Matemáticas, Educación y Sociedad

ISSN: 2603-9982
Matemáticas, Educación y Sociedad
http://mesjournal.es/
editor@mesjournal.es

Vol 4 No 3 (2021)

Matemáticas, Educación y Sociedad

Maz-Machado, A., Cuida, A. y Pedrosa-Jesús, C. (2021). Tratamiento de los números negativos en las *Lecciones de Aritmética y de Álgebra Elemental* de Diego Terrero (1894). *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *4*(3), 1-16

ISSN: 2603-9982

TRATAMIENTO DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS EN LAS *LECCIONES DE ARITMÉTICA Y DE ALGEBRA ELEMENTAL* DE DIEGO TERRERO (1894)

Alexander Maz-Machado, Universidad de Córdoba, España

Astrid Cuida, Universidad de Valladolid, España

Cristina Pedrosa-Jesús, Universidad de Córdoba, España

Resumen

Se presenta una breve semblanza biográfica de Diego Terrero y un análisis de una de sus obras. El estudio se ha centrado en la forma en que el autor aborda y presenta los números negativos en un periodo histórico en el que, en Alemania, recién se habían formalizado, y en el que algunos autores españoles de libros de matemáticas de la época aún no habían incorporado este avance epistemológico. Se hallan evidencias de ideas cercanas a las presentes a principios del siglo XIX.

Palabras clave: *Números negativos, libros de texto, matemáticas, historia de la educación matemática, España.*

Treatment of Negative Numbers in Diego Terrero's *Lecciones de Aritmética y de Álgebra Elemental* (1894)

Abstract

This study presents a brief biographical sketch of Diego Terrero and an analysis of one of his works. The study has focused on the way in which the author approaches and presents negative numbers in a historical period in which, in Germany, they had only recently been formalized, and in which some Spanish authors of mathematics books had not yet incorporated this epistemological advance. There is evidence of ideas close to those present at the beginning of the XIX century.

Keywords*: Negative numbers, textbooks, mathematics, history of mathematics education, Spain*

Recibido: 16/11/2021; Aceptado: 13/12/2021

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la historia de las matemáticas pretende indagar y conocer de qué manera han evolucionado los conceptos matemáticos y la forma en que estos se han transmitido a la población en el sistema educativo. El conocimiento del pasado en relación con las matemáticas y los procesos de enseñanza y transmisión de los conocimientos matemáticos brinda al profesorado una comprensión de algunas de las dificultades presentes en las aulas, en la actualidad, porque son similares a las que se dieron para la aceptación, formalización y generalización de ciertos conceptos. Por otra parte, para los investigadores es importante comprender las rupturas epistemológicas que se han dado en aspectos matemáticos y cómo se han planteado estrategias para superarlas y mejorar la transmisión de las matemáticas a la sociedad en cada época.

Para este propósito se analizan planes curriculares, instituciones de educación, libros, métodos de enseñanza, autores de libros de texto y materiales didácticos antiguos, entre otras cosas. A nivel internacional, se tienen muchos ejemplos de investigación sobre la historia de las matemáticas y la educación matemática, abordando aspectos relacionados con la enseñanza de las matemáticas en distintos niveles educativos (Clark, 2012; Fried, 2008; Haverhals y Roscoe, 2010; Puig y Rojano, 2004; Oliveira y Schubring, 2020).

EL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS

Como señalan García y Beas (1995), en toda sociedad es primordial que se transmitan los elementos básicos de su cultura y, en este sentido, los libros de texto son uno de los mayores canales que han contribuido a la difusión de los conocimientos. Por otra parte, en el caso de las matemáticas, en la construcción de conceptos y teorías el lenguaje textual, simbólico y gráfico, adquiere un papel destacado e importante que en ocasiones es particular de esta disciplina, por lo que es de gran importancia el análisis epistemológico de los libros de texto de matemáticas.

El análisis de los libros de texto es útil e importante en educación matemática porque ofrece información sobre los contenidos matemáticos, las técnicas y las tendencias pedagógicas y didácticas que utilizan los autores. Asimismo, reflejan las necesidades de la sociedad del momento que se manifiestan a través de las leyes y orientaciones educativas que los manuales deben seguir. Como registros históricos, “reflejan los hábitos y costumbres, la organización de las ideas, la actividad intelectual, las relaciones publicas de apropiación y exclusión del saber […] las modas y tendencias imperantes de una época” (Maz-Machado y Rico, 2015, p. 51).

Diversos autores han señalado métodos, técnicas y orientaciones sobre qué y cómo investigar en los libros de textos matemáticos antiguos (Maz, 2009; Schubring, 1987). En España el análisis de los libros de texto ha sido una línea prioritaria en la investigación histórica del área (Maz-Machado et al., 2017). Como señala Gómez (2011), el análisis de los libros de texto de matemáticas antiguos permite identificar posibles problemas de investigación en educación matemática. Se han dado consejos e instrucciones sobre cómo realizar una selección adecuada de los manuales para ser objeto de estudio (Picado y Rico, 2011) y se ha ejemplificado, por ejemplo, con estudios sobre los aspectos didácticos presentes en los libros y que los autores han incorporado para mejorar la comprensión de los contenidos por parte de los lectores de la obra (Maz y Rico, 2015).

