

Matemáticas, Educación y Sociedad

ISSN: 2603-9982

Matemáticas, Educación y Sociedad

**<http://mesjournal.es/>
editor@mesjournal.es**



Vol 4 No 2 (2021): Matemáticas, Educación y Sociedad

As transmissões duplas dos livros-texto de Lacroix e Legendre no século XIX: o caso da Colômbia e da Venezuela

Carlos Antonio Assis de Oliveira y Gert Schubring

1-20

¿Cómo definir una línea metodológica en el área de Matemáticas? Tomando decisiones en la escuela

Ángel Alsina Pastells

21-39

Educación matemática en Iberoamérica: Un estudio bibliométrico en SSCI

Cristina Rodríguez-Faneca, Cristina Pedrosa-Jesús y Astrid Cuida

40-53



ISSN: 2603-9982

Oliveira, C. y Schubring, G. (2021). As transmissões duplas dos livros-texto de Lacroix e Legendre no século XIX: o caso da Colômbia e da Venezuela. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 4(2), 1-20

AS TRANSMISSÕES DUPLAS DOS LIVROS-TEXTO DE LACROIX E LEGENDRE NO SÉCULO XIX: O CASO DA COLÔMBIA E DA VENEZUELA

Carlos Antonio Assis de Oliveira, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ),
Brasil

Gert Schubring, Universität Bielefeld, Alemanha

Resumo

Este artigo tem por objetivo analisar as transmissões dos livros-texto de Lacroix e Legendre para a Colômbia e para a Venezuela durante o século XIX. Nesta análise, destacamos os diferentes papéis educacionais exercidos pelos livros nos respectivos países. Para isso, mobilizamos metodologicamente os conceitos de transmissão (Schubring, 1999) e o da análise histórica de livros de matemática (Schubring, 1987, 2003). Analisamos, primeiramente, como os livros-texto de Lacroix e Legendre foram transmitidos para a Espanha e, secundamente, para a Colômbia e para a Venezuela. Destacamos o processo ativo dos pólos receptores dos livros-texto. Nas considerações finais, apresentamos algumas reflexões sobre a natureza dos processos de transmissão, mostrando as semelhanças e diferenças entre a Colômbia e a Venezuela.

Palavras-chave: *História da Educação Matemática na América Latina, Transmissão de ideias, traduções de Lacroix, Traduções de Legendre.*

Las dobles transmisiones de los libros de Lacroix y Legendre en el siglo XIX: el caso de Colombia y Venezuela

Resumen

Este artículo tiene como objetivo analizar las transmisiones de los libros de texto de Lacroix y Legendre a Colombia y Venezuela durante el siglo XIX. En este análisis, destacamos los diferentes roles educativos que juega el libro en los respectivos países. Para ello, movilizamos metodológicamente los conceptos de transmisión (Schubring, 1999) y el análisis histórico de los libros de matemáticas (Schubring, 1987, 2003). Analizamos, en primer lugar, cómo se transmitieron los libros de texto de Lacroix y Legendre a España y, en segundo lugar, a Colombia y Venezuela. Destacamos el proceso activo de los polos de

recepción de libros. En las consideraciones finales, presentamos algunas reflexiones sobre la naturaleza de los procesos de transmisión, mostrando las similitudes y diferencias entre Colombia y Venezuela.

Palabras clave: *Historia de la Educación Matemática en América Latina, Transmisión de ideas, Traducciones de Lacroix, Traducciones de Legendre.*

The double transmissions of the Lacroix and Legendre textbooks in the 19th century: the case of Colombia and Venezuela

Abstract

This article aims to analyse the transmissions of Lacroix and Legendre's textbooks to Colombia and Venezuela during the 19th century. In this analysis, we highlight the different educational roles played by textbooks in the respective countries. For this, we methodologically mobilise the concepts of transmission (Schubring, 1999) and of historical analysis of mathematics books (Schubring, 1987, 2003). We analyse, first, how the textbooks by Lacroix and Legendre were transmitted to Spain and, secondly, to Colombia and Venezuela. We highlight the active process of the receiving poles of textbooks. In the final considerations, we present some reflections on the nature of transmission processes, showing the similarities and differences between Colombia and Venezuela.

Keywords: *History of Mathematical Education in Latin America, Transmission of ideas, translations of Lacroix, Translations of Legendre.*

INTRODUÇÃO

O século XIX testemunhou grandes mudanças nas relações sociais, em grande parte influenciadas pela Revolução Francesa. Na Europa, por exemplo, tem-se a unificação dos Estados e a criação da concepção atual do papel do cientista. É neste século que os sistemas de instrução pública foram criados e institucionalizados em diversos países do ocidente.

Nesse contexto de grandes mudanças nas relações sociais, a história do ensino de matemática na América Latina é um caso particularmente interessante. A imensa maioria dos países que hoje a compõem conquistaram suas independências das metrópoles europeias durante o século XIX. Com a independência, vieram as tentativas de criação de sistemas públicos de educação.

Schubring (2006, p.666-668) elenca alguns problemas metodológicos apresentados pela História da Educação Matemática: muitas pesquisas analisam contextos de países específicos somente de maneira marginal, comumente o de origem do autor; a falta de uma comunicação internacional dos pesquisadores; considerar a história do ensino de matemática como uma tarefa fácil, que não precisa de maiores reflexões metodológicas entre outras questões. Tais problemas podem ser percebidos com relativa frequência nas pesquisas historiográficas sobre o ensino de matemática na América Latina (Oliveira e Schubring, 2020, pp.110-111).

Ao analisar o Ensino de Matemática nos séculos XIX e XX, Carvalho (2014, p.335) evidencia a falta de pesquisas historiográficas que considerem os conhecimentos transmitidos das antigas metrópoles para a América Latina. O fato do continente latino americano conter muitos países, nos coloca uma limitação quanto aos países a serem analisados. Nos apoiando nas pesquisas de Albis-González (1977), Sánchez e Albis-González (2012) e Beyer (2006, 2015, 2016, 2017, 2020), escolhemos a Colômbia e a Venezuela como países para nosso estudo. Junto com essa delimitação dos países, as pesquisas desses autores nos indicam uma grande circulação, no século XIX, dos livros-texto de dois autores franceses: Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Apesar destes não serem os únicos autores franceses de livros didáticos utilizados na Colômbia e na Venezuela, as pesquisas de Sánchez e Beyer evidenciam a grande importância destes dois autores para a sistematização do ensino de Matemática no século XIX nos respectivos países, o que justifica a escolha dos mesmos.

Feitas as considerações acima, dizemos que o objetivo deste trabalho é analisar como se deram as transmissões dos livros-texto de Lacroix e Legendre para a Colômbia e para a Venezuela durante o século XIX, destacando os diferentes papéis educacionais na utilização dos livros pelos respectivos países.

Na segunda seção, descrevemos o método que utilizaremos em nossa análise. A terceira seção é dedicada a uma breve apresentação sobre a vida e as obras de Lacroix e Legendre. Na quarta seção, analisamos algumas traduções dos livros-texto dos autores para o castelhano, publicadas na Europa e na América Latina durante o século XIX. Na quinta seção, descrevemos algumas particularidades das duplas transmissões dos livros-texto em questão. Na sexta seção, analisamos as diferentes maneiras como os livros de Lacroix e Legendre foram utilizados na Colômbia e na Venezuela.

METODOLOGIA

O conceito de Transmissão de Ideias é relativamente comum na História da Matemática. Ele é utilizado para interpretar como as ideias científicas circulam entre países. No entanto, a historiografia tradicional considera que as ideias científicas são transmitidas de maneira integral, inalteradas entre os polos envolvidos. Os livros “História da Matemática” de C. Boyer e “Uma história da matemática” de F. Cajori são exemplos. Além disso, considera que os polos emissores transmitem essas ideias de maneira neutra e que o polo receptor não modifica o conhecimento recebido pelos emissores. Podemos identificar nessa historiografia a forte presença de afirmações anacrônicas em suas análises.

Apoiando-se em Schubring (1989, 1999), propomos uma análise dessas transmissões sob uma outra ótica. Consideramos que as ideias transmitidas sofrem uma reinterpretação, que é feita pelo pólo receptor. Essas interpretações podem estar relacionadas tanto com a tradução de um livro quanto com a mudança de função de um polo para outro. Também propomos considerar as intencionalidades envolvidas nas transmissões, sendo estas frequentemente implícitas. Assim, destacamos o papel ativo do polo receptor das transmissões.

Nesta pesquisa, temos elaborado – graças à pesquisa inédita sobre transmissões não somente entre dois polos, mas entre múltiplos – a nova abordagem de transmissão dupla. Passamos a analisar situações mais complexas. Por exemplo, considerar a Espanha ao mesmo tempo como polo emissor e receptor de transmissões. Ou comparar as transmissões feitas pelos tradutores colombianos e venezuelanos, compreendendo o processo de interferência feita por eles.

A transmissão dupla é particularmente reveladora quando consideramos as traduções da geometria de Legendre feitas pelo engenheiro venezuelano Jesús Tébar. Nesse caso, Tébar é responsável por traduzir as notas do texto original, pois as versões espanholas que circulavam na Venezuela não continham essas notas.

Como o objeto de estudo deste trabalho são livros-texto de matemática, precisamos de uma metodologia específica para fazermos nossa análise. A análise histórica de livros didáticos de matemática (Schubring, 1987, 2003) tem como objetivo promover uma visão ampla e histórica do papel social atribuído aos livros didáticos de matemática. Com isso, podemos entender como os livros didáticos foram importantes na determinação dos currículos de matemática durante a consolidação dos sistemas de ensino.

Para tal objetivo, Schubring (2003, p.126) considera três indicações gerais: a primeira é procurarmos por modificações nas diversas edições de um livro-texto escolhido, buscando evidências de alterações epistemológicas na concepção do autor. A segunda é identificar eventuais modificações correspondentes em outros livros-texto do mesmo autor, procurando nos campos conceituais relacionados. A terceira é considerarmos como as modificações estão relacionadas ao contexto político-educacional em questão.

Como o objeto de estudo é um texto escrito, isso nos impõe a necessidade de um método específico para realizarmos nossas interpretações. Nos apoiamos na concepção de Hermenêutica Objetiva apresentada por Schubring (2005, 2019). Nesta abordagem consideramos o conteúdo do livro-texto como um texto escrito que deve ser interpretado de maneira objetiva, minimizando o papel da subjetividade. Assim, devemos considerar o texto em sua língua original e destacar os contextos sociais e culturais do autor em questão. Nossa intenção é analisar a obra tanto no conteúdo matemático do texto em si quanto na sua relação com o sistema político-educacional.

É importante mencionarmos que este artigo é fruto das pesquisas realizadas durante o mestrado do primeiro autor, Carlos Oliveira, sob orientação do professor Gert Schubring. Isso explica o fato de nosso referencial metodológico apoiar-se amplamente nas reflexões e propostas apresentadas por Schubring desde a década de 1980.

OS AUTORES E SUAS OBRAS

Sylvestre-François Lacroix (1765-1843)

Sylvestre-François Lacroix nasceu em Paris no dia 28 de Abril de 1765. Tornou-se órfão de pai ainda na infância e viveu em humildes condições com sua mãe a partir de então (Domingues, 2008, p.8). No início de sua adolescência, frequentou as aulas de matemática do *Collège Royal de France*, que eram abertas ao público (ibid., p.8).

Uma das principais contribuições para sua educação foi feita pelo matemático Gaspard Monge (1746-1818). Segundo Domingues (2008, p.9), Lacroix tornou-se um grande discípulo de Monge já nos primeiros anos de seus estudos. Entretanto, suas primeiras tentativas de realização de pesquisas matemáticas são anteriores. Lacroix com apenas 15 anos já trabalhava com observações astronômicas.

Aos 17 anos conseguiu seu primeiro emprego como professor de matemática na *École des Gardes de la Marine*, uma escola militar francesa. Para os propósitos deste artigo, apresentaremos alguns pontos importantes de sua carreira a partir de 1793. Neste ano, Lacroix retorna à Paris após alguns anos fora e começa seu envolvimento com questões político-educacionais.

Em 1794, Lacroix ocupou o cargo de *chef de bureau* (chefe de gabinete) da *Commission d'Instruction Publique*, onde permaneceu até 1799. Durante sua passagem pela Comissão, fez grandes contribuições para a construção de um sistema público de educação na França, ajudando no estabelecimento da *École Normale* e na formulação de programas para as recém criadas *Écoles Centrales* (Domingues, 2008, p.14). Ainda em 1794, Lacroix participa como membro do júri do primeiro concurso para a escolha de livros elementares.

Em 1795, Lacroix tornou-se professor de matemática da *École Centrale des Quatre-Nations*. Grande parte dos livros que Lacroix publicou foram destinados a essa instituição. Além disso, de 1795 a 1798, Lacroix foi examinador de admissão da *École Polytechnique*. Em 1799, ele tornou-se professor de análise matemática desta instituição.

Ainda em 1799, Lacroix tornou-se membro da primeira classe de ciências físicas e matemáticas do *Institut Nacional*. O *Institut* tinha sido criado em 1795 e tinha, em grande parte, a mesma função da *Académie des Sciences*, que foi dissolvida na Revolução Francesa. Schubring (2003, p.108-110) destaca que o *Institut*, em um relatório de 1797, ressalta a relação entre o progresso na pesquisa e a clareza dos fundamentos científicos. Frisamos a posição do *Institut* de considerar Lacroix com o mesmo nível dos inventores¹.

O conteúdo do relatório nos mostra a grande relevância que Lacroix conseguiu ao escrever seus livros. Isso é o contrário do que a historiografia tradicional costuma destacar. Dá-se muita ênfase ao fato de Lacroix não se destacar pelas suas pesquisas em

¹ Desde a segunda metade do século XVIII, a função de escrever livros elementares era destinada aos sábios, os inventores do conhecimento.

matemática. No entanto, o relatório nos mostra que esse autor era considerado no mesmo nível que os inventores.

Com o início da era napoleônica, as *Écoles Centrales* são fechadas e substituídas pelos *Lycées*. Com essa mudança, em 1804, Lacroix é indicado como professor de matemática no *Lycée Bonaparte* (Domingues, 2008, p.15). O autor deixou o cargo de professor nesta instituição em 1815.

Em 1809, Lacroix troca sua posição de professor na *École Polytechnique*. Ele ocupa o cargo de examinador permanente. Isso lhe proporcionou um maior salário e, também, mais prestígio (ibid. p.18-19). No mesmo ano, ele passou a ocupar a cadeira de cálculo diferencial e integral na recém criada *Faculté des Sciences de Paris*.

Destacamos que Lacroix trabalhou em todos os regimes políticos da França. Passando pelo antigo regime, o período revolucionário, o período napoleônico e a restauração da monarquia em 1815. É interessante dizer que Lacroix ocupou cargos nas maiores instituições de ensino da época, muitas vezes ao mesmo tempo. Com isso, vemos que Lacroix tem uma grande importância para a educação.

Ao fazer análise da importância de Lacroix para a educação francesa, Schubring destaca que:

Lacroix pode ser visto como um protótipo e um primeiro realizador do programa de *livres élémentaires* destinado a reestruturar o conhecimento matemático ensinado de acordo com as invenções científicas mais avançadas. Ele conseguiu realizar tal programa de maneira impressionante para o cálculo diferencial e integral. (Schubring, 2003, p.108)

Seus livros podem ser considerados como altamente influentes na educação francesa durante um período de 50 anos (Schubring, 1987, p.41), indo de 1795 até 1845. O sucesso inicial está relacionado com o fracasso do concurso de livros elementares de 1794.

Sabemos (Schubring, 1987, p.42) que o maior interesse de Lacroix em escrever livros-texto para o ensino secundário começou após sua estadia na *École Normale* do ano III (1795). Nos primeiros anos como professor desta instituição, Lacroix publicou, em 1797, o *Traité élémentaire d'arithmétique*. Este tratado não é uma obra original de Lacroix, mas sim uma cópia “em grau considerável a obra do Cidadão Briot, um professor de matemática na *École Centrale do Département de l'Oise*” (Lacroix, apud. Schubring, 2003, p.110).

Em 1798, temos a publicação do *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique*, et d'application de l'algèbre á la Géométrie. O livro teve pelo menos 11 edições, sendo esta última publicada em 1863, ou seja, 20 anos após a morte de Lacroix.

Em 1799, Lacroix publica dois importantes livros-texto: o *Éléments d'Algèbre* e *Éléments de Géométrie*. Estes livros são ótimos exemplos para identificarmos influências sociais em um livro-texto de matemática.

A publicação do livro-texto de geometria de Lacroix foi motivo de uma controvérsia de Lacroix com Legendre. Em 1799, a comissão de instrução pública francesa deliberou sobre a utilização de apenas *cours complet de mathématiques*. Lacroix não tinha um *cours* completo de matemática; na sua produção até aí faltou um livro chave para a matemática escolar: um livro didático de geometria. Ele então escolhe publicar um livro de geometria. Essa atitude de Lacroix gera um conflito de interesse com Legendre que teve publicado em 1794 o primeiro novo tal livro didático de forma emblemática para o sistema de ensino público.

O livro de álgebra está envolvido com outras questões. Segundo Schubring (2018, p.82), o processo de disseminação das concepções de Carnot sobre os números negativos é exemplificado pelas alterações feitas por Lacroix em seu livro de álgebra, mais precisamente. Na primeira edição, de 1797, a concepção apresentada por Lacroix era baseada em uma abordagem com o foco na reinterpretação dos números negativos. Destacamos que o livro era uma adaptação da álgebra de Clairaut de 1746 (Schubring, 2003, p. 56). Na segunda edição, de 1799, Lacroix sofre influência das obras de Bézout. Ele iniciou um processo gradativo de recusa dos números negativos. Assim, as quantidades negativas foram concebidas com algumas restrições matemáticas. Na terceira edição, de 1803, ele optou pela recusa total em aceitar soluções negativas como válidas. Sempre se referindo a elas como uma solução “absurdité” (Schubring, 2003, p.124).

O grande sucesso editorial dos livros-texto de Lacroix no início do século XIX contribuiu fortemente para o amplo alcance da recusa dos números negativos na sociedade francesa. Este sucesso está conectado ao fato dos livros de Lacroix terem exercido um monopólio dos livros-texto de Matemática utilizados nas escolas secundárias.

Em 1816, o *Cours Complet de Mathématiques à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations* era composto por 10 livros: *Traité élémentaire d'Arithmétique; Éléments d'algèbre; Éléments de Géométrie; Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie; Complément des Éléments d'Algèbre; Complément des Éléments de Géométrie, Éléments de Géométrie descriptive; Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral; Essais sur l'Enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, ou Manière d'étudier et d'enseigner les Mathématiques; Traité élémentaire de Calcul des Probabilités; Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral.*

Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) nasceu em Paris no dia 18 de setembro de 1752. Destacou-se por diversas contribuições para a Matemática. As mais notáveis feitas na área de teoria dos números e de funções elípticas.

