in use in schools and alternative manuals were residual. Shortages in the use and access to textbooks were reported (Catela & Kilborn, 1979). For example, although in the year 1975/76 new programs had been published, but new manuals did not immediately follow. Even in 1977/78 the project documented some problems accessing books. In general, students could only acquire the book in December, at the end of the 1st school term.

The content of these books drew strong criticism from the evaluators (Catela & Kilborn, 1979). Firstly, they argued that books were almost replicas of the programs, which could pose problems for students and teachers. They indicated that programs used concepts and sequences very different from regular teaching, so that the structure of "pure" logic of the books did not facilitate their understanding by teachers who were not confortable with meanings and assumptions on which these concepts and sequences were based. The structure of the books was also questioned. Students were often required to go through five or more pages of text before having the opportunity to solve tasks.

For the authors of the reports, the Portuguese books, unlike those of other countries, did not accommodate an individualized learning, because they did not contain diagnostic tests allowing the verification of knowledge by the students. On the other hand, there were few exercises at the end of each section that allowed students to assess understanding before moving on. They also pointed out the linear structure of the books. Students only had a single contact with each topic, which implied that there were no ways to compensate later for a more hasty study. However, born out of foreign tradition about textbooks, the reports may be underestimating the pervasive use of "exercise books", which sometimes were even replacing the "regular" ones.

The accomplished curriculum was also studied by the Project. They used longitudinal testing (three comparable tests, five questions each) through the years 1977/78 and 1978/79. Each question of the tests should encompass three different levels of difficulty and so each had three items and it was expected that 75% of students responded correctly to the first, 50% to the second and 25% the third. It was therefore expected that students obtain an average score of 50% in each test question. Almost every question privileged knowledge of algorithmic or algebraic nature, in which the greater complexity meant replacing integers by fractions, additions and subtractions by multiplications and divisions, or by incorporating powers.

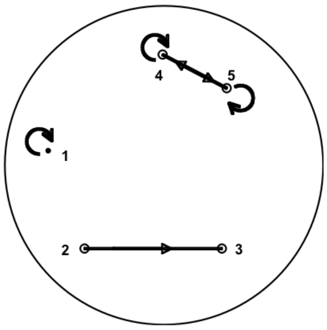
The first two tests, M-I with topics from 7th grade and M-II with 8th grade contents, were prepared by Maria Emília Catela, Wiggo Kilborn and the authors of the new programs (Catela & Kilborn, 1979). The tests were previously verified but the results were very weak. However it was decided to keep M-I and change some details of M-II. The test for grade 7, M-I, was also applied to grade 8. The results were comprehensively examined elsewhere (Ponte, Matos, & Abrantes, 1998).

Overall results were extremely low. Performances were much lower than expected, even for 7th grade contents tested on the 8th. On average, students in the 7th grade got a rating of 13%, and the 8th achieved 24% in the contents of 7th grade and 25% in the 8th. On average, students in 9th grade scored 29% (Catela, 1980). Another report (Catela, 1980) blamed these results on the excessive difficulty of the tests. Referring to the initial tests that were tried, she stated these trial tests were constructed by the authors of the programs which are also teachers. The level of the tests M-I and M-II (1st trial version) shows, therefore, the notion that these teachers have of the level of their own classes, and it was ultimately proved that this notion contains higher expectations than the actual knowledge of students. (Catela, 1980, p. 24)

Searching for explanations for this mismatch, the author concluded that one reason for the high expectation on the part of authors of the programs (and perhaps teachers in general) may be the fact that modern mathematics, whose concepts have guided the current programs, is considered easier for students than conventional mathematics. In fact, when mathematics was introduced in secondary programs in several countries there has been no investigation of how students would accept it in terms of learning, and it was immediately assumed that Modern Mathematics was actually simpler. However, experience has shown otherwise. (Catela, 1980, pp. 24-5)

The answers to the questions of the tests involving modern mathematics were of particular importance for us. Unfortunately, there was only one such question, question 5 of M-I that dealt with binary relationships:

> 5.1. Given the sets
>
> > A = {0, 1, 3} and B = {-1, 1, 2} and the condition $x + y < 1$, indicate the ordered pairs of the relationship defined from A to B.
>
> 5.2. Consider the binary relationship defined in the set {1, 2, 3, 4, 5} and represented by the diagram. Indicate the missing pairs for the relation to be reflexive.



> 5.3. Represent in extension the classes in which the set {11, 18, 21, 28, 37, 31} is divided by the relationship defined by the condition "if it has the same unit figure of y".[3]

From the available copies of the report it is difficult to read the number of correct answers per class for each item. But in one 7th grade class, which has all numerals legible, the following percentages of correct answers were obtained: 5.1 - 0%, 5.2 - 0%, 5.3 – 6,7 %. It is also possible to know the average percentage of correct answers per class, as computed by the Project. For example, the mean percentage of correct answers for the previous class was 2,2% which corresponds to the average of three percentages (Catela & Kilborn, 1979, p. 21). For purposes of this article, these percentages means were grouped at 10% intervals and the data obtained are presented in Table 5.

[3] The answers were: 5.1: (0, -1), (1, -1); 5.2: (2, 2), 3,3); 5.3: $\{11, 21, 31\}, \{18, 28\}, \{37\}$.

Table 5. *Number of classes with correct answers to question 5 of test M-I per grade*

	7^{th} grade		8^{th} grade	
Average percentage of correct answers	Number of classes	%	Number of classes	%
0 a 10 %	16	64	12	55
10 a 20 %	4	16	8	36
20 a 30 %	3	12	1	5
30 a 40 %	2	8	1	5
40 a 50 %	0	0	0	0
Total	25	100	22	101

Source. Compiled from Catela and Kilborn (1979, p. 21).

Performance in this question about binary relationships was very weak. For example, sixteen 7^{th} grade classes (64% of the total 7^{th} grade classes) and twelve 8^{th} grade classes (55%) had an average percentage of correct answers less that 10%. According to the expectations of the authors of the test, the average percentages should be 50%. It is, however, 8,8% in 7^{th} grade and 9,7% in the 8^{th}, which, at the same time correspond to the lowest percentage of correct responses of the test.