Una pequeña muestra de este tipo de investigaciones son las realizadas por Madrid et al. (2018), quienes analizaron manuales de matemáticas del siglo XVIII, en España, para caracterizar a los autores atendiendo a su desempeño profesional en la sociedad de la época. De igual forma, se han estudiado las aritméticas impresas en España en el siglo XVI (Madrid et al., 2019).

En ocasiones, el objeto de estudio ha sido un autor de libros de texto y las investigaciones se han orientado hacia el análisis de los libros de matemáticas publicados por autores españoles. Meavilla y Oller (2015) analizaron todas las obras matemáticas del gaditano Antonio Terry y Rivas. León-Mantero et al. (2018) realizaron un estudio sobre las obras matemáticas de Juan Cortázar. El Cordobés Gonzalo Serrano ha sido analizado centrando la atención en su libro de matemáticas (Gutiérrez-Rubio y Madrid, 2018) o en toda su obra (Maz-Machado et al., 2020). Otros autores matemáticos también han sido analizados de manera individual o con el conjunto de toda su obra, entre ellos están José Mariano Vallejo (Maz et al., 2006), Juan Andrés (Madrid et al., 2016), Juan Justo García (2019), Thomas Cerdá (Maz y Rico, 2009) o Juan de Yciar (Maz-Machado et al. 2013)

En relación con temas específicos de matemáticas, Picado et al. (2015) analizaron libros de texto de matemáticas publicados en España, en la segunda mitad del siglo XIX, para conocer el proceso de difusión y enseñanza del sistema métrico decimal en España. Meavilla (2005) analizó los contenidos algebraicos presentes en la obra de Pérez de Moya; también los procesos de extracción de raíces en la obra este autor ha sido estudiado (Meavilla y Oller, 2014). Por otra parte, Sánchez y González (2017) estudiaron la geometría analítica en los manuales de texto españoles publicados durante el siglo XIX. Todas estas investigaciones se han apoyado en el análisis de contenido, centrándose en aspectos históricos, epistemológicos, conceptuales o didácticos.

Históricamente, los números negativos han sido considerados como una fuente de dificultades para los alumnos en distintos niveles educativos (Hefendehl-Heberker, 1991; Cid, 2015). Desde la historia de las matemáticas y la educación matemática, se han realizado algunos estudios sobre este concepto. Todo ello porque, según Schubring (1986), constituyen un ejemplo que ilustra el complejo proceso de desarrollo de los conceptos matemáticos.

Glaeser (1981) realizó una de las investigaciones de mayor trascendencia sobre los números negativos. Analizó el trabajo de destacados matemáticos del pasado (Diofanto, Stevin, Descartes, McLaurin, Euler, D`Alambert Carno, Laplace, Cauchy y Hankel) para identificar las dificultades epistemológicas que fue necesario superar para aceptar los negativos como un conjunto numérico formal en los números enteros. Heeffer (2008) analizó las ideas de número negativo que están presentes en la obra de algunos matemáticos: como menor que nada (Arnauld, Leibniz, Cardano) y mayor que infinito (Wallis, Euler, D`Alambert).

En España, Maz y Rico (2007) analizaron el tipo de situaciones fenomenológicas con las que se asociaban los números negativos en algunos manuales del siglo XVIII y IX. Estos mismos autores (Maz y Rico, 2009) presentan, además, una categorización sobre los fenómenos y las representaciones utilizados para presentar los números negativos en los textos de estos siglos. Señalan que es importante y necesario realizar estudios en más libros de texto de matemáticas publicados en España sobre la presencia y uso de los números negativos. Siguiendo esta línea de investigación, presentamos un análisis de una obra matemática de un autor español del siglo XIX.

OBJETIVOS

O1: Establecer el tratamiento dado a los números negativos en textos publicados en España durante el siglo XIX.

O2: Caracterizar el entorno social, cultural, científico y académico en que se ubican los matemáticos españoles autores de libros de texto en el siglo XIX.

MATERIALES Y MÉTODO

El análisis de contenido en esta investigación se centra en las ideas que se expresan y reflejan en un texto dado, teniendo en cuenta su carácter didáctico, lo que se utiliza en muchos casos como complemento a la investigación histórica.

La elección de la obra a analizar fue intencional porque no se halló ningún estudio especifico sobe ella. Se determinaron tres focos de interés para caracterizar el texto, siguiendo las pautas señaladas por Maz (2005) y utilizadas en diversas investigaciones de tipo histórico epistemológico en educación matemática (Madrid, 2016; León-Mantero et al., 2021). Estos focos fueron:

- Autor: se buscaron datos bibliográficos y se contextualizó el contexto histórico-social y científico.
- Estructura de la obra: fueron identificados y descritos aspectos generales de la obra.
- Contenido sobre los números negativos: se identificaron los temas, usos, problemas, representaciones y demás aspectos relacionados con los negativos.

Para el foco 1, se consultó bibliografía disponible en bibliotecas físicas y virtuales. Para los focos 2 y 3, las unidades de análisis fueron los párrafos que contenían información sobre esto.