Destacamos o fato de que Legendre não era um pesquisador da área de geometria. No entanto, ele parece ter-se animado com os projetos da Revolução Francesa de escrever livros elementares. Seu livro instaurou uma nova concepção de rigor em geometria para a época. Em 1810, temos a fala de Delambre: “M. Legendre tomou a si fazer em nós o gosto pelas demonstrações rigorosas” (Delambre, apud. Schubring, 2009, p.359).

Para entendermos o contexto de popularização do livro de Legendre, é imprescindível que falemos de Lacroix (1765-1843). Em síntese, destacamos uma grande diferença de Lacroix para Legendre: Lacroix tinha a ambição de ser um autor utilizado em todas as disciplinas da Matemática. Lembramos que Lacroix tinha grande envolvimento político com a educação. Enquanto isso, Legendre era o extremo oposto. Viveu concentrado em suas pesquisas e não procurou por renome público ou cargos políticos (Schubring, 2009, p.362), apesar de ter conquistado ambos.

Em 1799, Lacroix decidiu que escreveria um livro dedicado à geometria. Lacroix tinha como objetivo completar seu *cours* de matemática e conseguir com que seus livros fossem escolhidos pela comissão de instrução pública. Legendre sentiu-se ameaçado, visto que ele era o único livro de geometria que apresentava a geometria de maneira rigorosa.

Por isso, Legendre marcou um encontro com Lacroix para tentar fazer com que este desistisse dessa ideia (Schubring, 2009, p.362). Apesar de num primeiro momento

Lacroix ter aceitado em não publicar um livro de geometria, depois de sua conversa com Legendre, ele ameaçou retirar outros dois de seus livros (aritmética e álgebra) da editora de Duprat, um editor de importantes livros de Matemática.

Como tal atitude teria sérias consequências econômicas para a editora, Duprat indagou Legendre sobre tais problemas. Legendre envia uma carta para Lacroix, em fevereiro de 1799, em que reforçava o que fora acordado. Para minimizar os efeitos de Lacroix ter que desistir de seu projeto, Legendre propunha a Lacroix que continuasse utilizando seu livro na sua posição de professor na *École Centrale des Quatre-Nations*, mas que agora poderia complementar as aulas com outras obras. Mas agora Legendre propunha um oligopólio em detrimento do monopólio que seu livro tinha (Schubring, 1987, p. 46).

Durante determinado tempo, Lacroix conseguiu o monopólio de todos os livros de matemática que eram utilizados nos liceus (Schubring, 2003, p.103-105). Entretanto, em outras instituições o livro de Legendre era mais utilizado que o de geometria de Lacroix— e em particular em muitos países, mesmo além da Europa do Oeste: na Rússia, no Império Otomano, na Grécia e na Pérsia (Schubring, 2009, p.365).

O livro *Éléments de Géométrie* teve sua primeira publicação no ano de 1794, um pouco antes da realização do primeiro concurso de livros didático. Os livros publicados nesse período seguiam o modelo da elementarização do conhecimento, ideal propagado pelo Iluminismo. Com seu relativo sucesso nos primeiros anos, já em 1799 publicou-se a segunda edição, agora contando com o apêndice de Trigonometria.

Em 1799, com o fim da ênfase na escrita de livros pelo método analítico, Legendre publica um extenso texto anexo sobre a trigonometria, onde utiliza o método sintético. Ao contrário de alguns revolucionários, o Legendre não tinha tanto apreço pelo método analítico e entendia que não existia um método ideal para explicar todos os assuntos.

Um outro ponto de destaque é que em diversas traduções o apêndice de trigonometria foi publicado como um livro separado. Nossas pesquisas indicaram que tal acontecimento se justifica em grande parte pela questão econômica. O fato de ser possível diminuir em 100 páginas o livro sem perder o conteúdo principal fazia com que o custo de produção fosse mais baixo.

As novas edições foram publicadas em 1800, 1802, 1804, 1806, 1808, 1809, 1812, 1813, 1817 e 1823. Depois da morte de Legendre, em 1833, o livro ainda recebeu mais duas edições: em 1838 e 1840, ambas com o mesmo texto da 12ª edição de 1822. Isso nos mostra a grande popularidade do livro durante a primeira metade do século XIX.

No entanto, isso é uma pequena parte da dimensão que tal livro alcançaria no século XIX. Uma segunda tradução foi realizada por Jesús Muñoz Tébar na Venezuela em 1908 (Beyer, 2020), uma evidência da demanda por tal obra nas Américas no século XX.

Na década de 1840, a editora aceitou Marie Alphonse Blanchet (1813-1894) como organizador de edições revisadas do livro. Blanchet estudou na *École polytechnique* (1833-1835) e foi professor em escolas privadas de ensino secundário. Durante sua trajetória, Blanchet teve pouco destaque no Ensino de Matemática, publicando, além dos elementos de geometria, apenas uma coleção de exercícios geométricos (Schubring, 2009, p.367).

Em 1845, com a primeira edição do texto alterado por Blanchet, a editora acrescentou uma reedição da 14ª edição, que havia sido relançada em 1842. Em 1849, Firmin-Didot publicou a segunda edição de Blanchet, acrescentando também a reedição original, porém chamando-a desta vez de 15ª edição.

As mudanças feitas por Blanchet ocorreram no corpo do texto. Essas mudanças foram tantas, que na primeira versão modificada pelo editor, o livro foi publicado como um livro duplo. Isto é, após o término da versão modificada, foi incluída uma versão publicada originalmente por Legendre.

As alterações também são responsáveis por um outro fator que torna a análise do livro de Legendre ainda mais interessante: o processo de reinício de contagem das edições, isto é, quando Blanchet começou a alterar o livro, ele reiniciou o processo de contagem das edições, e intitulando sua versão como sendo uma nova edição (“Nouvelle Édition”). Esse fato é importante por mostrar ainda mais o sucesso do livro de Legendre.

As reedições das versões originais de Legendre não se restringiram à primeira metade do século XIX, mas continuaram na segunda metade com versões originais, publicadas pela mesma editora, paralelamente às novas edições de Blanchet, até ao menos os anos 1870.

Um fato de destaque é que mesmo depois das versões alteradas por Blanchet terem sido publicadas, em 1862—ou seja, 17 anos após a primeira modificação—, a editora Firmin Didot publicou uma versão original de Legendre, ainda intitulada de 15ª edição. Além disso, houve durante toda a segunda metade do século XIX edições “piratas” do livro original, publicadas em Bruxelas. Dito isso, supomos a existência de uma demanda pelo livro original, já que a versão de Blanchet já tinha alcançado relativo sucesso com suas versões anteriores.

O livro de Legendre foi um sucesso tão grande que podemos identificar traduções publicadas em, pelo menos, dezessete países. Sendo algum deles a Itália (1802) (primeira tradução conhecida), a Espanha (1807) e o Brasil (1809). Um fato de grande importância para a dimensão de utilização desse livro é a existência de traduções concorrentes feitas em países como a Itália e a Grécia, que chegou a ter várias traduções com diversas reedições cada uma (Schubring, 2009, pp. 366-373).

Legendre começa seu livro explicando qual seria o objeto de estudo da geometria: “A geometria é uma ciência que tem por objeto a medida da extensão. A extensão tem três dimensões, longitude, latitude e altura.” (Legendre, 1802, p.1, tradução nossa). A partir daí, passa para o conceito, nesta ordem, de linha (comprimento sem largura), ponto, reta, superfície (tem comprimento e largura, mas não altura), plano e sólido ou corpo (tem as três medidas da extensão). Ou seja, o autor apresenta as definições dos conceitos em ordem crescente de dimensões.

Já em Blanchet, as definições começam pela ideia de que um corpo ocupa um determinado lugar do qual se chama volume: “Todo corpo ocupa no espaço indefinido um lugar que se chama volume” (Legendre, 1849, p.1, tradução nossa). A partir dessa primeira, temos que os termos são definidos, nesta ordem: os conceitos de superfície (limite que separa o corpo do espaço que o rodeia), de linhas (lugar onde as superfícies dos corpos se encontram) e o de ponto (lugar em que as linhas se encontram). Assim, vemos que as definições partem da dimensão mais alta para a mais baixa.

Tais mudanças configuram uma mudança epistemológica para com a geometria. Um dos motivos apresentados por Blanchet para justificar as alterações foi alegar que a obra original continha imperfeições e algumas lacunas.

Um dos temas que mais atraía a atenção de Legendre era a teoria das paralelas. Todavia, Blanchet, além de ter excluído as reflexões feitas por Legendre em suas notas, também mudou praticamente todas as proposições sobre o tema no capítulo I.

Uma das principais modificações feita por Blanchet está na utilização do método dos limites, um método da Matemática superior. Nas primeiras definições e nas demonstrações envolvendo círculos e corpos redondos, o método é utilizado. Com isso, ele teve que introduzir explicações sobre o que seria esse método. Blanchet alterou algumas demonstrações, e estas modificam a concepção de Legendre, destacamos Legendre:II.XVI e II.XVII e Blanchet:II.XVIII, que envolvem as diferenças entre grandezas comensuráveis e incommensuráveis.

AS TRADUÇÕES ESPANHOLAS

Durante o século XIX, a Espanha apresentou uma complicada legislação referente ao ensino, principalmente nos currículos. Em menos de 75 anos, mais de 25 currículos foram empregados na disciplina de matemática. Segundo Ausejo (2014, p. 286), a explicação para tantas mudanças curriculares é a instabilidade política da Espanha durante esse período. Liberais e conservadores se alternavam no poder, modificando as alterações feitas pelo outro. Além disso, tem-se a grande influência dos lobbies acadêmicos (Ausejo, 2014, p.286), que na maioria das vezes agia por interesse próprio, dificultando a consolidação de um determinado currículo.

Em 1807, as mudanças de regulamentação da Universidade de Salamanca, feitas em 1771, foram estendidas para todas as universidades espanholas. Porém, essas regulamentações não foram implementadas até o fim da Guerra de Independência contra Napoleão, que durou de 1808 até 1814.

Em 1836, os Institutos são criados. Os institutos eram instituições de ensino secundário para a Espanha. Eles estavam organizados de acordo com os planos de Gaspar Melchor de Jovellanos, uma importante figura do Iluminismo espanhol. A matemática tinha um papel relevante nesses institutos.

Em 1845, temos novas regulamentações que criam as divisões entre o primário, o secundário e o superior. Em 1857, a Lei de Educação Pública divide o ensino secundário em dois ramos: os estudos genéricos e os estudos aplicados às profissões industriais (Ausejo, 2014, 287).

Na Espanha, durante todo o século XIX, nota-se um processo de transmissão muito relevante de livros-texto vindos da França. Um dos livros que mais foi utilizado na primeira metade do século XIX foram os livros de Lacroix, que foram traduzidos para o espanhol por José Rebollo Morales, a partir de 1807, e intitulados *Curso Completo Elemental de Matemáticas Puras*, em quatro volumes. Até a segunda metade, um dos mais utilizados foi *Éléments de Géométrie* de Legendre, traduzido por Antonio Gilmán em 1807 (Ausejo, 2014, p.288).

Além dos livros de Lacroix e Legendre, identificamos outros livros-texto que foram bastantes utilizados na primeira metade do século XIX: *Cours complet de Mathématiques pures* de Francoeur, publicado por Alberto Lista como sendo seu próprio curso e intitulado *Elementos de Matemáticas puras y mixtas*, em 1822.

Outros livros traduzidos foram *Éléments d'arithmétique* e *Éléments d'algèbre*, de Bourdon. *Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral* de Boucharlat. *Résumé des leçons d'analyse données à École Polytechnique* de Navier. *Traité de Mécanique* de Poisson. E o *Cours de géométrie descriptive* de Olivier (Ausejo, 2014, p. 287-288)

Entre 1846 e 1850 (Veja apud Ausejo, 2014, p.288), o governo publicou uma lista oficial de livros-texto que deveriam ser utilizados no ensino secundário. Nessa lista constavam

obras de Lacroix, Bourbon e Legendre. A partir de 1850, a lista de livros indicados excluiu os autores franceses, permanecendo apenas os três espanhóis e um novo livro, de 1852, de Acisclo Fernández Vallín, o Tratado elemental de Matemáticas (Ausejo, 2014, p.288)

Nas últimas décadas do século XIX, a influência francesa continuou, com os principais nomes sendo: Briot, Rouché e Comberousse, Serret (Ausejo, 2014, p. 288). Destacamos que os franceses tiveram livros de todas as áreas traduzidos para o castelhano.

É importante lembrar que o conceito de transmissão utilizado no trabalho considera que o receptor da transmissão tem um papel ativo no processo, ou seja, apesar de frisarmos que quase todos os livros vinham da França, os tradutores espanhóis atuaram ativamente no processo de produção do conhecimento.

As traduções de Lacroix

O catedrático espanhol José Rebollo y Morales (17??-18??) foi responsável pela primeira tradução dos livros de Lacroix. Mesmo intitulando sua edição de *Curso Completo Elemental de Matemáticas Puras*, Rebollo traduziu apenas 4 dos 10 livros que compõem o *Cours* de Lacroix. Os livros traduzidos foram os de aritmética, álgebra, geometria e trigonometria (aplicações de álgebra à geometria).

O fato de Morales ter apenas traduzido os livros mais básicos está em consonância com o que foi afirmado por Ausejo (2014, p.285-286): no ano de 1807 o governo espanhol estendeu a regulamentação da Universidade de Salamanca, de 1771. Houve um relativo destaque para as disciplinas mais básicas da matemática e os cursos foram definidos de maneira mais precisa.

Os livros traduzidos estão relacionados às novas disciplinas regulamentadas em 1807. Assim como as tentativas de organizar o sistema educacional espanhol em 1836 (Ausejo, 2014, p.286), podemos notar que essa é exatamente uma das datas de publicação das novas edições da tradução na Espanha. Além disso, destacamos que todas as edições foram publicadas pela Imprensa Real. Isso mostra o interesse do estado na produção desses livros.

Rebollo faz algumas reflexões sobre a importância dos livros de Lacroix para o ensino de matemática, além de dar algumas evidências de acontecimentos de sua época no prólogo do livro de aritmética, o primeiro a ser publicado, em 1807.

Rebollo não foi o único a traduzir os livros de Lacroix. O padre espanhol Lamberto Pelegrín (17??-18??), residente em Marsella, também traduziu os livros de aritmética e álgebra. Pelegrín teria publicado essas duas obras em Valencia, pela Imprensa de Francisco Brusola, em 1812 (Beyer, 2016, p.241).

Em 1826 Pelegrín publicou um “Curso completo de matemáticas puras”. No entanto, segundo Beyer (2016, p.241), com a historiografia produzida até agora, não foi possível identificar se o livro seria uma tradução da obra de Lacroix ou uma produção própria de Pelegrín.

Apesar da existência de traduções concorrentes, as versões comumente utilizadas na época eram as de Rebollo. Durante a segunda metade do século XIX, as traduções de Rebollo foram dando lugar a novas obras espanholas e autores franceses mais modernos.

Segundo Beyer (2016, p.240), as alterações feitas por Rebollo causaram uma nacionalização do livro. Rebollo modificou as unidades de medida de metros para outra de uso local. Modificou também as unidades monetárias, trocou de francos para reales

(Beyer, 2021, p.240-241). Essas modificações são de extrema importância para entendermos a dinâmica das transmissões. Destacamos o papel ativo do polo receptor.

A tradução de Legendre

A primeira tradução do livro-texto de Legendre foi feita por Antonio Gilmán. Essa tradução foi publicada em Madrid pela Imprenta de Repulles, em 1807. A segunda tradução foi publicada em 1827, em Paris.

Como a primeira edição modificada por Blanchet data de 1845, só podemos analisar as eventuais concorrências entre as edições na segunda metade do século XIX. Desta maneira, chamamos a atenção para um fato não ainda muito bem entendido na historiografia atual quanto à ampla disseminação internacional e longa do livro. A obra não foi primeiramente utilizada nas versões originais --no caso, pelos primeiros 50 anos, de 1794 até 1845-- e depois, na segunda metade do século XIX, apenas com a utilização das versões "blanchetianas". Bem diferentemente, podemos constatar como nova evidência que foram publicadas --e assim, disponíveis e acessíveis-- ambas versões paralelamente na segunda metade do século XIX.

Podemos destacar o fato da tradução de Gilmán ser uma tradução muito fiel ao livro original, sendo identificadas pouquíssimas alterações no texto. As poucas diferenças estão concentradas no âmbito gramatical. Por exemplo, no segundo parágrafo da primeira definição do livro, encontramos a seguinte frase no original: "L'étendue à trois dimensions, longueur, largeur et hauteur." (LEGENDRE, 1802, p. 1), enquanto que na versão de Gilmán tem-se "La extension tiene tres dimensiones, longitud, latitud, y altura ó profundidad." (Legendre, 1807, p. 1). Aqui podemos notar apenas o acréscimo de um sinônimo para referir-se à palavra altura, que neste caso seria profundidad.

Apesar do exemplo acima, nem todas as mudanças são apenas de palavras específicas, em alguns casos vemos a reestruturação da frase, mas com o significado equivalente. Vemos na primeira proposição do Livro I: "Les angles droits sont tous égaux entre eux." (Legendre, 1802, p.6), enquanto que na versão traduzida encontramos "Todos los ángulos rectos son iguales." (Legendre, 1807, p.6). Vemos que ambas as frases expressam a mesma propriedade.

A versão espanhola, apesar de não ter sido publicada nas Américas, apresenta grande relevância para a disseminação do livro nos países de língua castelhana. Analisando a presença do livro de Legendre na América Hispânica, podemos constatar que até a década de 1860, circulavam versões do livro em francês e em castelhano, justamente as traduções feitas por Gilmán.

AS TRANSMISSÕES DUPLAS

O Curso Completo Elemental de Matemáticas Puras de Rebollo e o Elementos de Geometria de Gilmán foram livros-texto muito utilizados na Espanha durante a primeira metade do século XIX. Ausejo (2014, p.288-289), ao listar os autores mais populares, indica o nome de Lacroix e de Legendre como autores franceses influentes na Espanha.

Seus livros começaram a ser traduzidos já na primeira década do século XIX. Isso é uma evidência da influência destes autores no contexto escolar espanhol. Destacamos que os livros originais foram lançados a partir de 1794, o que indica certa demanda por tais livros. No entanto, essa época é marcada pela tradição dos livros-texto serem utilizados, na prática, como currículos (Schubring, 1987).

Assim, a tradução desses livros-texto pode sugerir uma mudança político-educacional. Isso é confirmado por Ausejo (2014, p.286), quando a autora relata a nova regulação das universidades espanholas publicada em 1807. Essa nova regulação se destaca por implementar estudos de aritmética, álgebra, geometria e aplicações de álgebra à geometria para as universidades.

Destacamos que os anos de 1807 e 1808 marcaram o início da invasão napoleônica à Espanha. Isso gerou fortes mudanças políticas. Por um período de cerca de 6-7 anos, a Espanha esteve sob domínio francês. Com isso, a regulamentação criada em 1807 só foi implementada com o fim das guerras de independência, em 1816. Destacamos que esse é exatamente o período que eclodem as revoluções de independência na América Latina, que culminaram na independência da Colômbia e da Venezuela em 1821. Além disso, vários outros países latino americanos conquistaram suas independências nesse período.