The aggregation of the correct answers to the three items just gives us a partial view. Looking at the disaggregated maps (Catela & Kilborn, 1979, pp. 21, 22), we detected many classes in which few or no students (0 or 1) answered correctly, and some (few) classes with slightly better results but which were still very far from the expected results. In the Northeast region, in particular, the classes showed a high number of null responses (33 in 57, compared to 28 in 84 in the region of Lisbon). The best results (over 30% average of correct answers) are obtained in three groups of schools in the city of Lisbon which had teachers well acquainted with the reform.

What are the reasons behind such poor results? The M-I test was developed in cooperation with the authors of the program and that there was a pre-testing. We should also reject the hypothesis that students had difficulties computing these items. These difficulties were clearly present in the items related to algebra or fractional numbers, but the answer question 5 only requires a correct linguistic interpretation.

The poor performance of students on the issue of binary relationships seemed to be due to two factors: shortcomings in the teaching process and intrinsic difficulty. In other words, it is very likely that, not having learned binary relations during their initial scientific formation, teachers tended either to teach it inappropriately, or not to teach it at all, as we have seen happening in CPES. But even classes taught by teachers conversant with the new ideas, as those from Lisbon, performed poorly. And even these teachers seemed not being able to teach in such a way that learning would remain stable as students moved from the 7^{th} to the 8^{th} grade, contrary to what happens in other “classical” items. Binary relations seem indeed to have an intrinsic difficulty of their own. This is stated in the report that concluded that this topic was not appropriate for these students.

These results are coherent with what we found in Paulo Crato’s study (1972). The introduction of terminology characteristic of modern mathematics, although superficially seized by students, kept them from answering some mathematically simple questions. This study also suggests problems with teacher preparation and the inadequacy of certain topics to the mental age of the students.

CONCLUSIONS

With the intention to understand how the modern mathematics curricular reorganisation fulfilled the expectations of an improvement in mathematics teaching and learning, we probed four quantitative studies developed by Portuguese governmental institutions intended to evaluate this reform at several grade levels. Framing our analysis on Gimeno's curricular levels (2000), we analysed the reform as it was implemented in three sub-systems re-appreciating investigations performed in the past. Firstly, analysing the Sebastião e Silva experiment, we concurred with common wisdom that agrees that curriculum modelled by teachers in experimental classes produced a distinct class environment especially favouring students with a penchant for mathematics and sciences, as was the intention of the experiment, although effects are not clear for the rest of the students. We also found that, by 1966, there was a significant number of teachers believing that the new program was taking an excessive amount of class time and that the new ideas should not be limited to a small number of students.

We then focused our attention to the implementation of the reform in CPES. The new curriculum now was encompassing all the students and the results were not very good. Integrating two large scale studies, we found that there are reasons to believe that the curriculum presented to teachers was too large and paid excessive attention to the details of mathematical language. Curriculum modelled by teachers reflected these shortcomings and from the beginning of the new course in 1968 until the curricular study of 1986 teachers were spending to much time with the elementary aspects of sets and their operations neglecting, or even bypassing, other topics the reformers thought should frame the arithmetic operations (complementary sets and partitive and multiplicative operators) and geometry. The accomplished curriculum evaluated in 1972 confirms in broader terms these findings.

Lastly, we addressed curriculum in grades 7^{th} through 9^{th} of the new unified course. A large project evaluating several dimensions of the Portuguese school systems conducted by Portuguese and foreign researchers provided a bleak perspective of mathematics teaching and learning at these grades in the second half of the 1970's decade. Curriculum presented to teachers, either the program or the textbooks, was considered out-dated and not adjusted to students' needs and the accomplished curriculum and mathematics learning was thought to be well below the expectations of the educators in the Ministry of Education overseeing mathematics education.

When these reports were conducted, the debate in Portugal about the teaching and learning of mathematics was very limited (Matos, 2008). The regime that ended in 1974 limited for nearly half a century the democratic functioning of organizations in which social forces could meet. As a consequence, these reports had no effect on actual teaching of mathematics. Apparently, people in charge had a sense that things were falling apart but had run out of ideas about how to mend the situation. The reformers of the 1960s understood that the proper use of mathematical language (almost exclusively understood as the apparatus related to sets, their operations and Boolean logic) would guarantee a good understanding, that is, the use of an appropriate language would mirror the clarity of reasoning. We know today that this is not the case, that is, the relationship between comprehension and language is much more complex than previously thought. It is widely accepted today that one of the problems of the reform of modern mathematics in Portugal, and which led to its discredit during the 1980s, was the excessive emphasis on formalism and language. In 1981 the Portuguese Society of Mathematics conducted a series of meetings attended by mathematics teachers and mathematicians to debate the mathematics programs, which led to a document strongly criticizing the situation and proposing an urgent changes (Matos, 2008). This document judged the discipline of mathematics as hermetic, more formalized, with a stronger emphasis on symbolism, with a more cumbersome language and detached from reality and applications. (Os programas em debate, 1982, p. 20)

However, only in 1989 new programs were adopted.

REFERENCES

A programação de Matemática do 1º ano do Ciclo Preparatório. (1969). *Boletim da Direcção de Serviços do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário*, 2, 22-30.

Almeida, M. C. (2013). *Um olhar sobre o ensino da Matemática, guiado por António Augusto Lopes [A perspective on mathematics teaching guided by António Augusto Lopes].* (Doutoral dissertation), Universidade Nova de Lisboa.

Almeida, M. C. & Matos, J. M. (2021, in press). A avaliação da experiência de Matemática Moderna nos liceus portugueses. *REMATEC, Revista de Matemática, ensino e Cultura*.

Catela, M. E. (1980). *Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática em perspectiva: 9º ano de 1978/79 e sua relação com os 7º e 8º anos de 1977/78*. Lisbon: GEP.

Catela, M. E. e Kilborn, W. (1979). Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática em 1977/78. 7º e 8º anos. Lisboa: GEP.

Crato, P. (1972). *Análise das respostas dadas às questões postas no exame escrito*. Lisbon: Direção de Serviços do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, Ministério da Educação Nacional.