Isso explica, por exemplo, o motivo de Rebollo ter demorado para publicar a tradução do livro de geometria e de aplicações de álgebra à geometria. A primeira edição dos livros de aritmética e álgebra foram publicadas em 1807 e 1808. Enquanto a primeira edição da geometria é de 1819.

Segundo Ausejo (2014, p.286), após a morte de Fernando VII (1784-1833), importantes tentativas de organização do sistema de ensino foram feitas. Os currículos de 1836, 1845 e 1857 são de especial importância para a consolidação do ensino secundário na Espanha.

Em uma lista de livros-texto estabelecida para o ensino secundário pelo governo espanhol entre 1846-1852, encontramos o nome de Lacroix (Ausejo, 2014, p.288). O caso de Legendre é representado pelo lançamento de sua segunda edição em 1827. Isso mostra que a influência destes autores durou toda a primeira metade do século XIX.

Disso isso, destacamos a maneira como os livros-texto de Legendre e Lacroix foram transmitidos: primeiro eles são utilizados na Espanha, depois as traduções espanholas são transmitidas para a Colômbia e para a Venezuela. O conceito de Transmissão adotado neste trabalho considera o polo receptor como ativo no processo de transmissão. Assim, consideramos que os latinos foram responsáveis por darem outros sentidos e funções escolares para os livros-texto adotados. Chamaremos esse processo de transmissão dupla.

As transmissões duplas são particularmente interessantes por mostrarem o grau de complexidade que as pesquisas em História da Educação Matemática podem envolver. Por exemplo, se considerássemos o pressuposto de que o polo receptor permanece passivo durante as transmissões, não seríamos capazes de explicar as diferentes finalidades que os pólos receptores deram para as obras. E se não considerarmos uma perspectiva comparativa dos desenvolvimentos nos dois países, não saberíamos o que foi parte de um processo mais geral do ensino ou o que foi uma particularidade de um dos países.

Os exemplos das traduções da geometria de Legendre são muito exemplificativos. Os elementos de geometria foram traduzidos, respectivamente, por um colombiano e um venezuelano na segunda metade do século XIX. No entanto, quando estes tradutores realizaram tal feito, a obra de Legendre já circulava há muitos anos nos respectivos países (Oliveira e Schubring, 2021).

Um dos principais pontos a serem levados em consideração é a existência de um duplo polo de emissão. Assim, não consideramos apenas a França ou apenas a Espanha são polos únicos de transmissão, mas sim que ambos influenciaram nas escolhas do polo receptor.

COLÔMBIA E VENEZUELA: OS POLOS RECEPTORES

É importante sabermos como era tratado o ensino de matemática nas últimas décadas do século XVIII. Muitas características presentes neste período foram perpetuadas após os processos de independência. Nessa última fase da época colonial, a matemática era ensinada de maneira marginal nas poucas instituições de ensino existentes. Grande parte da explicação desse fato vem do interesse da coroa espanhola em manter um sistema de ensino precário, para que os moradores nativos do continente se mantivessem na situação de colônia. Além disso, a importação de livros só era permitida mediante autorização dos funcionários da coroa.

Em 1762, no *Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario*, em Santafé, antiga Nova Granada, foi criada a primeira cátedra de matemática (Sánchez e Albis-González, 2012, p.). O objetivo desta cátedra era melhorar os níveis de educação de seus estudantes. Essa cadeira foi ocupada por José Celestino Mutis (1732-1808) que permaneceu titular até sua morte em 1808. Mutis era médico e é considerado hoje em dia um dos cientistas mais importantes da época. Devido às viagens de Mutis, essa cátedra era constantemente interrompida. Em suas aulas, alguns anos depois da criação da cátedra, Mutis baseava-se nos livros de Benito Bails, um importante autor e matemático espanhol. Os livros utilizados eram *Elementos de matemáticas*, em 10 volumes, publicados entre 1772 e 1783 e *Princípios de matemáticas*, em 3 volumes, primeira edição em 1776.

Uma parte fundamental para o conceito de transmissão é perceber que o período de independência marca o início de uma nova fase em que se nota um aumento significativo da utilização de livros-texto oriundos da Espanha e da França. Essa nova concepção é ocasionada pela mudança de papel que tem a educação no período pós-independência.

Nos primeiros anos após as independências, podemos perceber um discurso que vê na educação uma importante ferramenta para o desenvolvimento do país (Carvalho, 2014, p.336). Vemos nas primeiras constituições artigos que estabelecem a criação de escolas e colégios, a princípio, visando todos os níveis de ensino. Mas, apesar dessa tentativa, a instabilidade política e os abalos econômicos provocados pelas guerras tornaram a consolidação dos sistemas de ensino colombiano e venezuelano inviáveis. As poucas instituições existentes eram mantidas com escassos recursos e o ensino era de péssima qualidade.

Durante muito tempo, o método de Lancaster foi utilizado como a principal forma de ensino em ambos os países (Carvalho, 2014, p.336-337), e na América Latina como um todo. Esse método consiste em uma metodologia de aprendizagem mútua, isto é, os alunos que estivessem em séries mais avançadas ficariam incumbidos de ensinar aos alunos das séries mais elementares. Esse fato consiste em um exemplo de como o polo receptor da transmissão pode ressignificar os saberes passados, pois o método era utilizado na Europa num contexto envolvendo trabalhadores industriais.

Em 1777, no vice-reinado de Nova Granada, foi criada a imprensa real. Sua principal função era a publicação de calendários, reformas administrativas, informações sobre higiene, dentre outras coisas de natureza burocrática. Até o fim do século XVIII, a publicação de livros, neste contexto, os didáticos, era feita como uma tarefa secundária.

O surgimento da imprensa no território venezuelano, em 1808, também contribuiu para o desenvolvimento tardio do ensino da matemática (Beyer, 2015). Em 1826, o livro *Lecciones de Aritmética*, de Lucas María Romero y Serrano, foi o primeiro a ser publicado em Caracas, sendo uma reimpressão de uma obra espanhola de 1797. Seguido, dois anos depois, do livro *Aritmética teórico-práctica*, de Ramón Aguilar, também em

Caracas. Esta é uma obra genuinamente venezuelana. Já o primeiro manual de álgebra a ser publicado na Colômbia foi *Lecciones de aritmética y álgebra*, de Lino de Pombo, publicado em Bogotá em 1858 (Sánchez e Albis-González, 2012, p.114-117).

Em 1839, temos a primeira edição venezuelana do livro *Aritmética*, de Lacroix (Beyer, 2016, p.244). Esta versão é uma reimpressão da tradução feita por Don José Rebollo y Morales e que foi publicada em Valencia, na Espanha. Esta primeira edição foi feita por Valentín Espinal.

A primeira edição feita em Caracas de *Éléments de géometrie* de Legendre foi publicada com o nome de *Geometría y Trigonometría*, em 1854, impressa por Juan de Dios Morales. Nesta versão, não fica claro quem foi o tradutor, porém supõe-se que esta seja uma versão revisada da tradução espanhola foi por Gilmán publicada em 1827 (Beyer, 2020, p.34-35).

Podemos perceber a utilização de traduções feitas por espanhóis, tanto de livros de Lacroix quanto de Legendre, com uma maior frequência durante a primeira metade do século XIX. Já na segunda metade, temos uma inversão: a maioria das traduções utilizadas foram feitas por nativos dos respectivos países.

Um ano importante para a matemática venezuelana foi o de 1831, pois foi criada a Academia Matemática de Caracas, fundada e dirigida por um longo período por Juan Manuel Cagigal. Cagigal estudou na França e é responsável pelo fornecimento de alguns livros em francês para a composição da primeira biblioteca da academia.

No ano de 1847, a Colômbia criou uma academia militar (Sánchez e Albis-González, 2012), o famoso Colegio Militar, seguindo os moldes da École Polytechnique, o que pode ser visto como um outro exemplo de transmissão, já que apesar de terem a mesma finalidade, a formação de engenheiros, funcionaram de maneiras muito diferentes. Pode-se dizer que é a partir daí que a matemática na Colômbia começa a ter um maior protagonismo, afastando-se da marginalidade que se tinha até então.

Por todo o decorrer do século XIX, podemos notar uma interferência indireta muito grande da Espanha e da França no processo de institucionalização do ensino. A Espanha tem uma influência em todos os níveis de ensino enquanto que a França tem no ensino secundário e superior, ressaltando, mais uma vez, a importância dessas duas metrópoles não só para a Colômbia e a Venezuela mas para toda a América Latina espanhola.

Lacroix na Colômbia e na Venezuela

Os livros-texto de Lacroix foram transmitidos de maneira diferente do livro de Legendre. Não encontramos traduções da obra de Lacroix feitas por colombianos e venezuelanos. Assim, o que observamos é a circulação de edições originais espanholas ou versões publicadas em editoras locais. Por isso optamos em apresentar ambos os países na mesma seção.

As editoras locais apenas publicaram a mesma versão do original do texto, sem fazer acréscimos ao conteúdo principal. As alterações que podemos identificar são, por exemplo, o acréscimo de apêndice (Beyer, 2016, p.253) à álgebra de Lacroix por Juan Cagigal, um importante personagem no contexto venezuelano da primeira metade do século XIX.

As únicas informações que temos são de ordem editorial. Isto é, localizar publicações de editoras locais em busca da evidência de utilização dos livros de Lacroix. Segundo Beyer (2016, p.242), os livros de aritmética e álgebra estavam entre os mais comercializados na

Venezuela durante o século XIX. Destacamos que Lacroix foi amplamente utilizado na Venezuela, pois identificamos a presença de diferentes edições dos livros-texto de Lacroix. Beyer (ibid.) encontrou um número significativo de edições venezuelanas, versões vindas da Espanha e versões originais francesas.

Em Beyer (2006, 2016), encontramos os motivos do grande sucesso das obras de Lacroix na Venezuela: as disciplinas de aritmética e álgebra tinham mais destaque no contexto educacional venezuelano. Isso também nos ajuda a explicar a tradução tardia das obras de Legendre, em 1866 e 1879.

O *Tratado Elemental de Aritmética* foi por Valentín Espinal em 1839, por Rojas Hermanos em 1862 e 1881, por Carranza Hermanos em 1891 e pela *Librería Española de L. Puig Ros y Hermano* em 1894 (Beyer, 2016, p.242). Isso mostra a grande recepção do livro de aritmética de Lacroix. Destacamos que edições da geometria e da trigonometria de Lacroix também circularam na Venezuela na segunda metade do século XIX.

A livraria de *Damirón y Dupuy* tem um importante papel nas primeiras comercializações dos livros de Lacroix. Em 1841, essa livraria tinha em seu catálogo o livro *Agrimensura ó Instrucción elemental para medir tierras y levantar planos*, publicada em 1834 pela *Damirón y Dupuy* e traduzida do francês pelo venezuelano J. A. Freire (Beyer, 2016, p.243). Essa tradução se destaca pela especificidade do tema e pela data de publicação. Lembramos que, em 1831, a *Academia de Matemáticas* de Caracas passou a funcionar, indicando a presença de pessoas possivelmente interessadas em obras matemáticas.

A situação na Colômbia é um pouco diferente. Se compararmos as versões encontradas por Beyer (2016) com as da Biblioteca Nacional da Colômbia e outras, encontramos algumas diferenças. A maioria das obras presentes na Colômbia são edições originais francesas do livro de Lacroix. Encontra-se em menor quantidade as traduções de Rebollo.

Além disso, encontramos exemplares de muitas outras obras de Lacroix. Além dos que circulavam mais frequentemente na Venezuela, na Colômbia podemos encontrar as obras *Tratado elemental de probabilidade*, *Ensaio sobre o ensino em geral*, *Tratado de cálculo diferencial e integral*, *Complementos de álgebra*. Também não conseguimos identificar edições publicadas por editoras colombianas.

As questões acima podem ser interpretadas na ótica das transmissões como um processo ativo dos polos receptores ao se apropriarem da obra de diferentes maneiras.

Legendre na Colômbia

Luís M. Llieras (1842-1885) foi um engenheiro colombiano. Estudou no Colégio Militar da Colômbia, onde recebeu seu título de idoneidade como engenheiro. Ele foi professor em vários colégios e universidades, sendo importante destacar sua atuação na *Escuela de Ingeniería de la Universidad Nacional*. Nesta instituição, deu aulas de geometria euclidiana, geometria descritiva e astronomia. Em 1868, foi reitor do Colégio Nacional de Velez. Em 1873, exerceu o cargo de diretor do Observatório Astronômico.

A versão utilizada por Llieras para a tradução foi uma de Blanchet. Um dos pouquíssimos pontos de intervenção que conseguimos identificar em sua tradução está presente na definição de linha reta. Na segunda edição de Blanchet, vemos que a definição de linha reta contém a palavra francesa ‘chemin’ (caminho). No entanto, por algum motivo desconhecido, a partir da nona edição a palavra ‘chemin’ some da definição. O restante da definição é igual, mas agora faltando a palavra ‘chemin’.

A intervenção de Llieras ocorre exatamente aí. Em sua tradução, que foi feita a partir de uma décima do Blanchet, logo sem a palavra ‘chemin’, ele acrescenta à definição a palavra ‘camino’.

Legendre na Venezuela

Jesús Muñoz Tébar (1847-1909) foi um engenheiro, militar e político venezuelano. Estudou no Colégio Vargas de Caracas e cursou a Academia Militar de Matemáticas, formando-se em 1866 com o grau de Teniente de Ingenieros. Recebeu seu título de doutorado em Ciências Filosóficas pela Universidad Central de Venezuela, instituição onde foi reitor por duas vezes.

A versão utilizada por Tébar foi uma original de Legendre. Supomos seu apreço pela concepção de Legendre sobre a Geometria, pois temos evidência que ambas versões eram comercializadas na Venezuela (Beyer, 2020, p.39).

Comparando sua tradução com a segunda tradução de Gilmán, publicada em 1827, conseguimos elucidar uma questão historiográfica (Beyer, 2020). Na capa da tradução venezuelana podemos notar a inscrição “Revisada por Jesús Muñoz Tébar”, enquanto que nas notas de fim de texto, vemos a inscrição “traduzida por Jesús Muñoz Tébar”. Isso gerava um debate sobre se Tébar tinha atuado como revisor do texto, da versão de Gilmán de 1827, ou se foi um erro por parte da gráfica. Tal dúvida se justificava pelo fato de Tébar ter todos os gabaritos e motivações para traduzir toda a obra.

Quando olhamos para o corpo do texto, vemos que as diferenças entre as versões quase não existem, sendo todas revisões muito pontuais, por exemplo, “reta AB” é trocado por “reta CD”. O principal ponto de nossa argumentação se baseia no seguinte fato: Na primeira edição de Gilmán (1807. p.1), a definição de reta aparece como “el camino mas corto entre dos puntos”, sendo ‘camino’ a tradução da palavra francesa ‘chemin’. Na segunda edição, Gilmán troca a palavra ‘camino’ por ‘distancia’, mesmo com o original continuando com a palavra ‘chemin’. Ou seja, interferência ativa do tradutor. Quando olhamos a versão de Tébar, constatamos que a definição de reta é feita com a palavra ‘distancia’ e não ‘camino’. Isso pode parecer pouco, mas quando comparamos a tradução das notas, vemos que já na primeira frase, que apesar de terem o mesmo sentido, foram escritas de maneira distintas, indicando que pessoas diferentes que traduziram.

Destacamos que nas três versões da geometria de Legendre para o castelhano, os tradutores optaram por não alterar o conteúdo da obra original. Isto é, as traduções são cópias fiéis dos livros originais de Legendre. Isso nos leva a considerar a situação do ensino de geometria nos respectivos países. Lembramos que a tradução do livro-texto de geometria de Lacroix sofreu poucas modificações de Rebollo. O que nos pode sugerir uma certa ressalva no ensino de geometria. Beyer (2015), nos fala da dificuldade de implementação do estudo de geometria na Venezuela durante o século XIX.

Já as traduções dos livros-texto de aritmética e álgebra de Lacroix feitas por Rebollo, mostram uma grande modificação no corpo do texto. Rebollo reinterpreta alguns parágrafos ou adiciona parágrafos novos ao texto original. Essa é uma das principais contribuições de considerar o conceito de transmissão de ideias como sendo ativo por parte do polo receptor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Temos a constatação do uso da versão original de Legendre na segunda metade do século XIX. Isso é de grande importância para entendermos um pouco mais da dinâmica de uso desse livro, desconstruindo a ideia de que o livro editado por Blanchet foi a única versão utilizada na segunda metade do século XIX e evidenciando uma demanda pelo pensamento original do autor.

Além disso, destacamos como o conceito de transmissão é uma ferramenta adequada para esse objeto de estudo. Neste trabalho, tivemos contato com uma abordagem mais refinada dessa ideia: entender que o papel ativo dos tradutores da geometria de Legendre se deu, primeiramente, na escolha entre a versão original e a alterada e, secundamente, nas poucas intervenções ao texto (por exemplo “camino” e “distancia”, “altura” ou “profundidad”).

Ao contrário, os livros-texto de Lacroix traduzidos por Rebollo sofreram grandes modificações. Rebollo foi responsável por acrescentar partes que explicavam o conteúdo de Lacroix. Aqui temos o caso mais comum das transmissões: o tradutor de uma obra acrescenta comentários ao texto original, muitas das vezes sem deixar claro o que é compõe o livro original e o que são seus comentários. Além disso, Rebollo também acrescenta notas de rodapé e notas do tradutor, mostrando um alto grau de interferência.

Um ponto de destaque é termos conseguido responder aos questionamentos historiográficos sobre em torno da tradução venezuelana. Mostramos que Tébar foi o responsável pela revisão do corpo do texto em 1879 e não pela tradução como antes sustentado pela historiografia tradicional.

A principal diferença dos usos dos livros-texto de Lacroix e Legendre na Colômbia e na Venezuela é a escolha dos tradutores de Legendre optarem por não alterar em nada o texto original. Assim, o texto de Tébar é o mesmo da segunda edição de Gilmán. Apesar dos livros de aritmética e álgebra de Lacroix serem amplamente utilizados, não temos conhecimento da realização de traduções da obra de Lacroix na Colômbia e na Venezuela.

Destacamos as diferentes maneiras como os livros de Lacroix e Legendre foram apropriados pelos polos receptores. Percebemos uma maior utilização das obras de aritmética e álgebra na Venezuela e outras obras mais avançadas nas bibliotecas colombianas. Na Venezuela uma ampla disseminação das traduções de Rebollo, vemos na Colômbia um papel menor dessas traduções espanholas.

Por fim, destacamos o papel da concepção da transmissão dupla dos livros-texto analisados. Ela mostrou-se muito eficaz na produção de novas interpretações sobre temas já conhecidos. Destacamos, também, o papel de apresentarmos os desenvolvimentos em países diferentes, mas que compartilham uma forte herança cultural. Com isso, podemos identificar se alguns processos são peculiares de algum país ou se ele são padrões gerais de ensino.

REFERENCIAS

- Albis-González, V. (1977). Latin-American translation of Legendre's “*Éléments de Géométrie*”. *Historia Mathematica*, 4(3), 339-340.
- Ausejo, E. (2014). Mathematics Education in Spain and Portugal. In: Karp A., Schubring G. (eds) *Handbook on the History of Mathematics Education*. Springer, New York, NY.

- Beyer, W. (2006). Algunos libros de Aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1912. *Revista de Pedagogía* 27(78), 71-110.
- Beyer, W. (2015). Un paseo histórico por la educación matemática venezolana: una visión a través de los textos escolares. *Revista de História da Educação Matemática*, 1(1), 32-49.
- Beyer, W. (2016). La influencia de Sylvestre-François Lacroix en la matemática venezolana decimonónica. *Revista de História da Educação Matemática*, 2(3), 229-255.
- Beyer, W. (2017). La influencia francesa en la matemática de la Venezuela decimonónica: Una primera aproximación. Comunicación. *II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (CEMACYC)*. Cali, Colombia.
- Beyer, W. (2020). Ediciones y traducciones venezolanas de los *Éléments de Géométrie* de Legendre. Un preámbulo para el estudio de su impacto en Venezuela. *RECME - Revista Colombiana De Matemática Educativa*, 5(1), 25-41.
- Domingues, J. (2008). *Lacroix and the calculus*. Basel: Birkhauser Verlag.
- Carvalho, J. B. P. (2014). Mathematics Education in Spain and Portugal. In: Karp A., Schubring G. (eds) *Handbook on the History of Mathematics Education*. Springer, New York, NY.
- Lacroix, S.-F. (1803). *Éléments d'Algèbre*. Troisième édition, revue et corrigée. Paris: Courcier, an XI = 1803.
- Lacroix, S.-F. Lacroix, (1807–1808). *Curso completo elemental de Matemáticas puras*. Vols 4. Madrid: Imprenta Real
- Legendre, A.-M. (1794). *Éléments de géométrie*. Paris: Imprimerie..., an II (= 1794)
- Legendre, A.-M. (1794). *Éléments de géométrie*, avec notes. Paris: Firmin Didot.
- Legendre, A.-M. (1802). *Éléments de géométrie*, avec notes. Paris: Firmin Didot.
- Legendre, A.-M. (1807). *Elementos de Geometria*: con notas; traducidos al castellano por don Antonio Gilman. Madrid: Imprenta de Repulles.
- Legendre, A.-M. (1849). *Éléments de géométrie*, avec additions et modifications, par M. A. Blanchet, deuxième édition, suivie de la quinzième édition, Paris: Firmin Didot, 1849.
- Legendre, A.-M. (1866). *Elementos de geometría*. Con adiciones i modificaciones por M.A. Blanchet. Traducidos de la 10a edición de París por Luis M. Lleras. Bogotá: Imprenta de Gaitán.
- Legendre, A.-M. (1879). *Elementos de Geometria*. Con Notas. Traducidos de la 15ª Traducción revisada por el Dr. Jesús Muñoz Tébar–Ingeniero. Caracas: Alfred Rothe.
- Oliveira, C. A. A. & Schubring, G. (2020). Enseñanza de matemáticas en Colombia y Venezuela en el siglo XIX: un estudio de caso del concepto de transmisión de idea. In:

- Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática, 5, Bogotá. Anais de Congresso, 110-123.
- Oliveira, C. A. A. & Schubring, G. (2021). A transmissão da geometria de Legendre: os casos da Colômbia e da Venezuela. In: XIV Seminário Nacional de História da Matemática. Anais...Uberaba(MG) Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM).
- Sánchez, C. H. & Albis-González, V. (2012). Historia de La enseñanza de las Matemáticas en Colombia: De Mutis al siglo XIX. *Revista Quipu*, 14(1), 109-157.
- Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.
- Schubring, G. (1989). Theoretical Categories for investigations in the Social History of Mathematics Education and Some Characteristic Patterns. *Mathematics, Education, and Society*. 35, 6-8.
- Schubring, G. (1999). O Primeiro Movimento Internacional de Reforma Curricular em Matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na transmissão de conteúdo. *Revista Zetetiké*, 7(1), 29-50.
- Schubring, G. (2003). *Análise histórica de livros de matemática*. São Paulo: Editora Autores Associados.
- Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer.
- Schubring, G. (2006). Researching into the History of Teaching and Learning Mathematics: the State of the Art. *Paedagogica Historica*, 42(4-5), 665–677.
- Schubring, G. (2009). A origem da geometria de Legendre e o seu impacto internacional. In: Luis Carlos Guimarães (Org.). *Elementos de Geometria* (pp. 353-384). Rio de Janeiro, RJ: LIMC.
- Schubring, G. (2019). O que é e ao que serve a Hermenêutica?. *Jornal Internacional de Estudos em Matemática*, 11(2), 194-200.

Carlos Antonio Assis de Oliveira
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Brasil
carlosroot4@gmail.com

Gert Schubring
Universität Bielefeld, Alemanha
gert.schubring@uni-bielefeld.de



ISSN: 2603-9982

Alsina, Á. (2021). ¿Cómo definir una línea metodológica en el área de Matemáticas? Tomando decisiones en la escuela. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 4(2), 21-39

¿CÓMO DEFINIR UNA LÍNEA METODOLÓGICA EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS?: TOMANDO DECISIONES EN LA ESCUELA

Ángel Alsina, Universidad de Girona, España

Resumen

Se describen cinco posicionamientos para definir una línea metodológica de centro en el área de matemáticas: 1) decisiones sobre la orientación de la asignatura de matemáticas; 2) decisiones sobre la selección de los conocimientos matemáticos; 3) decisiones sobre la planificación de las actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; 4) decisiones sobre la gestión de las actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; y 5) decisiones sobre la evaluación de la asignatura de matemáticas. A partir del engranaje de estos posicionamientos, se propone un planteamiento competencial en el que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se fundamenta en una planificación a través de itinerarios de enseñanza, una gestión a través de los procesos matemáticos y una evaluación formativa y formadora.

Palabras clave: *enseñanza de las matemáticas, competencia matemática, procesos matemáticos, evaluación de las matemáticas, práctica de enseñanza*

How to define a methodological approach in the area of mathematics: making decisions at school

Abstract

Five stances are described in order to define a methodological approach in the area of mathematics: 1) decisions on the orientation of mathematics teaching; 2) decisions on the selection of mathematical knowledge; 3) decisions on the planning of mathematics teaching-learning activities; 4) decisions on the management of mathematics teaching-learning activities; and 5) decisions on the assessment of mathematics. From the gear of these stances, a competence-based approach is proposed in which the mathematics teaching-learning process is based on planning through teaching itineraries, management through mathematical processes and formative assessment.

Keywords: *mathematics teaching, mathematical competence, mathematical processes, mathematics assessment, teaching practice.*

INTRODUCCIÓN

Los centros escolares necesitan definir una línea metodológica fundamentada en grandes decisiones acerca de qué matemáticas se enseñan, para qué se enseñan, cómo se enseñan y cómo se evalúan. Sin unas bases bien definidas sobre estas cuestiones, el funcionamiento es anárquico, con importantes repercusiones en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado, incluyendo la evaluación.

Es impensable pensar, por ejemplo, en el funcionamiento de un hospital sin unas directrices precisas acerca de los protocolos que debe seguir el personal médico para hacer una intervención quirúrgica o el personal de enfermería para atender adecuadamente el post-operatorio de los pacientes; o es inimaginable concebir una empresa solvente sin unas instrucciones claras a nivel organizativo, donde cada empleado debe realizar el trabajo que le corresponde. Asumiendo que una escuela no es ni un hospital ni una empresa, ¿por qué motivo muchos centros escolares tienen dificultades para definir unos criterios generales acerca de la enseñanza de las diversas asignaturas escolares?

En este artículo se asume que, en la actualidad, coexisten una cantidad tan abrumadora de *inputs* de fuentes muy diversas –las editoriales, los métodos y los pseudométodos de enseñanza, las directrices curriculares, las teorías del aprendizaje, etc.– que, lejos de aportar soluciones, contribuyen a la indefinición colectiva y al funcionamiento individualizado, con base en la identidad profesional que ha ido construyendo cada docente y, más específicamente, su sistema de creencias (Engelbertink et al., 2021).

En el área de matemáticas, que es donde se ubica este estudio, prácticamente todas las actividades de formación continua tienen, en su base, este conflicto. Sirvan de ejemplo los textos de dos mensajes anonimizados recibidos durante el curso académico 2020-2021, por parte de la jefa de estudios de un centro público y de la coordinadora de etapa de un centro privado:

En estos momentos, en nuestro centro, nos estamos planteando la línea metodológica de las matemáticas. Hasta ahora, y durante los 5 últimos años, hemos estado haciendo uso del Proyecto Editorial X pero, por diferentes circunstancias, nos estamos planteando hacer un cambio de rumbo.

En la escuela hemos vuelto a retomar el planteamiento de cómo hacemos las mates y tenemos claro que queremos un cambio, pero un cambio de pies a cabeza, con sentido y con coherencia entre todas las etapas y sobre todo con unos expertos que nos acompañen y asesoren durante esta transformación.

Estos dos fragmentos son evidencias de que los centros escolares están al día del cambio progresivo de paradigma en el contexto educativo como consecuencia de los cambios sociales (Delors, 1996; Morin, 1999), y tratan de buscar soluciones para responder de la forma más eficaz posible al reto que supone para los docentes transformar sus prácticas con base en estos cambios (Hargreaves, Earl, Moore y Manning, 2001). A mí modo de ver, es imprescindible ofrecer orientaciones eficaces a los centros escolares para llevar a cabo estos procesos de transformación colectiva considerando, por encima de todo, la realidad del día a día, donde convergen una gran cantidad de tareas de diversa naturaleza que, a menudo, dejan poco espacio para la reflexión, el debate y la toma de decisiones de ámbito pedagógico.

Partiendo de estos antecedentes, en este artículo se pretende indagar en los posicionamientos imprescindibles para definir una línea metodológica de centro en el área de matemáticas, asumiendo que se trata de un proceso dilatado en el tiempo y complejo en las relaciones profesionales y personales pero que, a pesar de estos obstáculos, es imprescindible concretarla.

LOS PILARES DE UNA LÍNEA METODOLÓGICA DE CENTRO EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS

Definir una línea metodológica de centro es como ir engranando piezas sueltas para que un motor funcione con precisión. Este proceso de engranaje, como se ha indicado en la introducción, requiere tomar una serie de decisiones y ejecutarlas. Las decisiones deben ser tanto de tipo organizativo (¿quién lidera el proceso?, ¿quién participa?, ¿cómo se planifica?, ¿cómo se gestiona?, etc.) como de tipo pedagógico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, incluyendo la evaluación (¿qué matemáticas se enseñan?, ¿para qué se enseñan?, ¿cómo se enseñan? y ¿cómo se evalúan?), como se ha indicado en la introducción.

Considerando el objetivo de este artículo, esta sección se focaliza en las decisiones pedagógicas para engranar una línea metodológica de centro en el área de matemáticas a partir de cinco posicionamientos: 1) decisiones sobre la orientación de la asignatura de matemáticas; 2) decisiones sobre la selección de los conocimientos matemáticos; 3) decisiones sobre la planificación de las actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; 4) decisiones sobre la gestión de las actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; 5) decisiones sobre la evaluación de la asignatura de matemáticas.

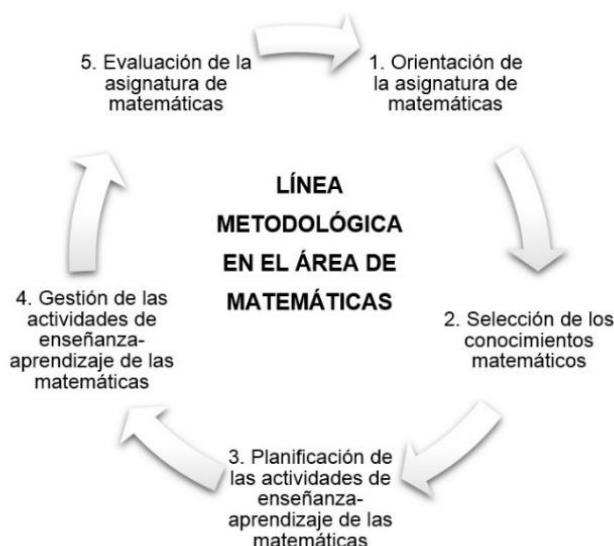


Figura 1. Posicionamientos para definir una línea metodológica de centro en el ámbito de las matemáticas. Fuente: elaboración propia

Decisiones sobre la orientación de la asignatura de matemáticas

El primer posicionamiento de un centro escolar respecto a la asignatura de matemáticas tiene que responder a la pregunta *¿para qué se enseñan las matemáticas?* Un punto de apoyo para tomar decisiones al respecto pueden ser las propias directrices curriculares, que ofrecen orientaciones en este sentido.

Las matemáticas permiten conocer y estructurar la realidad, analizarla y obtener información para valorarla y tomar decisiones; son necesarias en la vida cotidiana, para aprender a aprender, y también por lo que su aprendizaje aporta a la formación intelectual general, y su contribución al desarrollo cognitivo. El uso de las herramientas matemáticas permite abordar una gran variedad de situaciones (Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, p. 19386).

En el fragmento anterior se deja entrever, a modo de ejemplo, la declaración de intenciones del currículum de matemáticas de Educación Primaria vigente en España que,

aunque está permanentemente sujeto a cambios como consecuencia de los cambios de gobierno y de la subsiguiente modificación de la ley de educación del gobierno anterior, tiende a estar en sintonía con las directrices internacionales en materia de educación matemática. Como puede apreciarse, la idea central de dicho currículum –compartida, con mayor o menor precisión, en los currículos de matemáticas de todos los países– es incidir en el desarrollo individual y social del alumnado.

En este escenario, la primera gran decisión para concretar una línea metodológica de centro en el área de matemáticas tiene que ver con aclarar si se quieren enseñar matemáticas para la escuela o educar matemáticamente para la vida (Alsina, 2012a), es decir, si la enseñanza se quiere centrar en conseguir un adecuado rendimiento académico o, junto con este rendimiento, se pretende promover el desarrollo de habilidades para la vida.

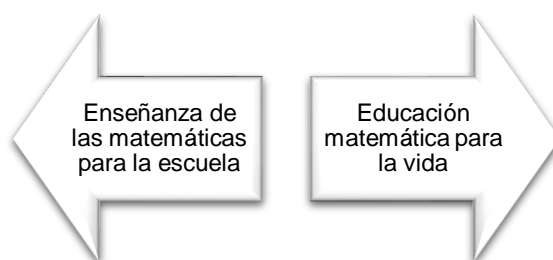


Figura 2. Posibles orientaciones de la asignatura de matemáticas. Fuente: elaboración propia

En esta escala cualitativa entre la enseñanza de las matemáticas para la escuela y la educación matemática para la vida es donde se sitúa la noción de alfabetización o de competencia matemática, que surge para enfatizar una visión más funcional del aprendizaje de las matemáticas (OECD, 2004, 2006; Rico, 2007).

En otros documentos ya se ha justificado la importancia de substituir paulatinamente tanto un currículum como unas prácticas de enseñanza de las matemáticas orientados a la mera adquisición de contenidos en el contexto escolar para hacer bien los ejercicios y sacar una buena nota en los exámenes, por un currículum y unas prácticas docentes que fomenten el desarrollo de la competencia matemática para la vida (Alsina, 2012b, 2016, 2019, 2020a, 2021), por lo que aquí únicamente se quiere subrayar qué es y qué no es la competencia matemática. En sintonía con las aportaciones de diversos organismos y expertos en este ámbito (OECD, 2004, 2006; Goñi, 2008; Niss, 2002; Rico, 2007; entre otros), definir una línea metodológica de centro cuyo propósito sea desarrollar al máximo la competencia matemática para la vida, implica tener claro que la competencia matemática no sólo es usar las matemáticas (aspecto funcional o aplicado), sino que implica también comprenderlas (aspecto formativo) y valorarlas (aspecto actitudinal) en una variedad de situaciones en las que juegan o pueden desempeñar un papel (Niss, 2002).

Seguidamente, es imprescindible determinar el conjunto de competencias y subcompetencias matemáticas que deben promoverse, que en algunos currículos de matemáticas ya vienen determinadas. A modo de ejemplo, en la Tabla 1 se describen las competencias matemáticas propuestas por Niss (2002).

Tabla 1. *Competencias matemáticas* (Niss, 2002)

Grupo 1: Preguntar y responder preguntas “dentro de” y “con las matemáticas”
<p>1. Dominio de modos matemáticos de pensamiento (pensar matemáticamente) como, por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Plantear preguntas que son propias de las matemáticas y conocer el tipo de respuestas que las matemáticas pueden ofrecer; - Comprender y manejar las posibilidades y limitaciones de un determinado concepto; - Ampliar las posibilidades de un concepto extrayendo algunas de sus propiedades o generalizando resultados; - Diferenciar los diferentes niveles de las matemáticas (afirmaciones condicionadas del tipo "si-entonces", hipótesis, definiciones, teoremas, conjeturas o casos). <p>2. Planteamiento y resolución de problemas matemáticos como, por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Identificar, plantear y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos: puros o aplicados; abiertos o cerrados; - Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos, planteados por otros o por uno mismo, de diferentes maneras cuando sea necesario. <p>3. Modelización matemática (es decir, análisis y construcción de modelos) como, por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Analizar los fundamentos y las propiedades de los modelos existentes, incluida la evaluación de sus posibilidades y de su validez; - Decodificación de los modelos existentes; - Realización de actividades de modelización en un determinado contexto: estructurar el campo; matematizar; trabajar con el modelo, incluyendo la solución de los problemas a que da lugar; validar el modelo, interna y externamente; analizar y criticar el modelo; comunicar sobre el modelo y sus resultados; vigilar y controlar todo el proceso de modelización. <p>4. Razonamiento matemático como, por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Seguir y evaluar cadenas de argumentos; - Conocer qué es una demostración matemática (y qué no es) y en qué se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático, como por ejemplo el heurístico; - Descubrir las ideas básicas en una determinada línea de argumento (sobre todo en una prueba), incluyendo la distinción de las líneas principales de los detalles, las ideas de los tecnicismos; - Elaborar formal e informalmente argumentos matemáticos y demostrar declaraciones.
Grupo 2: Gestionar el lenguaje matemático y las herramientas matemáticas
<p>5. Representación de las entidades matemáticas (los objetos y situaciones) como, por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Comprensión y utilización (decodificación, interpretación, distinción entre) diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos, fenómenos y situaciones; - Comprensión y utilización de las relaciones entre las distintas representaciones de la misma entidad, y conocer sus puntos fuertes y sus limitaciones; - Elegir y cambiar entre las diferentes representaciones. <p>6. Manejo de símbolos matemáticos y formalismos como, por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Decodificación e interpretación simbólica y formal del lenguaje matemático, así como la comprensión de sus relaciones con el lenguaje natural; - Comprender la naturaleza y las normas de los sistemas matemáticos formales (tanto la sintaxis como la semántica); - Traducción del lenguaje natural al formal y simbólico; - Manejo y manipulación de las declaraciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas. <p>7. La comunicación en, con, y acerca de las matemáticas como, por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Comprensión de textos escritos, visuales u orales que tengan un contenido matemático, en una variedad de registros lingüísticos; - Expresar estas cuestiones de forma escrita, visual u oral, con diferentes niveles de precisión teórica y técnica. <p>8. Hacer uso de los recursos y herramientas como, por ejemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Conocer la existencia y propiedades de los diversos instrumentos y recursos disponibles para la actividad matemática, y conocer sus posibilidades y limitaciones; - Ser capaces de utilizar reflexivamente dichos recursos y herramientas.