Furinghetti, F., Matos, J. M., & Menghini, M. (2013). From mathematics and education, to mathematics education. In A. B. M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Ed.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 273-302). New York: Springer.

Gimeno Sacristán, J. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: Artmed.

Matos, J. M. (2005). Aprendizagens no Ciclo Preparatório de 1972: um estudo sobre o sucesso da Matemática Moderna. *Educação e Matemática, 85*, 7-12.

Matos, J. M. (2008). A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal. *Investigación en Educación Matemática XII*, 141-158.

Matos, J. M. (2009). Changing representations and practices in school mathematics: the case of Modern Math in Portugal. In K. Bjarnadóttir, F. Furinguetti, & G. Schubring (Eds.), *"Dig where you stand" Proceedings of a Conference on On-going Research in the History of Mathematics Education, Garđabœr, Iceland, June 20-24 2009* (pp. 123-137). Reikyavik: University of Iceland.

Matos, J. M. (2010). Elementos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática Moderna em Portugal no final dos anos 70. In J. M. Matos & W. R. Valente (Eds.), *A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos* (pp. 137-174). Lisbon: UIED.

Matos, J. M. (2014). Mathematics education in Spain and Portugal. Portugal. In A. Karp & G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 291-302). London: Springer.

Matos, J. M. (2019). Entre a modernidade e o conservadorismo. A matemática moderna nos diários de Lisboa *Anais XIII Seminário Nacional de História da Matemática* (pp. 81-104). Fortaleza: Sociedade Brasileira de Matemática.

Monteiro, J., Sá, L., & Loureiro, G. (1986). *Relatório. Cumprimento dos programas de Matemática do Ensino Preparatório*. Lisboa: Inspeção Geral do Ensino. Ministério da Educação e Cultura.

Os programas em debate. (1982). *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 5*, 18-22.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática. Implicações curriculares*. Lisbon: IIE.

Redinha, J. (1969). Ofício-circular nº 191, 2ª Secção, 14/1/1969. Lisbon: Direção de Serviços do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, Ministério da Educação Nacional.

Ventura, M. S. (1968, 8/8/1968). *Acerca da avaliação dos resultados da experiência de Matemática Moderna ao nível do 3.º ciclo dos Liceus*. (1, 1). Archive António Augusto Lopes.

José Manuel Matos
Universidade Nova de Lisboa, Portugal
jmm@fct.unl.pt

Mária Cristina Almeida
CICS.NOVA - Interdisciplinary Center of Social Sciences, Portugal
ajs.mcr.almeida@gmail.com

Gómez, B. (2021). La regla de dos y los problemas de acciones simultáneas. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 4*(1), 73-82

ISSN: 2603-9982

LA REGLA DE DOS Y LOS PROBLEMAS DE ACCIONES SIMULTÁNEAS[1]

Bernardo Gómez Alfonso, Universidad de Valencia, España

Resumen

La regla de dos es una regla extraordinaria y simple para resolver problemas de acciones simultáneas. Se presenta un panorama de esta regla, mostrando su uso, aplicación y explicación, a la vista de cómo ha sido recogida en una selección de libros de texto relevantes por su importancia histórica.

Palabras clave: *didáctica, matemáticas, historia, problemas aritméticos, regla de dos.*

The rule of two and the problems of simultaneous actions

Abstract

The rule of two is an extraordinary and simple rule for solving problems of simultaneous actions. An overview of this rule is presented, showing its use, application and explanation, in view of how it has been collected in a selection of relevant textbooks due to its historical importance.

Keywords: *didactics, mathematics, history, arithmetic problems, rule of two.*

[1] Este trabajo ha contado con el apoyo del proyecto EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE)

Recibido: 28/01/2021; Aceptado: 09/03/2021

INTRODUCCIÓN

Bajo el nombre de *Riegula de le do cose che se cazano po se cozongeno*, (abreviadamente: "Regla de las dos cosas"), se encuentra en la Aritmética de Treviso (1478) una regla extraordinariamente breve y simple para resolver un problema de "correos":

> *Correos entre Roma y Venecia*. El Padre Santo envió un mensajero desde Roma a Venecia, rogándole que debería de llegar a Venecia en 7 días. Y la más ilustre señora de Venecia también envió un mensajero de Venecia a Roma que debería de llegar en 9 días. Y de Roma a Venecia hay 250 millas. Ocurrió que por orden de estas personalidades estos dos mensajeros emprendieron su viaje al mismo tiempo. Se pide hallar a los cuantos días se encontrarán y cuantas millas habrá viajado cada uno de ellos (Swetz, 1989, p. 158).
>
> Sigue la regla así: 7+9 =16 es el divisor; 9×7=63 es el dividendo: 63÷16=$3\frac{15}{16}$ por tanto, en 3 días y $\frac{15}{16}$ se encontrarán.

Obsérvese que la formulación de la regla que se menciona en Treviso es la división de un producto por una suma; o sea: $\frac{7\times 9}{7+9}$. Cociente formado por los dos números que determinan el tiempo que tarda cada uno de los correos, 7 y 9 en hacer todo el viaje individualmente.

Para contestar a la otra pregunta, las millas que habrá viajado cada uno de ellos, en el texto de Treviso se utiliza el método de la proporción en términos de dos reglas de tres:

> Si quieres saber cuántas millas ha hecho cada uno, procede por la regla de tres así, primero para el de Roma [plantea la proporción y opera $\frac{250}{7} = \frac{x}{3\frac{15}{16}}; x = 140\,\frac{5}{8}$]. El que viene de Roma hace 140 millas y $3\frac{5}{8}$. Ahora arregla la regla para el correo de Venecia Roma [plantea la proporción y opera $\frac{250}{9} = \frac{x}{3\frac{15}{16}}; x = 109\,\frac{3}{8}$]. Por tanto, vemos que el que viene de Venecia a Roma ha hecho 109 millas y $\frac{3}{8}$. (Op. cit. pp. 158-159).