Las competencias matemáticas de la Tabla 1, que forman parte del *Danish Kom Project* (Niss, 2002), han servido de base para el despliegue de las competencias y subcompetencias de los currículos de matemáticas de muchos países, por lo que pueden ser una fuente útil y de contraste para definir las finalidades de la enseñanza de las matemáticas.

Decisiones sobre la selección de los conocimientos matemáticos

El segundo posicionamiento para definir una línea de centro en el ámbito de las matemáticas debería responder a la pregunta *¿qué conocimientos matemáticos se enseñan?* El currículo también ofrece orientaciones que sirven de apoyo para tomar decisiones acerca de la selección de los conocimientos, como en el caso del currículo español vigente de matemáticas:

El currículo estará integrado por (...) los contenidos, o conjuntos de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias (...). Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias, ámbitos, áreas y módulos en función de las enseñanzas, las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado (Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, p. 19349).

Sin embargo, las principales debilidades o amenazas de las orientaciones curriculares de matemáticas son que, por un lado, el listado de conocimientos tiende a ser tan extenso que se hace inasumible y, por otro lado, en muchos países no se ofrecen directrices específicas para cada nivel y, por consiguiente, el profesorado no tiene una idea clara sobre qué conocimientos se deben trabajar en cada edad. Esta cuestión es más seria de lo que a simple vista podría pensarse puesto que, ante esta indefinición, muchos centros optan por delegar la distribución de los conocimientos por niveles a las editoriales. En este sentido, diversos estudios han informado que, muchas de las decisiones que toma el profesorado acerca de los conocimientos matemáticos que deben enseñar y cómo enseñarlos, están influenciadas por los libros de texto que utilizan y, en consecuencia, la instrucción en el aula depende en gran medida de este recurso (Porter, 2002; Tarr et al., 2006). Esto implica que las oportunidades de aprendizaje del alumnado están estrechamente relacionadas con los conocimientos que promueven los libros de texto de matemáticas (Stylianides, 2009).

Para evitar que la decisión acerca de los conocimientos matemáticos a enseñar recaiga exclusivamente en los proyectos editoriales o se vea dificultada por la ingente cantidad de conocimientos matemáticos de los currículos, existen diversas iniciativas que especifican los estándares para las matemáticas escolares que se deberían considerar en los programas de enseñanza para capacitar a todos los estudiantes. El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2003), por ejemplo, considera dos grandes tipos de estándares matemáticos desde los 3 a los 18 años aproximadamente, que son el reflejo de la cultura matemática que la sociedad necesita: los estándares de contenidos (Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y Probabilidad), que describen explícitamente los contenidos que deberían aprender; y los estándares de procesos (Resolución de problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representación), que ponen de relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos. Este planteamiento curricular, de acuerdo con Alsina (2012b), implica partir de un planteamiento que no se limite a los contenidos matemáticos, sino al trabajo integrado de dichos contenidos a través de los procesos para promover el desarrollo de la competencia matemática (Figura 3).

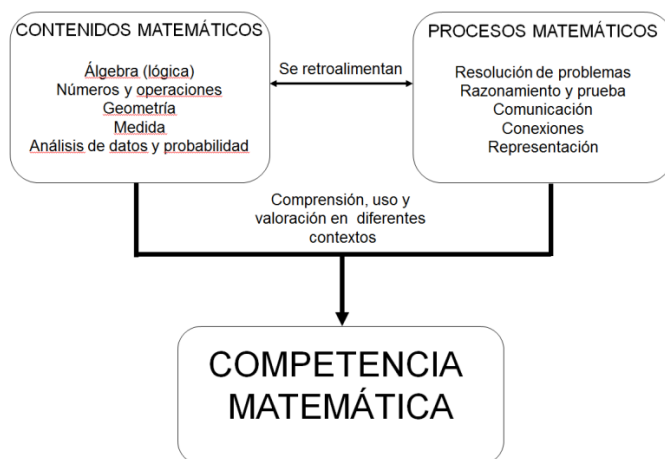


Figura 3. Estándares de contenidos y procesos matemáticos. Fuente: Alsina (2019, p. 20)

Desde este marco integrado, el NCTM (2003) especifica las matemáticas importantes que deberían desarrollar todo el alumnado, asumiendo que las matemáticas importantes se refieren a “algunos temas que quizás justifiquen una mayor atención, en vista de su ocurrencia frecuente en las matemáticas que el alumnado utilizará en el futuro, en sus estudios después de la secundaria o en su lugar de trabajo” (NCTM, 2015, p. 73). En los estándares americanos del NCTM, las matemáticas importantes están organizadas por etapas: Pre-K-2 (3-8 años); 3-5 (9-11 años); 6-8 (12-14 años); 9-12 (15-18 años aproximadamente). Partiendo de estas matemáticas importantes, junto con las trayectorias de aprendizaje de Clements y Sarama (2015) y las aportaciones de otros organismos y autores, Alsina (2006, 2019) describe una propuesta de secuenciación de contenidos de matemáticas por niveles para las etapas de Educación Infantil (3-6 años) y Educación Primaria (6-12 años), respectivamente.

Seguidamente, los conocimientos matemáticos que contribuyen al logro de los objetivos deben enlazarse con las competencias, lo que conlleva tomar decisiones sobre qué contenidos se seleccionan para trabajar cada una de las competencias, considerando que el conjunto de contenidos matemáticos que se abordan durante un curso escolar deben haber cubierto las distintas competencias al finalizar dicho curso. Esta es una decisión fundamental de centro porque aporta objetividad y concreción a la acción docente, puesto que tratar de afrontar todas las competencias matemáticas a través de todos los contenidos matemáticos es inasumible y muy poco operativo en la práctica.

Decisiones sobre la planificación de las actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Considerando la secuencia descrita en la Figura 1, que se inicia identificando las competencias matemáticas y sigue vinculando dichas competencias con los conocimientos matemáticos, el siguiente paso para concretar una línea metodológica de centro en el área de matemáticas es responder a la pregunta *¿qué actividades matemáticas se proponen al alumnado?*

En múltiples actividades de formación continua en las que he tenido el privilegio de participar como formador, una parte del profesorado tiende a expresar la falta de oportunidades para conocer qué propuestas se plantean en los niveles tanto anteriores como posteriores para enseñar matemáticas; qué recursos específicos de los que dispone el centro se utilizan en cada clase (por ejemplo, qué materiales manipulativos); o, en casos excepcionales, incluso mencionan algunos estereotipos ya muy superados como que el

alumnado de los primeros niveles dedica la jornada escolar a jugar, entre otros. Estas lagunas ponen de manifiesto que tomar decisiones colectivas acerca de las actividades matemáticas que se proponen al alumnado es también una cuestión muy relevante y, por consiguiente, es imprescindible tener claridad acerca de los contextos y recursos que pueden utilizarse para diseñarlas.

En este sentido, en este artículo se asume el planteamiento del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (Alsina, 2018a, 2019, 2020b), a partir de ahora EIEM, que plantea itinerarios de enseñanza, entendiendo por “itinerario” una secuencia de enseñanza intencionada que contempla contextos y recursos organizados en tres niveles (Figura 4): 1) contextos informales, que permiten visualizar las ideas matemáticas de manera concreta (situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos y juegos); 2) contextos intermedios, que conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático a través de la exploración y la reflexión (recursos literarios y tecnológicos); y 3) contextos formales, en los que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales para completar de esta forma el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico (recursos gráficos). El EIEM, pues, se aleja de una visión de la enseñanza de las matemáticas basada en la repetición y la práctica de ejercicios que presentan los libros de texto como principales estrategias para “aprender” matemáticas, y en su lugar, plantea que es necesario proponer diversos recursos para fomentar la comprensión más que la mera memorización, la actividad heurística más que la pura ejercitación o el pensamiento matemático crítico más que la simple repetición (Alsina, 2019).

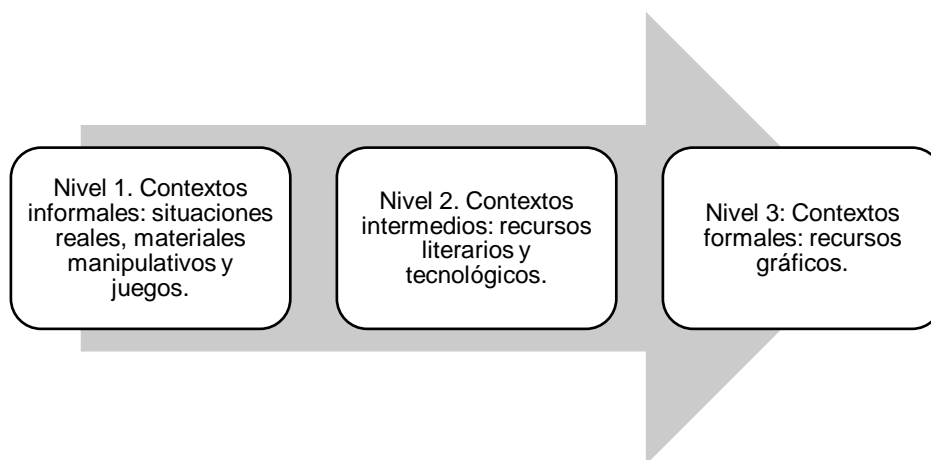


Figura 4. Niveles del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas. Fuente: elaboración propia

Este planteamiento responde, principalmente, a dos cuestiones: 1) no todo el alumnado aprende de la misma manera, por lo que es necesario diversificar los contextos y recursos de enseñanza-aprendizaje (Alsina, 2010); 2) la comprensión de las ideas matemáticas, de acuerdo con el Principio de Niveles de la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991), requiere un proceso de abstracción progresiva que se inicia en situaciones concretas y se avanza progresivamente hasta situaciones de enseñanza más abstractas. Más adelante, con el propósito de ofrecer algunas orientaciones para aplicar el EIEM en el aula, Alsina (2020b) plantea diversas recomendaciones que pueden servir de ayuda para tomar decisiones acerca de la planificación de las actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas:

Considerar el protagonismo de los distintos contextos en función del nivel escolar

Es obvio que en los primeros niveles escolares son imprescindibles los contextos informales para permitir visualizar las ideas matemáticas de manera concreta y garantizar la comprensión de las ideas matemáticas, aunque deben ofrecerse también oportunidades para avanzar hacia la esquematización y la abstracción. Paulatinamente, a medida que aumenta el nivel, deben ir incorporándose los contextos intermedios y formales, aunque sin olvidar que sigue siendo necesario visualizar las nuevas ideas matemáticas de manera concreta.

Garantizar el principio de abstracción progresiva en todos los itinerarios

Es recomendable que a lo largo de un itinerario se considere la visualización, la manipulación, la simbolización y la abstracción. En este sentido, se asume que no es imprescindible utilizar siempre todos los contextos incluidos en los tres niveles del EIAM de manera lineal, de más o menos frecuencia, para garantizar la comprensión. Así, pues, en la planificación de una secuencia de enseñanza de un determinado contenido se puede, por ejemplo, plantear un problema real, promover el uso de un recurso tecnológico como apoyo y un contexto más formal para avanzar hacia la formalización; o bien se puede plantear un reto a partir de un material manipulativo, seguir con un recurso literario y finalizar con un recurso gráfico, por citar algunas combinaciones posibles. En definitiva, se trata de tener presente que, a través de los diversos contextos que componen un itinerario de enseñanza de las matemáticas y las actividades que se plantean en cada contexto, debe garantizarse primero la visualización de las ideas matemáticas de manera concreta, a continuación ofrecer apoyos para avanzar hacia la esquematización y generalización progresiva y terminar la secuencia con recursos que promuevan la representación con notaciones convencionales, es decir, la simbolización y la abstracción, para asegurar así la formalización del conocimiento matemático, de acuerdo con las posibilidades del alumnado.

Disponer de criterios objetivos para la selección de los contextos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

El profesorado en activo tiene a su alcance una cantidad impresionante de recursos para enseñar matemáticas de procedencia muy distinta, desde expertos en el campo de la educación matemática hasta empresas que buscan un espacio para hacer negocio, sin olvidar la gran cantidad de propuestas de distintos tipos que pueden encontrarse en Internet, algunas veces sin ningún filtro que garantice su calidad. Resulta evidente que este alud de recursos requiere que los profesionales de la educación, a través de la formación inicial y permanente, dispongan de conocimientos matemáticos y didácticos adecuados para tener criterios objetivos, es decir, respaldados por la investigación, para seleccionar recursos que garanticen un buen aprendizaje de las matemáticas.

En la Figura 5 se presentan cinco indicadores para valor el grado de riqueza competencial de las actividades con base en su planteamiento, es decir, para determinar hasta qué punto una propuesta contribuye al desarrollo de la competencia matemática. Estos indicadores han sido propuestos por el “*Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques*” (CREAMAT, 2009), actualmente *CESIRE-àmbit matemàtiques*, que es un organismo de la Generalitat de Catalunya cuya finalidad es facilitar recursos a los centros educativos y al profesorado de las diferentes etapas educativas no universitarias para conseguir un mejor logro y desarrollo de las competencias de los estudiantes en el ámbito matemático:

<i>Bloque 1: Planteamiento de la actividad</i>	
1.	¿Se trata de una actividad que tiene por objetivo responder a un reto? El reto puede referirse a un contexto cotidiano, puede enmarcarse en un juego, o bien puede tratar de una regularidad o hecho matemático.
2.	¿Permite aplicar conocimientos ya adquiridos y hacer nuevos aprendizajes?
3.	¿Ayuda a relacionar conocimientos diversos dentro de la matemática o con otras materias?
4.	¿Es una actividad que se puede desarrollar de diferentes formas y estimula la curiosidad y la creatividad de los niños y niñas?
5.	¿Implica el uso de instrumentos diversos como por ejemplo material que se pueda manipular, herramientas de dibujo, <i>software</i> , etc.?

Figura 5. Indicadores competenciales para el planteamiento de las actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Fuente: CREAMAT (2009)

Promover la educación matemática inclusiva

Los itinerarios de enseñanza de las matemáticas deben considerar la diversidad del alumnado en todas sus dimensiones (cognitiva, cultural, de género, motriz, sensorial, etc.). En este sentido, existen todavía algunas creencias muy arraigadas que pueden ser un obstáculo para promover una educación matemática inclusiva: por un lado, basar la enseñanza en la repetición y práctica de ejercicios como principales estrategias didácticas; y, por otro, negar las dimensiones cultural y social de la educación matemática, lo que conlleva que el conocimiento matemático se siga entendiendo como una tecnología neutra en manos de unos cuantos, de difícil acceso para todo el mundo, que no deja espacio al pensamiento divergente, a las alternativas de interpretación ni al reconocimiento de las diferencias. Así, pues, en lugar de plantear una enseñanza mecanicista de las matemáticas, es necesario formar personas que descubran por sí mismas las ideas matemáticas a través de buenas prácticas, más que transmitirles un conocimiento matemático ya elaborado.

Una vez tomadas las decisiones sobre qué contextos y recursos utilizar para definir una línea metodológica de centro en el área de matemáticas, lógicamente deben alinearse con los conocimientos matemáticos descritos, es decir, se trata de seleccionar qué contextos y recursos se utilizan para abordar la enseñanza de cada contenido. Esta vinculación es también imprescindible, ya que permite superar la falta de oportunidades indicada y llevar a cabo una enseñanza más eficaz, lo cual implica conocer lo que sabe el alumnado y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien (NCTM, 2003).

Decisiones sobre la gestión de las actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

La concreción de los contextos y los recursos para enseñar los distintos conocimientos matemáticos determinan, en buena medida, las prácticas de enseñanza, ya que enseñar matemáticas con un libro de texto, por ejemplo, no requiere el mismo tipo de gestión que promover el desarrollo de la competencia matemática a través de un contexto real. Es evidente, pues, que las decisiones sobre los fundamentos metodológicos que caracterizan la gestión de la enseñanza de las matemáticas deben ser consecuentes con la selección de los contextos y los recursos. En otras palabras, se trata de que el centro se posicione metodológicamente sobre *¿cómo enseñar matemáticas en los distintos contextos y recursos?*

Esta es una idea clave en didáctica de las matemáticas, ya que hay que tener muy presente que no es suficiente, por ejemplo, decidir que se va a trabajar un determinado contenido geométrico a través de un material manipulativo, porque el material manipulativo por el mismo no es garantía de aprendizaje si no se acompaña de una gestión eficaz (López y

Alsina, 2015). Desde este punto de vista, se asume que es necesario establecer unas pautas generales a nivel de centro que, en un sentido amplio, concreten cómo enseñar matemáticas y cómo no enseñarlas, sin pretender lógicamente que cada maestro haga exactamente lo mismo en el mismo contexto o con el mismo recurso. El EIEM (Alsina, 2020b) describe también diversas recomendaciones que pueden servir de orientación, reflexión y debate para establecer estas directrices generales:

Gestionar la enseñanza de los contenidos matemáticos a través de los procesos matemáticos

El EIEM promueve una enseñanza de las matemáticas que implique pensar y hacer, más que memorizar definiciones y procedimientos. Desde este prisma, Alsina (2020a) describe cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos matemáticos, entendiendo por “práctica productiva” una acción o destreza educativa útil y provechosa para promover el aprendizaje de las matemáticas con sentido en todos los niveles. Las cinco prácticas productivas son las siguientes: 1) promover la resolución de situaciones problemáticas que impliquen pensar; 2) plantear preguntas efectivas en la clase de matemáticas que impliquen argumentar; 3) fomentar la comunicación en el aula de matemáticas en un ambiente que invite a interactuar, negociar y dialogar; 4) diseñar e implementar actividades matemáticas que requieran hacer conexiones; y 5) incentivar la expresión oral, gráfica y/o simbólica de las ideas matemáticas internas y las acciones externas a través de tareas que impliquen representar. En la Figura 6 se ofrecen algunos indicadores en forma de interrogantes que pueden servir para gestionar la enseñanza de las matemáticas a través de los procesos.

	Resolución de problemas	Razonamiento y prueba	Comunicación	Conexiones	Representación
Números y operaciones	¿Qué problema/reto voy a plantear al alumnado?	¿Qué buenas preguntas voy a formular para que el alumnado argumente sus ideas matemáticas y sus acciones?	¿Cómo voy a fomentar la interacción? (en parejas, en pequeño grupo, etc.)	¿Qué contenidos matemáticos se pueden relacionar?	¿Qué tipo de representación debe hacer el alumnado?
Álgebra	¿Cuál es la incógnita/cuáles son los datos?			¿Desde qué asignatura voy a plantear el reto?	Verbal, gráfica, simbólica ...
Geometría	¿Conoces algún otro problema vinculado con éste?		¿Qué vocabulario específico deben aprender?		
Medida	¿Qué pasos vas a seguir? .../...				
Estadística y probabilidad					

Figura 6. Preguntas que pueden servir de indicadores para la gestión de la enseñanza de los contenidos a través de los procesos. Fuente: Alsina (2020b)

Desde el punto de vista del EIEM, es altamente recomendable que todas las actividades de los tres niveles (contextos informales, intermedios y formales) estén impregnadas de esta visión. A efectos prácticos esto significa que, sea cual sea el contenido matemático que se planifique y el contexto de enseñanza en el que se lleve a cabo una determinada actividad, cuestiones como la actividad heurística, la argumentación, la comunicación o la representación (lenguaje matemático), tienen un lugar destacado en la gestión de las prácticas de enseñanza.

Considerando que una parte del profesorado en activo no ha tenido la oportunidad de recibir una formación específica sobre la enseñanza de los contenidos matemáticos a través de los procesos, diversos organismos y autores han proporcionado herramientas para promover el desarrollo profesional del profesorado. El CREAMAT (2009), por ejemplo, además de los cinco indicadores para la planificación de las actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de la Figura 5, describe también cinco indicadores para la gestión de dichas actividades (Figura 7):

<i>Bloque 2: Gestión de la actividad</i>	
6.	¿Se fomenta la autonomía y la iniciativa de los niños y niñas?
7.	¿Se interviene a partir de preguntas adecuadas más que con explicaciones?
8.	¿Se pone en juego el trabajo y el esfuerzo individual pero también el trabajo en parejas o en grupos que implica conversar, argumentar, convencer, consensuar, etc.?
9.	¿Implica razonar sobre lo que se ha hecho y justificar los resultados?
10.	¿Se avanza en la representación de manera cada vez más precisa y se usa progresivamente lenguaje matemático más preciso?

Figura 7. Indicadores competenciales para la gestión de las actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Fuente: CREAMAT (2009)

Más adelante, Alsina y Coronata (2014), Maurandi, Alsina y Coronata (2018) y Alsina, Maurandi, Ferré y Coronata (2021) diseñan y validan el instrumento “Pauta de observación de la presencia de los procesos matemáticos en la práctica docente”. Este instrumento ofrece siete indicadores para cada proceso matemático, con dos finalidades: 1) conocer los aspectos clave de la enseñanza de los contenidos matemáticos a través de cada proceso; 2) analizar la presencia de estos aspectos en la propia práctica a partir de una escala de Likert (1: ausente; 5: muy presente), para poder detectar puntos fuertes y puntos débiles. En la Figura 8 se reproducen, a modo de ejemplo, los indicadores de resolución de problemas:

1. Indicadores de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:	1	2	3	4	5
Plantea situaciones problemáticas usando diferentes tipos de apoyo (oral, concreto, pictórico).					
Contextualiza las situaciones problemáticas a la vida cotidiana de los alumnos.					
Propone situaciones problemáticas de diversos tipos.					
Realiza preguntas que generan la investigación y exploración para solucionar al problema.					
Permite a los niños la utilización de material concreto y/o pictórico con apoyo oral para la resolución de problemas.					
Mantiene a los niños comprometidos con el proceso de resolución de problemas.					
Promueve la discusión en torno a las estrategias de resolución de problemas y los resultados.					

Figura 8. Fragmento de la pauta de observación de la presencia de los procesos matemáticos en la práctica docente. Fuente: Maurandi et al. (2018, p. 350)

Promover prácticas de enseñanza-aprendizaje que consideren tanto al alumnado como al profesorado

Esta recomendación parte de los planteamientos de Godino y Burgos (2020), quienes señalan que en la gestión de las prácticas de enseñanza es necesario considerar el debate entre los modelos centrados en la transmisión de conocimientos y los modelos centrados

en la construcción de conocimientos: los primeros sostienen que la eficacia del proceso de estudio está ligada más a la acción docente que al descubrimiento del alumnado y, en consecuencia, focalizan su trabajo en el modelo instruccional directo y transmisivo; mientras que los segundos basan su enfoque en el aprendizaje por indagación del alumnado, con un apoyo subsidiario del profesorado.

El EIEM recomienda la combinación de ambos modelos en la práctica docente (Figura 9), lo cual implica una gestión de las prácticas de enseñanza que considere la enseñanza de los contenidos matemáticos a través de los procesos a partir de actividades competenciales ricas, en las que tanto el alumnado como el profesorado tengan un papel relevante: el alumnado construyendo su conocimiento y el profesorado proporcionándolo.



Figura 9. Combinación de la indagación y la instrucción directa en la gestión de la enseñanza de las matemáticas. Fuente: elaboración propia.

En la práctica, esto significa que el profesorado debe conocer diversas maneras de actuar y tener criterios para saber cuándo, qué y por qué algo es conveniente y reflexionar sobre ello sistemáticamente (Korthagen, 2001). Desde este prisma, el profesorado es el responsable de tomar decisiones acertadas durante la práctica docente acerca de cuándo es necesario explicar un conocimiento matemático y cuándo es imprescindible que el alumnado indague y construya su conocimiento. En el EIEM se considera que, si no hay una gestión a veces indagativa y otras veces directa, la enseñanza eficaz no es posible.

Decisiones sobre la evaluación de la asignatura de matemáticas

Todos los posicionamientos descritos en las secciones anteriores para definir una línea metodológica de centro en el área de matemáticas determinan, sin duda, la forma de evaluar las matemáticas. Hasta el momento, muy sintéticamente, dicha línea se ha orientado hacia un planteamiento competencial en el que las competencias matemáticas se vinculan estrechamente con los contenidos matemáticos que, a su vez, se enseñan a través de una planificación en la que se consideran diversos contextos (informales: situaciones reales, materiales manipulativos y juegos; intermedios: recursos literarios y tecnológicos; y formales: recursos gráficos) y una gestión fundamentada en los procesos matemáticos. En este marco, ¿sigue teniendo sentido una evaluación exclusivamente sumativa basada en un examen escrito? El examen escrito, de hecho, es el instrumento de evaluación más utilizado en el marco de una enseñanza basada en la instrucción directa y la mecanización, la memorización y la práctica de ejercicios descontextualizados, pero si la línea metodológica de centro apunta hacia otra dirección, es necesario también posicionarse acerca de la forma de evaluar. En este sentido, es necesario tomar decisiones

sobre *¿cómo evaluar la asignatura de matemáticas?*, considerando que “la evaluación es la palanca más poderosa de la que disponemos para inducir cambios en el currículo (...) si realmente se desea innovar en el currículo, hay que mejorar los procesos de evaluación” (Goñi, 2008, p. 184).

Para promover un cambio de paradigma en la evaluación de las matemáticas, Alsina (2018b) plantea diez ideas clave acerca de la evaluación competencial de las matemáticas y, más adelante, Alsina, García y Torrent (2019) documentan las decisiones que se llevan a cabo en una escuela de Educación Infantil y Primaria para definir una línea metodológica de centro en el área de matemáticas, incluyendo también cambios substanciales en la evaluación. A continuación, se sintetizan algunas de las principales ideas descritas en estos documentos:

La evaluación de la competencia matemática forma parte del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Por un lado, esto significa que, si se planifica la enseñanza de las matemáticas a través de diversos contextos y recursos como las situaciones reales, los materiales manipulativos, los entornos tecnológicos, etc., entonces debe llevarse a cabo una evaluación formativa en el marco de estos distintos contextos y recursos; por otro lado, si el desarrollo de la competencia matemática implica trabajar los distintos contenidos a través de los procesos matemáticos, entonces es altamente aconsejable determinar cómo el alumnado va desarrollando progresivamente estas habilidades.

La evaluación de la competencia matemática implica evaluar los procesos matemáticos

El planteamiento competencial implica, como se ha indicado, un cambio de paradigma en la forma de evaluar las matemáticas: en lugar, por ejemplo, de evaluar mediante una prueba escrita si el alumnado sabe hacer restas de forma repetida y descontextualizada, es más relevante determinar si usan de forma comprensiva la resta para resolver un problema real; en lugar de evaluar si han memorizado el nombre de una figura geométrica, es más relevante determinar si son capaces de identificar un determinada figura en el entorno y describir sus propiedades geométricas; o bien, en lugar de saber de memoria la fórmula para calcular el área de un triángulo, es mucho más relevante determinar si son capaces de inferir una fórmula y después usarla comprensivamente cuando sea necesario. Es evidente que este cambio de mirada requiere utilizar otros tipos de técnicas e instrumentos en el marco de una evaluación que ofrezca oportunidades de aprendizaje al alumnado y que no sirva sólo para medir su nivel de conocimientos.

La evaluación de la competencia matemática requiere, a menudo, el uso de rúbricas

Una rúbrica es un instrumento que enumera los criterios de un trabajo o lo que cuenta y puede utilizarse tanto como herramienta de evaluación como de enseñanza (Goodrich, 2000). Desde este punto de vista, esta autora considera que las rúbricas pueden servir tanto para que el profesorado determine el nivel del alumnado como para que el propio alumnado analice su nivel de conocimientos, a través de una evaluación formadora (autoevaluación y coevaluación). Para facilitar esta función, Alsina, Abarca y Grabulosa (2020) han diseñado y validado la “Rúbrica para Evaluar la Competencia Matemática en Educación Primaria” (RECMAT 6-12). Esta rúbrica consta de cinco componentes, correspondientes a la Resolución de problemas, el Razonamiento y la prueba, la Comunicación, las Conexiones y la Representación. En la Figura 10 se muestra un fragmento del componente “Resolución de problemas”:

¿Cómo definir una línea metodológica en el área de Matemáticas? Tomando decisiones en la escuela

Componente 1. Resolución de problemas

Indicadores	Niveles de desarrollo			
	4. Experto	3. Avanzado	2. Aprendiz	1. Novel
C1.1. Traducción de un problema a una representación matemática, comprendiendo la situación, los datos que aporta y el contexto.	Tiene una habilidad muy bien desarrollada para traducir un problema a lenguaje matemático, comprendiendo y explicando la situación, los datos que aporta y el contexto.	Traduce un problema a lenguaje matemático de forma audaz, comprendiendo y explicando la situación, los datos que aporta y el contexto.	Está aprendiendo a traducir un problema a lenguaje matemático.	Se inicia en la traducción de un problema a lenguaje matemático básico.
C1.2 Uso de conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolver un problema.	Es muy competente usando conceptos, herramientas y/o estrategias matemáticas para resolver un problema, con rigor y precisión, p. ej.: divide el problema en partes para resolverlo.	Usa de forma hábil conceptos, herramientas y/o estrategias matemáticas para resolver un problema.	Usa de forma aceptable conceptos, herramientas y/o estrategias personales para resolver un problema.	Empieza a usar conceptos, herramientas y/o estrategias personales para resolver un problema, con ayuda.
C2.1. Comunicación de la solución de un problema.	Verbaliza la solución de forma muy diestra, p. ej.: aporta argumentos que validan la solución.	Verbaliza la solución de un problema de forma competente.	Verbaliza de forma aceptable la solución de un problema.	Empieza a verbalizar la solución de un problema.

Figura 10. Fragmento del instrumento RECMAT 6-12. Fuente: Alsina et al. (2020, p. 134)

Como puede apreciarse en la Figura 10, cada competente consta de una serie de indicadores (subcompetencias) y, a su vez, para cada indicador se describen cuatro niveles de adquisición (desde experto hasta novel).

Para concluir, en la Figura 11 se sintetiza el despliegue de posicionamientos descritos para definir una línea metodológica de centro en el área de matemáticas:



Figura 11. Despliegue de posicionamientos para definir una línea metodológica de centro en el área de matemáticas. Fuente: elaboración propia

Estos cinco posicionamientos deben estar totalmente engranados para definir una línea metodológica de centro que sea:

- Estructurada y coherente, para poder vincular con sentido las partes que integran el todo.
- Clara y sencilla, para facilitar la comprensión y el manejo de los distintos elementos.
- Ágil y dinámica, para posibilitar la incorporación, modificación o sustitución de elementos.
- Razonada y consensuada, para que sea producto de la reflexión tanto individual como grupal.
- Fundamentada y transformadora, para dar respuesta a las necesidades sociales contemporáneas.

CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se han descrito los elementos que deberían considerarse para definir una línea metodológica de centro en el área de matemáticas, asumiendo que se trata de una acción necesaria para evitar un funcionamiento anárquico a partir del sistema de creencias de cada docente o que se delegue toda la responsabilidad a un proyecto editorial (Porter, 2002; Stylianides, 2009; Tarr et al., 2006). En este sentido, se han explicitado diversos posicionamientos de tipo pedagógico para poder tomar decisiones a nivel de centro respecto a qué matemáticas se enseñan, para qué se enseñan, cómo se enseñan y cómo se evalúan.

La asignatura de matemáticas se ha orientado hacia un planteamiento competencial (Niss, 2004; OECD, 2004, 2006), cuya meta es promover tanto el uso de las matemáticas (aspecto funcional o aplicado) como su comprensión (aspecto formativo) y valoración (aspecto actitudinal) en una variedad de situaciones en las que juegan o pueden desempeñar un papel (Niss, 2002). Por su impacto internacional, respecto a la selección de los conocimientos matemáticos se ha descrito el planteamiento del NCTM (2003), que considera estándares de contenidos (Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y Probabilidad), que describen explícitamente los contenidos que deberían aprender, y estándares de procesos (Resolución de problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representación), que ponen de relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos. Además, se ha insistido en la necesidad de vincular estrechamente los contenidos matemáticos con las competencias matemáticas. Para aprender a usar, comprender y valorar estos conocimientos se ha propuesto una planificación de la enseñanza de las matemáticas a través de diversos contextos (informales: situaciones reales, materiales manipulativos y juegos; intermedios: recursos literarios y tecnológicos; y formales: recursos gráficos), que deben alinearse con los contenidos, junto con una gestión de la enseñanza de estos contenidos a través de los procesos matemáticos, tomando como base los planteamientos del EIEM (Alsina, 2018a, 2019, 2020b). Finalmente, respecto a la evaluación, se ha justificado la necesidad de avanzar hacia una evaluación competencial que sea tanto formativa como formadora, usando instrumentos como por ejemplo rúbricas (Alsina, 2018b; Alsina et al. 2019; Alsina et al., 2020).

Es evidente que los posicionamientos descritos requieren compromiso por parte de todos. Unas décadas atrás, a medio camino entre el realismo y el pesimismo, Hargreaves et al. (2001, p. 128, 129, 132 y 134) indicaron que “si el profesor no está dispuesto a hacerlo,

no se puede hacer”; “si el profesor no sabe cómo hacerlo o a la hora de la verdad no se siente seguro haciéndolo, no se puede hacer”; “si un docente no está dispuesto a hacerlo, no se puede hacer”, y “si el profesor tiene que hacer demasiadas cosas, no las hará bien”. Hoy, en pleno siglo XXI, con equipos docentes con un amplio abanico de competencias profesionales, es posible eliminar las negaciones de estas sentencias y, en su lugar, avanzar hacia el optimismo: es absolutamente posible definir una línea de centro en el área de matemáticas a partir del engranaje de los distintos posicionamientos descritos ya que, si el profesor está dispuesto a hacerlo, se puede hacer; si el profesor sabe cómo hacerlo y se siente seguro haciéndolo, se puede hacer; si un docente está dispuesto a hacerlo, se puede hacer; y si el profesor tiene el tiempo necesario para hacer las cosas, las hará bien.

REFERENCIAS

- Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona: Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.
- Alsina, Á. (2012a). Matemàtiques per a l'escola o per a la vida? Cap a l'alfabetisme matemàtic a l'Educació Primària. *Guix* 388, 12-16.
- Alsina, Á. (2012b). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14.
- Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, 33(1), 7-29.
- Alsina, Á. (2018a). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio. Itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros*, 376, 13-20.
- Alsina, Á. (2018b). La evaluación de la competencia matemática: ideas clave y recursos para el aula. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 98, 7-23.
- Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Editorial Graó.
- Alsina, Á. (2020a). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar*, 28, 1-13.
- Alsina, Á. (2020b). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática*, 3(2), 127-159.
- Alsina, Á. (2021). Comprender y usar las matemáticas: cambios curriculares, desafíos docentes y oportunidades sociales. *Realidad y Reflexión*, 53, 14-39.
- Alsina, Á. y Coronota, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(2), 21-34.
- Alsina, Á., Abarca, M., y Grabulosa, I. (2020). Evaluando la competencia matemática: construcción y validación de una rúbrica. *Números – Revista de Didáctica de la Matemática*, 105, 119-139.

- Alsina, Á., García, M. y Torrent, E. (2019). La evaluación de la competencia matemática desde la escuela y para la Escuela. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 55, 85-108.
- Alsina, Á., Maurandi-Lopez, A., Ferre, E., y Coronata, C. (2021). Validating an instrument to evaluate the teaching of mathematics through processes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 559–577.
- Clements, H.D. y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Jonesborough, USA: Learning Tools LLC.
- CREMAT (2009). Preguntas que poden servir d'indicadors del nivell de riquesa competencial d'una activitat. Recuperado de https://agora.xtec.cat/cesire/wp-content/uploads/usu397/2019/01/indicadors_competencials.pdf
- Delors, J. (1996.). Los cuatro pilares de la educación. En UNESCO (Ed.), *La educación encierra un tesoro. Informe a la de la Comisión internacional sobre la educación para el siglo XXI* (pp. 91-103). Madrid: Santillana/UNESCO.
- Engelbertink, M.M.J., Colomer, J., Woudt- Mittendorff, K.M., Alsina, Á., Kelders, S.K., Ayllón, S., y Westerhof, G.J. (2020): The reflection level and the construction of professional identity of university students, *Reflective Practice, Reflective Practice*, 22(1), 73-85.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
- Godino, J. D. y Burgos, M. (2020). Interweaving transmission and inquiry in mathematics and sciences instruction. En K. O. Villalba-Condori, A. Aduríz-Bravo, J. Lavonen, L.-H. Wong y T.-H. Wang (Eds.), *CISETC 2019, CCIS 1191* (pp. 6–21). Springer Nature Switzerland AG.
- Goñi, J. M^a. (2008). *3²-2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.
- Goodrich, H. (2000). Using rubrics to promote thinking and learning. *Educational Leadership*, 57(5), 13-18.
- Hargreaves, A., Earl, L., Moore, S. y Manning, S. (2001). *Aprender a cambiar. La enseñanza más allá de las materias y los niveles*. Barcelona: Editorial Octaedro.
- Korthagen, F. A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates.
- López, M. y Alsina, Á. (2015). La influencia del método de enseñanza en la adquisición de conocimientos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6, Educación Matemática en la Infancia*, 4(1), 1-10.
- Maurandi, A., Alsina, Á., y Coronata, C. (2018). Los procesos matemáticos en la práctica docente: análisis de la fiabilidad de un cuestionario de evaluación. *Educatio Siglo XXI*, 36(3), 333-352.
- Morin, E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. París: UNESCO.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.