Aunque no podemos datar el origen de esta regla sabemos que se aplicaba desde antiguo a los problemas de alcanzar y perseguir. En Occidente, su primera aparición se sitúa en las *Proposiciones ad acuendos juvenes* de Alcuino de York (d. C. 775)[2] y en Oriente, mucho antes, por ejemplo, en el *Jiu zhang suan shu* del siglo I a.C., más conocido como los *Nueve capítulos* de la matemática china.

> *Dos caminantes, uno bueno y otro malo.* Un buen caminante hace 100 *bu*, mientras que un mal caminante hace 60 *bu* [supón que esos *bu* son recorridos en el mismo tiempo]. Teniendo en cuenta que el último va 100 *bu* por delante del primero, que lo alcanza, di en cuántos *bus* llegará uno al lado del otro.
>
> Respuesta: 250 bu. Método: De los 100 bu del buen caminante resta 60 bu del mal caminante, el resto es 40 bu, considéralo como el divisor. Multiplica 100 bu del buen caminante por 100 bu que va por delante el mal caminante, que es el dividendo. Divide, y tendrás el número de bu pedido. (Shen, Crossley, Lun, 1999, p. 329). O sea: s = $\frac{100\times 100}{100-60}$ que es la regla de dos.

Nota: Según Swetz (1989) *bu* es una medida de longitud equivalente a dos pasos, o 5 pies chinos, *chi.*

Aunque el nombre de esta regla ha sido poco utilizado a lo largo de la historia, no ocurre así con la regla que se aplicó también en otros problemas de "acciones simultáneas".

---

[2] Swetz (1989) atribuye el año 775 d.C. a las *proposiciones* de Alcuino (735-804), aunque Burholder (1993) señala que no fue convocado a la corte de Carlomagno hasta 782 d. C.

Objetivo y metodología

En este artículo, ofrecemos un panorama de esta regla mostrando su uso, aplicación y explicación tal y como ha quedado reflejada en la vieja tradición escolar reflejada en una selección de algunos de los libros de texto más importantes del pasado.

El estudio, es exploratorio, ya que no pretende confirmar ningún supuesto o hipótesis sino describir cómo se ha configurado un determinado contenido de enseñanza.

La metodología utilizada para presentar este panorama es la del análisis histórico y epistemológico propio de la Didáctica de la Matemática, donde el apelativo histórico y epistemológico adquiere un sentido particular. Es epistemológico, porque enlaza con los estudios relacionados con la constitución del conocimiento matemático y es histórico, porque enlaza con los estudios relacionados con la aparición y evolución de ese conocimiento (Gómez, 2018; 2020).

Esta metodología es cualitativa y descriptiva y toma los libros de texto, que han sido influyentes a lo largo de la historia como fuente principal de información, con un enfoque de aproximación global y a priori. Global, porque considera que estudiar textos aisladamente es insuficiente, y a priori, porque estudia los libros de texto como medio de instrucción, pero no para ver cómo estudiantes y profesores los usan sino para ver sus efectos en los resultados del aprendizaje.

Su ámbito de interés es la enseñanza de las matemáticas en su dimensión tradicional y de pasado. Su razón de ser es la de introducir referencias históricas para facilitar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

En el caso que nos ocupa, se persigue contribuir al desarrollo del pensamiento aritmético siendo sensibles a los métodos de resolución de problemas que los grandes matemáticos del pasado nos han legado.

LOS PROBLEMAS DE ACCIONES SIMULTÁNEAS

Bajo el nombre de problemas de acciones simultáneas se conoce una colección de problemas aritmético – algebraicos que tratan de agentes que emprenden varias acciones a la vez para lograr a un mismo fin o tarea.

Estos problemas se agrupan en tres categorías principales: la de dos móviles se mueven para alcanzar o encontrar uno a otro, que incluye los problemas de "correos"; la de varios agentes que cooperan para hacer un mismo trabajo, que incluye los problemas de grifos que llenan o vacían cisternas; y, la de varias tareas que se juntan para hacer una misma cantidad en un día, que incluye problemas como el de la fábrica de tejas.

A lo largo del tiempo los enunciados de estos problemas han ido cambiando, al adaptarse a los cambios sociales, desarrollos matemáticos, o incluso a los gustos o preferencias de los autores de los libros de texto, pero, conservando su contenido matemático de tal modo que han llegado a estandarizarse bajo una determinada forma que actúa como modelo, problema tipo o estereotipo con múltiples variantes. Ejemplos de estos problemas tipo son los siguientes:

Dos móviles que se mueven hasta alcanzarse en movimiento rectilíneo o circular.

> *El perro y la liebre.* Hay un campo que tiene 150 pies de largo. En una punta estaba un perro; y en la otra, una liebre. El perro persiguió a la liebre. Mientras que el perro hacía en un salto 9 pies por zancada, la liebre iba sólo a 7. ¿Cuántos pies, y cuántos saltos hizo

el perro persiguiendo a la liebre que escapaba hasta que fue atrapada? (Hadley y Singmaster, 1992, p. 115).

Planetas en conjunción. Si hoy se hallasen juntas dos estrellas, o planetas juntos, y en conjunción, cómo sabríamos por aritmética, sin ser Astrónomos, en cuanto tiempo se volverían a hallar juntos, como sucede en el presente año, entre Júpiter y Saturno, que se hallan juntos la víspera de Navidad, el cual ayuntamiento llaman los Astrónomos conjunción magna, por los grandes, y terribles efectos que suele causar, según ellos dicen, y la experiencia lo demuestra. (Cortés, 1724, p. 456)

Relojes en conjunción de agujas. Las dos agujas de un péndulo de minutos parten juntas del punto del mediodía. Se pide, ¿en qué puntos del cuadrante se encontrarán sucesivamente, durante una revolución completa de la de las horas? (Ozanam, 1778, p. 75).

Dos móviles que se mueven en sentido contrario hasta encontrarse en movimiento rectilíneo o circular.

El pato y el ganso que vuelan a encontrarse. Un pato salvaje vuela del mar del sur al mar del norte en 7 días, y un ganso salvaje vuela del mar del norte al mar del sur en 9 días. Teniendo en cuenta que las dos aves comienzan en el mismo momento, di: ¿Cuándo se encontrarán? (Shen, Crossley y Lun, 1999, p. 337).