¿Cómo definir una línea metodológica en el área de Matemáticas? Tomando decisiones en la escuela

- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2014). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. Reston, Va.: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. Reston, Va.: NCTM.
- Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project*. Roskilde: Roskilde University.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. París: OECD.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy - A Framework for PISA 2006*. París: OECD.
- Porter, A. (2002). Measuring the content of instruction: Uses in research and practice. *Educational Researcher*, 31(7), 3-14.
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(4), 258-288.
- Tarr, J. E., Chávez, Ó., Reys, R. E., y Reys, B. J. (2006). From the written to the enacted curricula: The intermediary role of middle school mathematics teachers in shaping students' opportunity to learn. *School Science and Mathematics*, 106(4), 191-201.

Ángel Alsina Pastells
Universitat de Girona, España
angel.alsina@udg.es



ISSN: 2603-9982

Rodríguez-Faneca, C., Pedrosa-Jesús, C. y Cuida, A. (2021). Educación matemática en Iberoamérica: Un estudio bibliométrico en SSCI. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 4(2), 40-53

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN IBEROAMÉRICA: UN ESTUDIO BIBLIOMÉTRICO EN SSCI

Cristina Rodríguez-Faneca, Universidad de Córdoba, España

Cristina Pedrosa-Jesús, Universidad de Granada, España

Astrid Cuida, Universidad de Valladolid, España

Resumen

El propósito de esta investigación es realizar un estudio bibliométrico centrado en la producción científica sobre Educación Matemática que se produce en Iberoamérica y que está indexada en la base de datos de la Web of Science (WoS) en el periodo 2000 a 2020. Para llevar a cabo este estudio, se descargaron de la base de datos de WoS los relativos a los documentos indexados y, a partir del recuento de frecuencias, se han identificado los patrones de producción de documentos por año e idioma, así como las instituciones más productivas. Se halló un incremento en la coautoría y el grado de colaboración. se identificó el núcleo de las zonas Bradford de dispersión de la literatura en la temática hallándose que está conformado por tres revistas dos de ellas editadas en la región iberoamericana.

Palabras clave: Educación Matemática, Bibliometría, Producción científica, Iberoamérica, Colaboración

Mathematics Education in Iberoamerica: A bibliometric study in SSCI

Abstract

The objective of this research is to carry out a bibliometric study of the scientific production on Mathematics Education produced in Ibero-America and indexed in the Web of Science (WoS) database in the period between 2000-2020. To carry out this study, the data pertaining to the indexed documents was downloaded from the WoS database. Based on the frequency count, patterns such as document production by year and language were identified, as well as the most productive institutions. An increase in co-authorship and an increase of the degree of collaboration between authors was found. Bradford distribution was also calculated for this subject. It was found to be made up of three journals, two of which are published in the Ibero-American region.

Keywords: Mathematics education, Bibliometrics, Scientific production, Iberoamerica, collaboration

INTRODUCCIÓN

Los estudios de tipo bibliométrico permiten conocer cuál es el estado de un determinado campo de conocimiento y cuáles son los patrones de producción de países, regiones o instituciones para, por un lado, poder conocer sus puntos fuertes, y por otro, poder tomar medidas de carácter político, científico o metodológico que permitan superar sesgos o posibles deficiencias en ese campo (Maz-Machado y otros, 2020).

La bibliometría consiste en el análisis cuantitativo de determinadas características de las publicaciones o documentos, tales como el autor, el tema, la información de la publicación, las fuentes citadas, etc. (Özkaya, 2018). En definitiva, es posible investigar el proceso de producción de la comunicación científica utilizando los datos bibliométricos como fuentes de información (Güzeller y Çeliker, 2018).

En este sentido, Diem y Wolter (2013) señalan que el uso de datos bibliométricos para la evaluación del desempeño de la investigación de los académicos en el ámbito educativo está justificado siempre que la bibliometría no sea demasiado indiscriminada en términos de la calidad del material incluido.

Así, este tipo de estudios se convierten en herramientas que ayudan a la evaluación de todos los agentes implicados en el proceso de la investigación científica, ya sean autores, centros, países o instituciones. La investigación bibliométrica ha sido ampliamente utilizada en diversos campos de las ciencias y más recientemente han tenido una mayor aplicación en el ámbito de las ciencias sociales (Bornmann, Thor, Marx y Schier, 2016; Gómez-Carrasco, López-Facal y Rodríguez-Medina, 2019). A pesar de esto, todavía en algunos sectores se observa con recelo su aplicación en Ciencias Sociales (Archambault, y Larivière, 2010).

La producción científica en Educación Matemática se ha analizado utilizando diversos indicadores: en algunos casos se ha estudiado una revista específica como *Relime* (Maz-Machado y otros, 2015) o *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education* (Wang y otros, 2017), en otros casos se han estudiado conjuntos de revistas (Jiménez-Fanjul, Maz-Machado y Bracho-López, 2013), o determinadas regiones (Torres-Alfonso, Peralta-González y Toscano-Menocal, 2014). También se han estudiado distintos niveles educativos (Castro, Gómez y Cañadas, 2019). Así mismo, se han analizado determinados congresos o seminarios de ámbitos locales e internacionales (Maz-Machado y otros, 2011), las tesis doctorales en España (Vallejo y otros, 2008) o en Turquía (Mondal y Roy, 2018). Özkaya (2018) realizó un análisis bibliométrico de las investigaciones científicas publicadas en área de Educación Matemática entre 1980 y 2018 para conocer la disposición general del conocimiento científico en este campo.

Cruz y Rodríguez (2019) analizaron la producción científica sobre Educación Matemática incluida en la base de datos Scopus entre los años 1978 y 2017. Hallaron 6635 documentos. Este estudio identificó una red de colaboración internacional de países latinoamericanos conformada por Argentina, Brasil, Chile, Colombia y Venezuela. Sin embargo, el criterio búsqueda para la selección utilizado TITLE-ABS-KEY (“mathematics education”), no es el más adecuado porque excluye una gran parte de la producción en el área, como ya han señalado otros investigadores (Adamuz y otros, 2013).

Por su parte, Hwang y Tu (2021) analizaron los patrones en la producción científica sobre la inteligencia artificial realizada desde la Educación Matemática entre los años 1996 y 2020. Solamente hallaron 43 documentos.

En el contexto latinoamericano, Muñoz-Ñungo y otros (2020) estudiaron la producción científica realizada en Colombia en torno a la Educación Matemática, indexada en la base de datos *Emerging Sources Citation Index* (ESCI) entre los años 2005 y 2019. Esta investigación concluyó que, si bien la producción había experimentado un alto incremento en ese periodo, la mayor parte de esta se publicó en revistas de ámbito local y con poco impacto internacional.

Como se ha señalado, gran parte de estas investigaciones se han centrado en datos provenientes de las bases de datos de carácter internacional como WoS y Scopus. Por tal razón, se realiza un estudio sobre la producción relacionada con Educación Matemática realizada en los países iberoamericanos e indexada en SSCI.

OBJETIVOS

Los principales objetivos de este estudio son:

1. Identificar la producción diacrónica en Educación Matemática en Iberoamérica que se encuentra incorporada a SSCI.
2. Identificar las instituciones más productivas.
3. Determinar algunos indicadores de colaboración en autoría.
4. Identificar las revistas incluidas en SSCI en las que se publican estas investigaciones.
5. Determinar el tipo y alcance de la colaboración a nivel institucional.

METODOLOGÍA

El estudio que se presenta es exploratorio y descriptivo. En el mes de abril de 2021 se consultó la página web de WoS y se seleccionó en la colección principal la base de datos *Social Sciences Citation Index*. Se realizó una búsqueda utilizando como descriptores de búsqueda los definidos por Adamuz y otros (2013) para identificar artículos de Educación Matemática. Estos descriptores fueron:

- TEMA: (mathemat* OR algebra OR arithmetic OR geometry OR Topology)
- TEMA: (Curricul* OR Instruc* OR history OR educ* OR learn* OR teach* OR assessment OR didactic* OR school* OR student* OR goal* OR Knowledge OR classroom OR achievement OR competen* PR "problem solving" OR Skill* OR "PISA" OR "TIMSS" OR Dyscalculia OR Technology OR Textbook OR attitude).

El periodo temporal se restringió al comprendido entre 2000 y 2020. Los resultados se filtraron por “artículo” o “review”, arrojando 20817 registros. Se seleccionaron únicamente los correspondientes a las categorías *Education Educational Research*, *Psychology Educational*, *Education Scientific Disciplines* y *Education Special*, de manera que se garantizase que todos los documentos tuvieran relación con la Educación. Finalmente se seleccionaron aquellos que corresponden a algún país iberoamericano. Como resultado de la aplicación de estos filtros se obtuvieron 939 registros, que de ahora en adelante se denominarán de forma genérica “documentos”.

La información se volcó en una base de datos utilizando software para gestionar bases de datos y hojas de cálculo. A continuación, se procedió a realizar un proceso de estandarización de los nombres de las universidades debido a que, en ocasiones, se hallaban diversas variantes para una misma universidad. El proceso requirió de una revisión exhaustiva de las distintas denominaciones que los autores señalan para una misma universidad por lo que los resultados difieren de los que ofrece WoS mediante la opción de análisis de resultados. A modo de ejemplo, se hallaron denominaciones tales

como “UNIV BASQUE COUNTRY” y “UNIV BASQUE COUNTRY UPV EHU”, “UNIV DIST FRANCISCO JOSE DE CALDAS” y “UNIV DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS” o también “UNIV PEDAG NACL” y “UNIV PEDAGOG NACL”, por mencionar algunos casos donde dos denominaciones hacían referencia a una misma institución.

Las variables que se tuvieron en cuenta para el análisis fueron: el año de publicación, la afiliación de los autores, el nombre de la revista, el número de autores por documento, el idioma de publicación y el país de cada autor firmante. De este modo, se tuvo en cuenta la filiación de los autores firmantes para identificar la colaboración que se produce entre países y luego se representó la red de colaboración a través del software VOSviewer Versión 1.6.15 (Van Eck y Waltman, 2020). La colaboración entre países se determinó a partir del número de autores de cada país.

Se contabilizó el número de autores para cada uno de los artículos para determinar el Grado de colaboración (Subramanyan, 1983), que supone una medida de proporción de múltiples autorías. Esta se determina a partir de la siguiente fórmula:

$$GC = \frac{N_m}{N_m + N_s}$$

Donde:

N_m = Número de artículos con autores múltiples.

N_s = Número total de artículos con autoría única.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Producción

En el periodo estudiado, desde el año 2000 hasta el 2020, se halló que la producción científica sobre Educación Matemática realizada en Iberoamérica y publicada en las revistas indexadas en WoS fue de 939 documentos. El análisis diacrónico revela que se ha producido un incremento paulatino, si bien este aumento no ha sido continuo, debido a que su punto mínimo se sitúa entre los años 2001 y 2004. Se alcanzó la máxima producción en el año 2020 (Figura 1). El patrón de producción general denota que el mejor ajuste a un modelo determinista es el de un crecimiento de tipo exponencial ($R^2 = 0,956$), con ciclos de aumento y decrecimiento. Se ha pasado de publicar tres artículos en el año 2000 hasta alcanzar los 129 en el año 2020. Se observa que, en los últimos cinco años, se ha producido el 53,2% de todos los documentos.

El 81,5% de los documentos han recibido alguna cita y solo 18,5% no ha recibido ninguna. El artículo más citado es “Beyond Nintendo: design and assessment of educational video games for first and second grade students”, publicado en *Computers & Education* en el año 2003 (Rosas y otros, 2003), que ha recibido 336 citaciones.

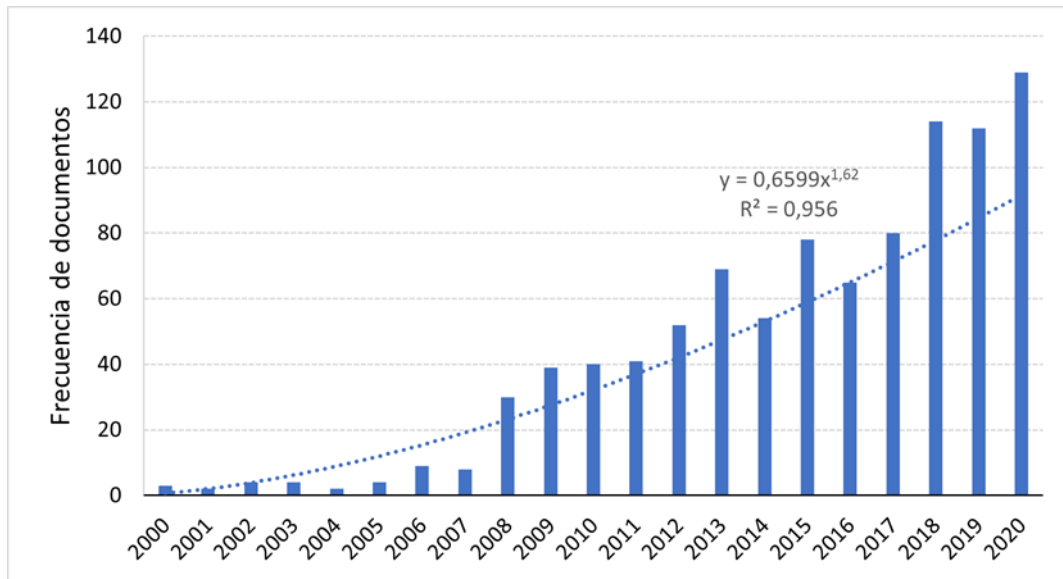


Figura 1. Evolución del número de documentos por año.

Se halló que los documentos han sido publicados de forma mayoritaria en inglés (67%), seguido a distancia por el español (31,8%) (Tabla 1). Aunque hay documentos publicados en portugués, su número es casi anecdótico.

Tabla 1. Idioma de publicación

Idiomas	N.º documentos	%
Inglés	629	67,0
Español	299	31,8
Portugués	11	1,2
Total	939	100,0

Colaboración

Los documentos fueron firmados por 2169 autores diferentes que dieron lugar a un total de 2925 firmas. El promedio es de 3,11 autores por documento. Este valor es superior al que se ha hallado, por ejemplo, para la colaboración en Educación en España. Anta (2008) determinó que el promedio para las publicaciones de Educación en revistas españolas tenía una media de 1,8 autores. Por su parte, Fernández-Cano (2011) estableció el promedio en 1,9 autores por artículo para la producción española de Educación en SSCI. Si comparamos el valor del promedio de autores hallado, casi duplica al hallado por Bracho y otros (2012) para la producción en Educación Matemática publicada solo en revistas españolas (1,7 por documento).

Al analizar en detalle el número de autores, se observa que el 90,7% de los artículos ha sido escrito en autoría múltiple, y aquellos firmados por dos o tres autores representan el 60,27% del total. El patrón de autoría ha sufrido cambios importantes en lo que se refiere a los documentos con autoría única, que representan un 33% del total de documentos al iniciar el periodo (en el año 2000) y apenas un 9,3% al finalizarlo, en el año 2020 (Tabla 2).

Tabla 2. *Patrones de autoría en Educación en Matemática en Iberoamérica*

Año	Autor único	Dos autores	Tres autores	Cuatro autores	Cinco autores	6 o más autores	Total de documentos
2000	1	0	1	1	0	0	3
2001	0	0	1	1	0	0	2
2002	0	3	0	1	0	0	4
2003	0	2	0	0	1	1	4
2004	0	1	1	0	0	0	2
2005	0	1	2	0	1	0	4
2006	1	3	2	2	1	0	9
2007	1	3	3	0	1	0	8
2008	3	12	10	1	3	1	30
2009	6	19	9	3	1	1	39
2010	4	11	18	2	1	4	40
2011	5	16	11	6	2	0	41
2012	8	13	15	7	5	4	52
2013	8	22	16	16	5	2	69
2014	5	19	17	5	5	3	54
2015	5	24	27	9	6	7	78
2016	4	18	21	11	8	3	65
2017	5	25	19	21	7	3	80
2018	10	29	34	18	12	11	114
2019	9	30	31	21	15	6	112
2020	12	36	41	20	9	11	129
Total	87	287	279	145	83	58	939

A partir de los datos de la Tabla 2, se determinaron los valores del Grado de Colaboración en el periodo, este es: $GD = 0,91$. El valor mínimo se dio en el año 2000 y el máximo desde el 2001 hasta el 2005 (Tabla 3). Este valor es mayor al hallado para la producción en Educación Matemática en revistas del SSCI, que fue de 0,39 (Jiménez-Fanjul y otros, 2013).

Tabla 3. *Grado de colaboración*

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
0,67	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,89	0,88	0,90	0,85	0,90
2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2000-2020
0,88	0,85	0,88	0,91	0,94	0,94	0,94	0,91	0,92	0,91	0,91

Otro aspecto de interés es conocer la dispersión de las investigaciones sobre Educación Matemática realizada por autores iberoamericanos e indexadas en revistas del SSCI. Se halló que la producción científica se publicó en 150 revistas diferentes. Para conocer cuáles son las revistas que conforman el núcleo principal de difusión de esta área de investigación, procedemos a aplicar la ley de dispersión de la bibliografía científica o Ley

de Bradford (1948) y determinar las diferentes zonas existentes. En la Tabla 4 se presenta la distribución de las revistas según la producción de documentos.

Tabla 4. *Distribución de revistas según la publicación de documentos*

Revistas= a	Docs= b	$a \times b$	Revistas acumuladas= c	$\ln c$	Docs acumulados
1	110	110	1	0,0000	110
1	109	109	2	0,6931	219
1	58	58	3	1,0986	277
1	37	37	4	1,3863	314
1	35	35	5	1,6094	349
2	32	64	7	1,9459	413
1	26	26	8	2,0794	439
1	21	21	9	2,1972	460
1	20	20	10	2,3026	480
1	19	19	11	2,3979	499
1	18	18	12	2,4849	517
2	14	28	14	2,6391	545
1	13	13	15	2,7081	558
3	11	33	18	2,8904	591
1	10	10	19	2,9444	601
3	9	27	22	3,0910	628
1	8	8	23	3,1355	636
2	7	14	25	3,2189	650
5	6	30	30	3,4012	680
9	5	45	39	3,6636	725
14	4	56	53	3,9703	781
18	3	54	71	4,2627	835
24	2	48	95	4,5539	883
55	1	55	150	5,0106	938

Para ilustrar la Ley de Bradford presentamos la representación gráfica en la Figura 2. El eje horizontal es logarítmico y representa el número de revistas acumuladas en orden descendente de productividad y en el eje vertical se representa el número acumulado de artículos. La curva resultante del número acumulado de documentos por las revistas $R(r)$ es monótona y creciente.