Dos correos que se encuentran de Padua a Turín. Supongamos que hay 400 leguas de Pada a Turín, & que dos correos parten en un mismo instante, uno de Padua para ir a Turín y el otro de Turín para venir a Padua, & el que va de Padua a Turín, se ofrece a llagar en a Turín en 11 días, & e que va de Turín a Padua se ofrece a llegar a Padua en 9 días. Se pide (los correos cumpliendo su promesa) en cuántos días se encontrarán, & cuántas leguas habrán hecho cada uno. (Tartaglia, 1613, 2º parte, cap XI, fo. 6r).

Dos navíos que circundan una isla. Una isla tiene 50 leguas de circunferencia y salen dos navíos a un mismo tiempo de un puerto de dicha isla por partes contrarias; el primero la circuye en 8 días; el segundo en 3, se pregunta ¿en cuánto tiempo y en qué distancia se encontrarán? (Corachán, 1719, p. 293).

Trabajo cooperativo para hacer una misma tarea. Se conoce el tiempo que necesita cada uno para completar la tarea por separado y se pide el tiempo que necesitan juntos para completarla.

Barril que se vacía por dos agujeros. Un barril tiene dos caños de tal modo que destapando el primero se vaciaría el barril en 4 horas y destapando el segundo se vaciaría el barril en 6 horas. Se pide, destapando los dos a una, en cuántas horas se vaciaría el barril. (Calandri, 1974, p. 91).

Nave con dos velas. Un barco tiene dos velas en tal lugar que al izar la primera vela haría un viaje en 12 días y al izar la segunda haría el mismo viaje en 15 días. Se quiere saber, elevándolas a una en cuántos días harán la travesía antes mencionada. (Calandri, 1518, s/n).

Tareas que se juntan para hacer una misma cantidad. Se pide, que si se hiciera el mismo número de ambas tareas en un mismo tiempo cuántas se harían de cada una.

Uno que fabrica tejas. Una persona fabrica 38 tejas convexas o 76 tejas cóncavas al día. Si fabricara un número igual de ambas clases de tejas al día, di cuántas tejas haría. (Shen, Crossley y Lun, 1999. p. 340).

El mercader que cambia florines en dos clases de dineros. Es un mercader que le pide a un cambiador que le cambie un florín de oro con el pacto de que se lo cambie con dos monedas. Esto es, que le de la mitad de ese florín de oro en moneda Perpiñanesca, costando el florín en Perpiñán a razón de 21 sueldos y 7 dineros, y que le cambie la otra mitad del florín en moneda de catalana según el florín que el mercader le dio, que vale a

> razón de 17 sueldos y 3 dineros. Y que de estas dos monedas le cambie el florín dándole tantos sueldos y dineros de una como de la otra, ni más ni menos, y que el florín sea cambiado justamente (Nota: 1 sueldo = 12 dineros). (Santcliment, 1998, pp. 275-276).

LA REGLA DE DOS

Muchos de los problemas de acciones simultáneas pueden admitir acciones en el mismo sentido o en el contrario. Esto se ve claramente en los problemas de móviles, que pueden ser para alcanzarse o para encontrarse. En el primer caso la regla de dos se formula como la división de un producto por una suma (forma aditiva) y en el segundo como la división de un producto por una diferencia (forma sustractiva).

Así, por ejemplo, mientras que el problema del *perro y la liebre*, que es de alcanzar, se resuelve con la forma sustractiva, el problema del *pato y el ganso*, que es de encontrar, se resuelve en la forma aditiva:

> *El perro y la liebre.* Hay un campo que tiene 150 pies de largo. En una punta estaba un perro y en la otra, una liebre. El perro persiguió a la liebre para cazarla. Mientras que el perro hacía en un salto 9 pies por zancada, la liebre iba sólo a 7. Diga, quién quiera, cuántos pies, y cuántos saltos hizo el perro persiguiendo a la liebre hasta que fue atrapada.
>
> Medio campo son 75 pies y el perro recorre 75x9 = 675 pies, mientras que la liebre recorre 75x7=525 pies y que la encuentra (Burkholder, 1993, s/n).

Obsérvese que 75 pies viene de $\frac{150}{2}$; 2 viene de la diferencia entre las velocidades: 9-7. Luego, la regla que aplica Alcuino debe ser: el perro $\frac{150\times 9}{9-7}$ pies y la liebre $\frac{150\times 7}{9-7}$ pies, como manda la regla de dos sustractiva.

> *El pato y el ganso.* Un pato salvaje vuela del mar del sur al mar del norte en 7 días, y un ganso salvaje vuela del mar del norte al mar del sur en 9 días. Teniendo en cuenta que las dos aves comienzan en el mismo momento, di: ¿Cuándo se encontrarán?
>
> Suma el número de días, como divisor, su producto como dividendo. Divide, tendrás el número de días demandado. (Shen, Crossley y Lun, 1999, p. 337).

En notación simbólica $t = \frac{7\times 9}{7+9}$, que es la regla de dos aditiva.

Lo mismo ocurre en el movimiento circular:

> *Dos planetas en conjunción.* Si hoy se hallasen juntas dos estrellas, o planetas juntos, y en conjunción, cómo sabríamos por aritmética, sin ser Astrónomos, en cuanto tiempo se volverían a hallar juntos, como sucede en el presente año, entre Júpiter y Saturno, que se hallan juntos la víspera de Navidad, el cual ayuntamiento llaman los Astrónomos conjunción magna, por los grandes, y terribles efectos que suele causar, según ellos dicen, y la experiencia lo demuestra.
>
> Esta demanda bien la pudieras haber dejado para los Astrónomos, pues a ellos toca, pero todavía quiero darte contento, y advierte que primero se ha de saber cuánto tiempo tarda cada estrella, o planetas en darle la vuelta a su orbe. Y pues has hecho memoria de la magna conjunción de Júpiter y Saturno, propongamos el ejemplo de ellos. Y sepas que Júpiter tarda en dar la vuelta a su orbe doce años, y Saturno al suyo tarda treinta años, según parecer de Cardano, porque unos escriben que tardan más, y otros menos, y tomando el parecer de Cardano, digo, que multipliques los 12 años de Júpiter por los 30 de Saturno, y montarán 360 años, que partidos por 18, que es la diferencia que hay de 12 a 30, saldrán 20 años, y al cabo de tantos años se hallarán en conjunción los dichos planetas, que será el año de 1623. (Cortés, 1724, p. 456).

Cortés aplica la regla de dos sustractiva. En notación simbólica $t = \frac{12\times30}{30-12} = \frac{360}{18} = 20$ años

En el caso de los problemas del siguiente problema de juntar tareas se aplica la regla de dos aditiva

> *Uno que fabrica dos clases de tejas.* Una persona fabrica 38 tejas convexas o 76 tejas cóncavas al día. Si fabricara un número igual de ambas clases de tejas al día, di cuántas tejas haría.
>
> Respuesta: $25\frac{1}{3}$ tejas. Método: Suma las dos clases como divisor; multiplica las dos clases como dividendo. Divide, tendrás el número de tejas. (Shen, Crossley y Lun, 1999. p. 340).

En notación simbólica $\frac{38\times76}{38+76} = 25\frac{1}{3}$, que es la regla de dos aditiva.

Lo mismo ocurre con el problema del *mercader que cambia florines*.

> *El mercader que cambia florines en dos clases de dineros.* Es un mercader que le pide a un cambiador que le cambie un florín de oro con el pacto de que se lo cambie con dos monedas. Esto es, que le de la mitad de ese florín de oro en moneda Perpiñanesca, costando el florín en Perpiñán a razón de 21 sueldos y 7 dineros, y que le cambie la otra mitad del florín en moneda de catalana según el florín que el mercader le dio, que vale a razón de 17 sueldos y 3 dineros. Y que de estas dos monedas le cambie el florín dándole tantos sueldos y dineros de una como de la otra, ni más ni menos, y que el florín sea cambiado justamente (Nota: 1 sueldo = 12 dineros).
>
> Para esta y todas las semejantes razones que te surjan, debes ajustar el valor de los dos florines y hallar la suma. La cual será el partidor. Después multiplicarás las dos monedas, una con la otra, y es la cantidad que has de partir por la suma ajustada de las dos. Lo que a la partición vendrá será la cantidad que habrá de tener el mercader de cada moneda. Esto harás según se muestra en la práctica figurada [Adjunta las operaciones] (Santcliment, 1998, pp. 275-276).

Santcliment, adjunta en el lateral las operaciones para hallar el valor en dineros de 1 florín de Perpiñán que a 21 sueldos y 7 dineros vale 259 dineros y también las de 1 florín catalán que a 17 sueldos y 3 dineros vale 207 dineros.

Con estos datos aplica la regla de dos: $\frac{259\times207}{259+207} = 115 + \frac{23}{466}$.

EXPLICACIONES DE LA REGLA

Apoyando la regla en un múltiplo común

Liu Hui, el comentarista del s. III de los *Nueve Capítulos* (100 a. de C.), en el problema del *pato y el ganso* ofrece un razonamiento que justifica la regla.

Su argumentación se basa en que si el pato vuela durante *p* días para hacer un viaje y el ganso durante *g* días para el mismo viaje, entonces en *pg* días el pato hará *g* veces el viaje y el ganso lo hará *p* veces, por lo que juntos en *pg* días lo harán *p*+*g* veces; y [por regla de tres] un viaje lo harán en $\frac{pg}{p+g}$ días ((Shen, Crossley y Lun, 1999, p. 340).

Este mismo razonamiento se usa utiliza en textos posteriores, como por ejemplo en el problema de las *naves* de Pier Maria Calandri (1480), que es de trabajo cooperativo. Aunque Calandri lo enmarca en la regla de "falsa posición", ya que considera que el producto de los datos *pq*, es un valor supuesto.

> *Dos naves que se encuentran entre Pisa y Génova.* Son dos naves, una es de Pisa y va a Génova en 5 días y la segunda es de Génova va a Pisa en 3 días. Se pide, partiendo la de Génova y la de Pisa a la vez, en cuántos días se encontrarán.
>
> Haremos posición de que se encontrarán en la cantidad de días que queramos. Pongamos que se encontrarán en 15 días, de donde la primera que sale de Pisa y va a Génova en 5 días, en 15 días irá 3 veces y la que se parte de Génova y va a Pisa en 3 días, en 15 días irá 5 veces. Entre los dos habrán hecho este viaje 8 veces y queremos una vez, para lo que multiplicarás 1 por 15, hacen 15 y esto dividido por 8 viene 1 7/8. Y dirás que en 1 día 7/8 se encontrarán juntos, y haz esto en los semejantes. (Calandri, 1974, pp. 89-90).

Obsérvese que la regla para hallar el tiempo hasta el encuentro se sigue la proporción habitual en la falsa posición simple: $\frac{pg}{p+g} = \frac{t}{1}$. O sea, $\frac{5\times3=15}{5+3} = \frac{t}{1}$; de donde $t = \frac{5\times3=15}{5+3}$ que es la regla de dos.

Como alternativa a usar el múltiplo común *pg* se puede usar el mínimo común múltiplo de *p* y *g*. El siguiente ejemplo de trabajo cooperativo tomado del texto de Pier Maria Calandri (1480) ilustra el proceso.

> *El barril que se vacía por dos agujeros*. Un barril tiene dos caños de tal modo que destapando el primero se vaciaría el barril en 4 horas y destapando el segundo se vaciaría el barril en 6 horas. Se pide, destapando los dos a una, en cuántas horas se vaciaría el barril.
>
> Debemos hacer la posición de que el barril se vacía en 12 horas, entonces dirás: el primero vaciaría el barril en 4 horas, luego en 12 horas lo vaciaría 3 veces y, el segundo vaciaría el barril en 6 horas, luego en 12 horas lo vaciaría 2 veces. De donde juntos lo vaciarían 5 veces y nosotros queremos que se vacía una vez: por lo tanto, multiplica 1 por 12, hacen 12 y divídelo por 5, viene 2 $\frac{2}{5}$, y dirás que dicho barril se vaciaría en 2 horas $\frac{2}{5}$de hora, y haz esto en los similares. (Calandri, 1974, p. 91).