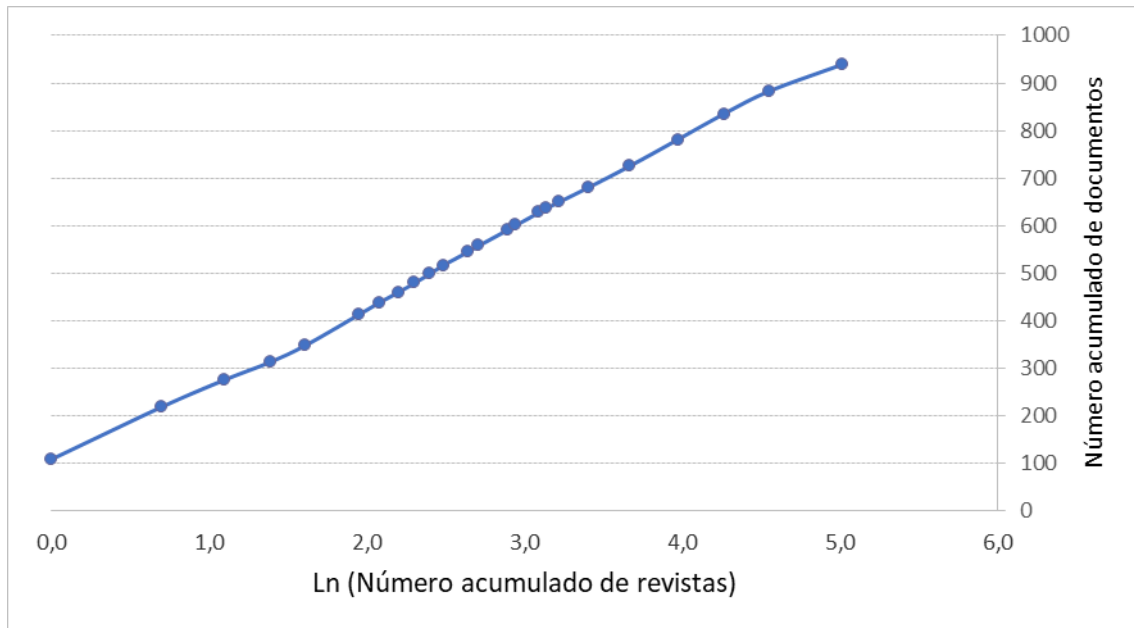


Figura 2. Dispersión de la literatura científica según el modelo Bradford.

Utilizaremos la Ley de Leimkuhler (1967) definida como $R(r) = a \cdot \ln(1 + b \cdot r)$, para determinar las zonas Bradford según el procedimiento propuesto por Egghe (1986;1990) y utilizado en otros estudios (Pinto, Escalona, Pulgarín y Uribe-Tirado, 2015; Maz-Machado y otros, 2020).

Teniendo en cuenta que:

r_0 es el número de revistas en la primera zona Bradford.

y_0 es el número de artículos en cada zona Bradford (cada zona debe ser de igual tamaño).

K es el multiplicador de Bradford.

$R(r)$ es el número acumulado de artículos publicados por las revistas.

a y b son las constantes de la fórmula de Leimkuhler: $R(r) = a \cdot \ln(1 + b \cdot r)$.

Egghe (1986) indica el procedimiento para hallar los valores de las constantes a y b , utilizando las fórmulas: $a = \frac{y_0}{\ln k}$ y $b = \frac{k-1}{r_0}$. Primero, se determina el número de zonas Bradford que se quiere hallar (p), en este caso, $p = 3$. Luego, se encuentra el valor de k ,

$$k = (e^\gamma \cdot y_m)^{1/p}$$

donde γ es la constante de Euler, $\gamma = 0,5772$, de manera que $e^\gamma = 1,781$.

$$k = (1,781 \cdot y_m)^{1/p} = (1,781 \cdot 110)^{1/3} = 5,807$$

$$r_0 = \frac{T}{1+k+k^2+\dots+k^{p-1}} = \frac{T \cdot (k-1)}{k^p-1}, T \text{ es el número total de revistas.}$$

$$r_0 = \frac{T \cdot (k-1)}{k^p-1} = \frac{150 \cdot (5,807-1)}{5,807^3-1} = 3,7011$$

Una vez obtenidos los valores de k y r_0 , se procede, por último, a calcular a y b .

$$a = \frac{(938/3)}{\ln(5,807)} = 177,7460 \quad \text{y} \quad b = \frac{5,807 - 1}{3,7011} = 1,2988$$

Para determinar el número de revistas en cada una de las zonas Bradford ($r_0, k \cdot r_0, k^2 \cdot r_0, \dots$) el propio Egghe (1990) recomienda utilizar los valores exactos de r_0 y k y por tanto también los valores de a y b en la fórmula de la ley de Leimkuhler.

$$R(r) = a \cdot \ln(1 + r) = 177,7460 \cdot \ln(1 + 1,2988 \times 150) = 938,00$$

Tabla 5. *Distribución de todas las revistas en tres zonas Bradford.*

Zonas	Revistas	Documentos	K
Núcleo	3	277	--
Zona 1	16	324	5,33
Zona 2	131	337	8,25
Total	150	938	

La distribución de todas las revistas en las tres zonas Bradford se presenta en la Tabla 5. El núcleo lo forman 3 revistas que acumulan 277 documentos y que se indican en la Tabla 6. Este núcleo está conformado por dos revistas publicadas en países Iberoamericanos (España y México) y una tercera publicada en Países Bajos.

Tabla 6. *Revistas que conforman el núcleo de Bradford.*

	Revista	Nº Docs	%
Núcleo Bradford	<i>Enseñanza de las Ciencias</i>	110	11,73
	<i>Revista Latinoamericana de Investigación Educativa RELIME</i>	109	11,62
	<i>Educational Studies Mathematics</i>	58	6,18

Las dos universidades con mayor participación de autores son españolas, la Universidad de Granada, con presencia en el 5,96% de los documentos, y la Universidad de Barcelona, en el 5,32%.

La Pontificia Universidad Católica de Chile es la universidad latinoamericana con mayor producción, con el 5,11% (Tabla 7). Las 13 universidades con una producción igual o superior a 20 documentos han publicado el 49,31% del total.

Tabla 7. *Universidades iberoamericanas con mayor producción en Educación Matemática en SSCI.*

Universidad	N.º Documentos	%
Universidad de Granada	56	5,96
Universidad Autónoma de Barcelona	50	5,32
Pontificia Universidad Católica de Chile	48	5,11
Universidad de Barcelona	44	4,69
Universidad de Salamanca	38	4,05
Universidad de Chile	37	3,94

Universidad	N.º Documentos	%
Universidad de Oviedo	36	3,83
Universidad de Alicante	35	3,73
Universidad de Valencia	32	3,41
Universidad de Sevilla	25	2,66
Pontificia Universidad Católica deValparaíso	21	2,24
Universidad Complutense de Madrid	21	2,24
Universidad de Minho	20	2,13

España participa en la producción de más de la mitad de todos los documentos de Educación Matemática producidos en la región de Iberoamérica con el 57,51%. A considerable distancia se encuentran Chile y México, los países que le siguen en producción, con el 16,29% y el 11,93%, respectivamente (Tabla 8).

Tabla 8. *Producción por países.*

País	N.º documentos	%
España	540	57,51
Chile	153	16,29
México	112	11,93
Brasil	87	9,27
Portugal	76	8,09
Colombia	36	3,83
Argentina	25	2,66
Perú	10	1,06
Venezuela	6	0,64
Ecuador	6	0,64
Uruguay	6	0,64

El análisis del tipo de colaboración que se establece entre los países de los autores de los documentos revela que España colabora con prácticamente todos los países iberoamericanos que han publicado sobre Educación Matemática en las revistas indexadas en SSCI con excepción de El Salvador, Perú y Uruguay (Figura 3). Por su parte, los autores portugueses solo han colaborado con españoles o brasileños. Entre los países latinoamericanos, Brasil ostenta el mayor nivel de colaboración con los demás países de esa región.

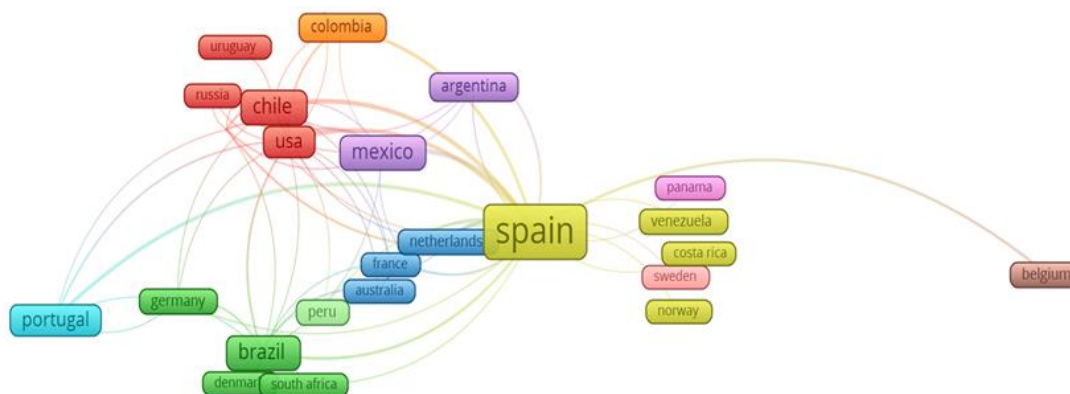


Figura 3. Mapa de colaboración entre países.

Para tener poder visualizar las distintas temáticas que abordan estas investigaciones se seleccionaron los *Keywords Plus* de cada documento. Se observó que los descriptores más utilizados son *mathematics* (3,72%), *student(s)* (3,51%), *knowledge* (3,08%) y *achievement* (2,98%). La co-aparición de *Keywords Plus* generan 5 clústeres que se representan en la Figura 4.

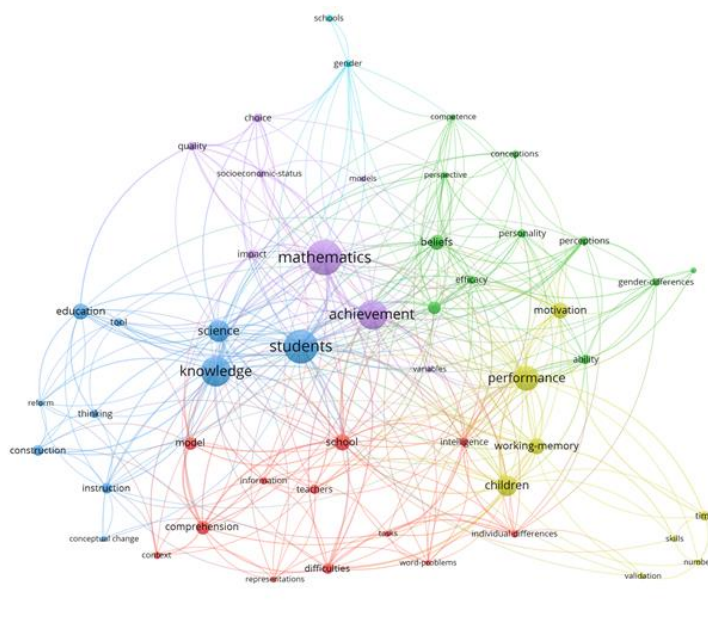


Figura 4. Red de co-aparición de keywords.

CONCLUSIONES

La producción en Educación Matemática realizada por autores iberoamericanos e indexada en SSCI ha experimentado un considerable aumento en el periodo comprendido

entre los años 2000 y 2021. Esta producción ha tenido una variación porcentual del 2900% entre el año inicial y el año final del periodo analizado.

Los valores encontrados para el Grado de Colaboración en la autoría de documentos revelan una alta colaboración, siendo escasas las producciones individuales en los últimos años analizados. Se observa un interés en dar mayor visibilidad internacional de la producción de la región al publicar dos tercios de esta en idioma inglés.

España se erige como el país con mayor producción en Educación Matemática en la región y, a su vez, es quien participa con la mayoría de otros países iberoamericanos.

Por último, y al establecer la dispersión científica mediante la determinación de las zonas Bradford, cabe señalar que el núcleo de difusión de la investigación lo conforman tres revistas, dos de ellas editadas en la región y que se publican en español.

REFERENCIAS

- Adamuz-Povedano, N., Jiménez-Fanjul, N. y Maz-Machado, A. (2013). Búsqueda de descriptores que caractericen una disciplina emergente en WoS y Scopus: el caso de la Educación Matemática. *Biblios. Revista electrónica de bibliotecología, archivología y museología*, 50, 1-14.
- Anta Cabrerós, C. (2008). Análisis bibliométrico de la investigación educativa divulgada en publicaciones periódicas españolas entre 1990-2002. *Revista electrónica de investigación educativa*, 10(1), 1-17.
- Archambault, É. y Larivière, V. (2010). The limits of bibliometrics for the analysis of the social sciences and humanities literature. *World social science report*, 251-254.
- Bordons, M. y Gómez, I. (1997). La actividad científica española a través de indicadores bibliométricos en el período 1990-93. *Revista general de información y documentación*, 7(2), 69-86.
- Bornmann, L., Thor, A., Marx, W. y Schier, H. (2016). The application of bibliometrics to research evaluation in the humanities and social sciences: An exploratory study using normalized Google Scholar data for the publications of a research institute. *Journal of the Association for Information Science and Technology*, 67(11), 2778-2789.
- Bracho-López, R., Maz-Machado, A., Gutiérrez-Arenas, P., Torralbo-Rodríguez, M., Jiménez-Fanjul, N. y Adamuz-Povedano, N. (2012). La investigación en Educación Matemática a través de las publicaciones científicas españolas. *Revista Española de Documentación Científica*, 35(2), 262.
- Bradford, S. C. (1948). *Documentation*. Londres: Crosley Lockwood.
- Castro, P., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2019). Producción documental de acceso abierto de la comunidad de habla hispana en Educación Matemática para la educación media. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(64), 707-727.
- Cruz, M. y Rodríguez R. A. (2019). A scientometric look at mathematics education from Scopus database. *The Mathematics Enthusiast*: 16(1), 37-46.
- Diem, A., y Wolter, S. C. (2013). The use of bibliometrics to measure research performance in education sciences. *Research in higher education*, 54(1), 86-114.
- Egghe, L. (1986). The dual of Bradford's law. *Journal of the American Society for*

- Information Science*, 37(4), 246-255.
- Egghe, L. (1990). Applications of the theory of Bradford's law to the calculation of Leimkuhler's law and to the completion of bibliographies. *Journal of the American Society for Information Science*, 41(7), 469-492.
- Fernández-Cano, A. (2011). Producción educativa española en el Social Sciences Citation Index (1998-2009). II. *Revista Española de Pedagogía*, 427-443.
- Gómez-Carrasco, C. J., López-Facal, R. y Rodríguez-Medina, J. (2019). La investigación en Didáctica de las Ciencias Sociales en revistas españolas de Ciencias de la Educación. Un análisis bibliométrico (2007-2017). *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, (37), 67-88.
- Güzeller, C. O. y Çeliker, N. (2018). Bibliometric analysis of tourism research for the period 2007-2016. *Advances in Hospitality and Tourism Research*, 6(1), 1-22.
- Hwang, G. J. y Tu, Y. F. (2021). Roles and Research Trends of Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Bibliometric Mapping Analysis and Systematic Review. *Mathematics*, 9(6), 584.
- Jiménez-Fanjul, N., Maz-Machado, A. y Bracho-López, R. (2013). Bibliometric analysis of the mathematics education journals in the SSCI. *International Journal of Research in Social Sciences*, 2(3).
- Leimkuhler, F. F. (1967). The Bradford distribution. *Journal of documentation*, 23(3), 197-207.
- Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Torralbo-Rodríguez, M., Gutiérrez-Arenas, M. P. y Hidalgo-Ariza, M. D. (2011). La investigación en Educación Matemática en España: los simposios de la SEIEM. *PNA*, 5(4), 163-184.
- Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N. y Bracho-López, R. (2015). Análisis bibliométrico de la revista RELIME (1997-2011). *Investigación Bibliotecológica*, 29(86), 90-102.
- Maz-Machado, A., Muñoz-Ñungo, B., Gutiérrez-Rubio, D. y León-Mantero, C. (2020). Patterns of Authorship and Scientific Collaboration in Education: The Production of Colombia in ESCI. *Library Philosophy and Practice (e-journal)*. 4278
- Muñoz-Ñungo, B., Rodríguez-Faneca, C. y Gutiérrez-Rubio, D. (2020). La investigación en Educación Matemática indexada en Emerging Sources Citation Index (ESCI): la producción de Colombia. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 3(1), 1-11.
- Mondal, S. y Roy, B. K. (2018). Bibliometric study of PhD theses in Mathematics of the University of Burdwan, 2005-2012. *International Journal of Library and Information Studies*, 8(1), 343-353.
- Özkaya, A. (2018). Bibliometric Analysis of the Studies in the Field of Mathematics Education. *Educational Research and Reviews*, 13(22), 723-734.
- Pinto, M., Escalona, M. I., Pulgarín, A. y Uribe-Tirado, A. (2015). The scientific production of Ibero-American authors on information literacy (1985–2013). *Scientometrics*, 102(2), 1555-1576.
- Rosas, R., Nussbaum, M., Cumsille, P., Marianov, V., Correa, M., Flores, P., Grau, V., Lagos, F., López, X., López, V., Rodríguez, P. y Salinas, M. (2003). Beyond Nintendo: design and assessment of educational video games for first and second grade students. *Computers & Education*, 40(1), 71-94.

- Subramanyam, K. (1983). Bibliometric studies of research collaboration: A review. *Journal of information Science*, 6(1), 33-38.
- Torres-Alfonso, A. M., Peralta-González, M. J. y Toscano-Menocal, A. (2014). Impacto y productividad de las publicaciones latinoamericanas sobre Matemática Educativa. *Biblios: Revista electrónica de bibliotecología, archivología y museología* (55), 13-26.
- Van Eck, N. J. y Waltman, L. (2020). *VOSviewer manual. Manual for VOSviewer version 1.6.15*. Center for Science and Technology Studies, Leiden University.
- Vallejo, M., Fernández-Cano, A.; Torralbo, M., Maz, A. y Rico, L. (2008). History of Spanish Mathematics Education focusin on PhD Theses. *Internacional Journal of Science and Mathematics Education*, 6(2), 313-127.
- Wang, P., Zhu, F., Song, H. y Hou, J. (2017). A Bibliometric Retrospective of the journal Eurasia journal of mathematics, science and technology education between 2012 and 2017. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(3), 765-775

Cristina, Rodríguez-Faneca
Universidad de Córdoba, España
102rofac@uco.es

Cristina, Pedrosa-Jesús
Universidad de Granada, España
crispj1991@gmail.com

Astrid Cuida
Universidad de Valladolid, España
acuidag@am.uva.es



Obra publicada con [Licencia Creative Commons Atribución 3.0 España](https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/es/)