Obsérvese que 12 es el mínimo común múltiplo de 4×6, por lo que en vez de formar la regla tomando como dividendo de 4×6 y como divisor 4+6, Calandri toma como dividendo $\frac{4\times6}{2}$ y como divisor $\frac{4+6}{2}$, de modo que, en definitiva, la regla que aplica Calandri es: $\frac{\frac{4\times6}{2}}{\frac{4+6}{2}}$, que es equivalente.

También es posible usar un múltiplo común mayor que *pg*. Eso es lo que hace Ventallol (1521) que dobla el dividendo y el divisor para evitar operar con fracciones.

> *Dos que corren alrededor de una ciudad redonda*. Dos hombres corren al derredor de una ciudad que está murada redonda, y juntos los dos comienzan a correr de un mismo lugar, pero el uno rodea la ciudad en 4 horas, el otro a menester para rodearla 5 1/2 horas y corren tanto los dos que el mayor corredor alcanza a juntarse con el otro, y todavía perseveran de correr tanto que los dos juntos en un mismo punto y tiempo se hallan en el mismo lugar de donde partieron. Pregunto, en cuántas horas se hallaron juntos en el lugar de donde partieron.
>
> La regla es esta**.** Multiplica 4 por 5 $\frac{1}{2}$, y hallarás 22, dóblalos y serán 44 y tanto rodea la ciudad. Ahora parte 44 por 4 y te vendrán 11, y aquél de las 4 horas habrá rodeado la ciudad 11 veces en 44 horas. Después, parte 44 por 5 $\frac{1}{2}$ y te vendrán 8. Y tantas veces habrá rodeado la ciudad el de 5 $\frac{1}{2}$ en las 44 horas. Ahora mira cuánto hay de 8 hasta 11 y hallarás 3. Y de tanto alcanza el uno al otro. Ahora parte 44 por 3 y te vendrán 14 $\frac{2}{3}$ y en tantas horas se habrá juntado con él. (Ventallol, 1619, pp. 391-392)

Obsérvese que en vez de: $\frac{4\times5\frac{1}{2}}{5\frac{1}{2}-4}$ Ventallol toma $\frac{2\times4\times5\frac{1}{2}}{2(5\frac{1}{2}-4)}$ que es equivalente.

Apoyando la regla en la proporción

Otra explicación a la regla se encuentra en Ortega (1552), quién se apoya directamente en el método de la proporción.

> *El galgo y la liebre.* Un galgo va corriendo para alcanzar una liebre. Cada salto que da el galgo tiene ocho pies y cada salto que da la liebre tiene cinco. La liebre le lleva cien pies de ventaja al galgo. Demando en cuántos pies alcanza el galgo a la liebre
>
> Lo harás así: porque el galgo en cada salto que tiene 8 pies va alcanzando a la liebre en 3 [8-5]. Di por regla de 3: si 3 ha venido de 8, de qué vendrá cien. Multiplica 8 por 100 y resultará 800, pártelo por 3 y tendrás 266 y $\frac{2}{3}$, los pies en que alcanzará el galgo a la liebre. Si quieres saber en cuántos saltos alcanzará a la liebre, parte 266 y $\frac{2}{3}$ por 8, y tienes 33 y $\frac{1}{3}$ saltos (Ortega, 1552, fo. 205v).

Obsérvese que la proporción aplicada es: $\frac{8-5=3}{8}=\frac{100}{s}$, siendo s el número de pies que salta el galgo hasta alcanzar a la liebre. De donde resuelta que $s=\frac{8x100=800}{8-5=3}$, que es una regla de dos.

Apoyando la regla en el método cartesiano

Recordemos que en el método cartesiano se asignan letras a las cantidades que se buscan, las incógnitas, y se aplican éstas a las relaciones entre cantidades para dar lugar a la ecuación que permite resuelve el problema.

Con este método, Rubio (1878) ofrece el método estándar para los problemas de grifos en términos cartesianos.

> *Un estanque con dos caños.* Hallar el tiempo que tarda en llenarse un estanque por dos caños a la vez, sabiendo el tiempo que tarda en llenarse por cada uno de ellos.
>
> Llamemos a los tiempos conocidos *t*, *t'* y *x* al tiempo desconocido. Si uno de los caños llena el estanque en el tiempo *t*, en una unidad de tiempo llenará una porción de su capacidad igual a $\frac{1}{t}$, y en *x* tiempo llenará una porción $\frac{x}{t}$. Por igual razón el otro caño llenará en el tiempo *x*, una fracción de la capacidad del estanque representada por $\frac{x}{t'}$; pero estas dos fracciones componen toda la capacidad del estanque que podemos tomar por unidad; luego la ecuación es: $\frac{x}{t}+\frac{x}{t'}=1$.
>
> Solución.- Resuelta la ecuación nos da la fórmula $x=\frac{tt'}{t+t'}$ (Rubio, 1878, p. 351)

Obsérvese, como era de esperar, que al final lo que se obtiene es la fórmula general de la regla de dos.

Igualmente, Justo (1814) ofrece un método de la proporción para los problemas de móviles en términos cartesianos.

> *Galgo y liebre.* Un galgo a 100 varas de una liebre, ¿cuándo le alcanzará? En la suposición de que el perro anda 3 varas, mientras que la liebre anda 2.
>
> Supongamos que la liebre anda *x* varas antes de ser cogida; andará el perro *100+x*: y como estas dos distancias están en razón 2 a 3, será $\frac{2}{3}=\frac{x}{100+x}$ luego *3x=200+2x* ó *x=200*. Si

hubiera sido *m:n* la razón de las distancias, hubiera resultado, suponiendo 100 = a, $\frac{m}{n} = \frac{x}{a+x}$ y *nx=am+mx, nx-mx=am,* y *x*= $\frac{am}{n-m}$ (Op. cit., p. 181).

Nótese que finalmente la solución viene dada por una regla de dos: $\mathrm{x}=\frac{\mathrm{am}}{\mathrm{n-m}}$.

Para terminar con este panorama sobre la regla de dos, se recoge un tipo de problema que no es de móviles, ni de grifos, ni de juntar tareas, pero que si es de acciones simultáneas y también se resuelve con una regla de dos.

> *Las dos vasijas*. Dos vasijas contienen; 60 litros de vino de Benejama la una y 40 litros de vino de la Condomina (Partida de la Huerta de Alicante) la otra. Se quiere sacar simultáneamente de cada vasija una misma cantidad de vino y que sea tal, que echando en cada vasija el vino sacado de la otra, quede idéntico vino en los dos recipientes. ¿Cuánto es el vino que se ha de sacar?
>
> Sacando de la 1.ª vasija x litros y reemplazándolos por x litros de vino de la Condomina, la relación de la cantidad de Benejama a la cantidad de la Condomina es $\frac{60-x}{x}$.
>
> Sacando de la 2.ª vasija x litros y reemplazándolos por x litros de vino de Benejama, la relación del Benejama al Condomina es $\frac{x}{40-x}$.
>
> La ecuación, pues, del problema es $\frac{60-x}{x} = \frac{x}{40-x}$, $\frac{60}{x} = \frac{40}{40-x}$, o, $\frac{100}{40} = \frac{60}{x}$, de donde $x = \frac{60\times40}{100}$ (Pérez, 1895, pp. 161-162).

Obsérvese que de $\frac{60}{x} = \frac{40}{40-x}$ se obtiene x(60+40)=60×40, y de aquí que $x = \frac{60\times40}{60+40}$ que es la regla de dos.

CONCLUSIONES

El panorama que se ha descrito en lo anterior sobre la regla de dos, su uso, aplicación y explicación, pone de manifiesto su simplicidad algorítmica y su complejidad analítica. La regla es fácil de aplicar y difícil de comprender en sus fundamentos. Como regla aprendida “sin razones” carece de interés educativo, no así, discerniendo el razonamiento aritmético que la sustenta. Eso es, en última instancia, lo que se pretende con el tipo de trabajo que se acaba de presentar aquí, al pretender aprovechar las referencias históricas para incentivar el razonamiento aritmético, siendo sensibles a los métodos de resolución de problemas que los grandes matemáticos del pasado han pensado y nos han legado.

REFERENCIAS

Alcuino (735-804 d.C.). Propositiones ad acuendos juvenes, en J. P. Migne, *Patrologiae Cursus Completus: Patrologiae Latinae*. Vol. tomus 101, columnas 1143-1160. Paris.

Burkholder, P. J. (1993). Alcuin of York’s Propositiones Alcuini Doctoris Caroli Magni Imperatoris ad Acuendes Juvenes (“Propositions for Sharpening Youths”): Introduction and Commentary; Translation. *Bulletin for the History and Philosophy of Science and Technology, HOST Bulletin 1*(2). https://arxiv.org/pdf/1308.0892.pdf

Calandri, F. (1518). *Pictagoras Arithmetrice introductora*, Florencia: Bernardo Zucchecta. 1491.

Calandri, P. M. (1974). *Tractato d’abbacho.* A cura e con introduzione di Gino Arrighi. Pisa: Domus Galileana. 1480

Corachán, J. B. (1719). *Arithmetica demonstrada theorico-practica para lo mathemático y mercantil. Explicanse las monedas, pesos y medidas de los hebreos, griegos, romanos y de estos Reynos de España, conferidas entre sí*. Barcelona: Juan Piferrer.

Cortés, J. (1724). *Arithmetica Practica muy útil y necesaria para todo género de tratantes y mercaderes, la cual contiene todo el arte menor y principio del mayor…,*. Compuesto y ordenado por Gerónimo Cortés. Zaragoza: Herederos de Diego de Larumbe.

Gómez, B. (2018). El uso de la historia en la educación matemática: El caso de los gemelos póstumos. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1*(1), 11-21.

Gómez, B. (2020). Prólogo. En *Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores*. Carmen López-Esteban, Alexander Maz-Machado (eds.), (pp. 9-13). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Hadley, J. & Singmaster, D. (1992). Problems to sharpen the young. *Mathematical Gazette 76*(475), 102-126.

Justo, J. (1814). *Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría*. Tomo I. cuarta edición. Salamanca: En la imprenta de D. Vicente Blasco.

Ortega, J. de (1552). *Tractado subtilissimo d'arithmetica y geometría*. Granada. Impreso en casa de René Rabut.

Ozanam, M. (1692). *Récreations Mathématiques & Phisiques*. Nueva edición por M de CGF. Paris: Jombert. 1778.

Pérez, F (1895). *Lecciones de Aritmética elemental y de Álgebra elemental*. Alicante: Tip. De Galdó Chapulí Hnos.

Rubio, V. (1878). *Elementos de matemáticas*. *Tomo II. Aritmética y álgebra*. Tercera edición. Cádiz: Imprenta de la revista médica, de D. Federico Joly.

Santcliment, F. (1998). *Summa de l'art d'aritmètica*. Introducció, transcripció i notes a cura d'Antoni Malet. Vic: Eumo Editorial. 1482.

Shen, K. S., Crossley, J. N., y Lun, A. (1999). *The Nine Chapters on the Mathematical Art.* Beijing: Oxford, U. P. & Science Press.

Swetz, F. J. (1987). *Capitalism and arithmetic: The new math of the 15th century*. Chicago: Open Court. 1478.

Tartaglia, N. (1613). *L'Arithmetique de Nicolas Tartaglia Bresciangran mathematician et prince des practicien*. Divisée en deux parties. Recueillie & traduite d'italien en François, par Guillaum Gosselim. Premier partie. Paris: Chez Adrian Perier.

Ventallol, I. (1621). *Arismetica de Juan Ventallol*, traducida de la lengua catalana en castellano por el doctor Juan Bautista Tolrá. Va añadido un tratado de la Arte Mayor llamado Algebra o Regla de la Cosa. Tarragona: Gabriel Roberto. 1521.

Bernardo Gómez Alfonso
Universidad de Valencia, España
bernardo.gomez@uv.es