Una vez identificados los párrafos, estos se volcaron a una base de datos y se agruparon según los ítems propuestos por Maz (2005), tras lo que se realizó un análisis conceptual descriptivo.

Tabla 1. *Parrilla para la Caracterización del contenido sobre los números negativos. Fuente: Maz, 2005; p. 104.*

Campo	Texto
TSN1 Significado y presentación de los signos + y -	
TSN2 Presentación de las cantidades negativas	
TSN3 Naturaleza de las cantidades negativas	
TSN4 Justificación de la aparición de las cantidades negativas	
TSN5 Cantidades negativas como menores que nada	
TSN6 Ejemplificación de cantidades negativas	
TSN7 Regla de los signos	
TSN8 Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa	
TSN.9 Orden en las cantidades negativas	
TSN10 Operaciones y utilización de las cantidades negativas	
TSN11 Interpretación de los resultados negativos	
TSN12 Utilidad de las cantidades negativas	
TSN13 Otros	

RESULTADOS

Semblanza biográfica de Diego Terrero y Pérez

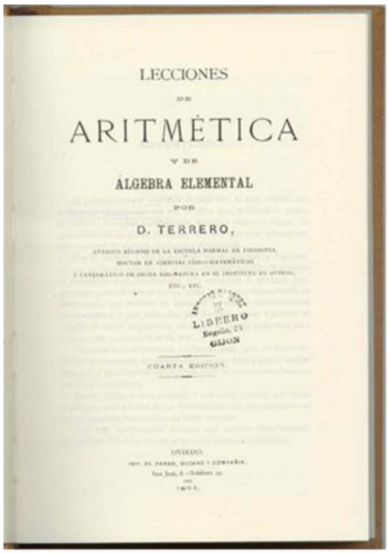
Diego Terrero y Pérez nació en Cádiz, en 1830, y falleció en Oviedo, en 1892. Fue alumno de la Escuela Normal Central, del Seminario Nacional de Maestros, de la Normal de Filosofía. Se doctoró en Ciencias Físico-matemáticas en Oviedo.

Este gaditano fue científico, fotógrafo y poeta (Gracia Noriega, 2001). Fueron famosas sus polémicas humorísticas con Teodoro Cuesta, las cuales se plasmaron en el libro *Andalucía y Asturias* que publicaron juntos (Terrero y Cuesta, 1881). En 1866, al jubilarse Salmeán, director del Observatorio astronómico en la Universidad de Oviedo, Terrero le sucedió en la dirección junto a los catedráticos Ceruelo, Frandes, Méndez, Aparicio y Urios (Canella, 1995).

En 1878, participó en la comisión organizadora que redactó el reglamento de la Escuela Ovetense de Artes y Oficios creada ese mismo año y que comprendía "enseñanzas preparatorias y periciales para carpinteros, albañiles, cantero, obreros industriales hasta maestros de obras y capataces mecánicos" (Canella, 1995; p. 575)

Ejerció como catedrático en el Instituto de Oviedo, del cual fue su director. Este instituto era de carácter privado. Inició, en Oviedo, en 1886, la preparación de alumnos para carreras militares y facultativas. En ese año establece el Colegio Hispano-americano. Fue vicedirector del Instituto Provincial de 2ª Enseñanza de Oviedo que formó parte de la Facultad de Filosofía de la Universidad de Oviedo.

Terrero era el presidente de la sección literaria del Círculo Mercantil e Industrial de Oviedo, que organizaba veladas literarias. Formó parte del claustro extraordinario de la Universidad de Oviedo por Ciencias y fue socio de la Sociedad Económica de Amigos del País de Asturias (S. S., 1880).



En 1885, bajo su dirección, algunos alumnos de 5º B realizaron el plano del Jardín Botánico de Oviedo. En 1860, junto a Salmeán y Mandayo, fueron los primeros en demostrar, en una Universidad Española, el movimiento rotatorio de la tierra por medio del Péndulo de Foucault que instalaron en la capilla de la Universidad (Martínez y Lastra, 1978). Con este experimento, se trataba de proyectar la ciencia a la sociedad en general, puesto que "Para mejor conocimiento de los asistentes se repartió un impreso con todas las necesarias explicaciones, y fue muy notable este suceso, del que se ocuparon con elogio la prensa de la corte y provincias" (Álvarez, 1978, citado por Martínez y Lastra 1978; p. 8).

Durante su vida profesional, fue testigo de los esfuerzos gubernamentales para establecer un ordenamiento jurídico sobre la educación en el territorio español, entre ellos la ley Moyano o el Plan de estudios de 1866 de Orovio.

Terrero publicó las siguientes obras de contenido matemático:

- *Lecciones De Aritmética Para Uso De Los Niños* (1871) (3ª edición)
- *Lecciones De Aritmética* (1880).
- *Lecciones De Álgebra Elemental* (1880).
- *Lecciones y Ejercicios de Geometría Elemental* (1877).
- *Lecciones de Geometría Elemental y de Trigonometría Rectilínea* (1880).
- *Lecciones de Aritmética y de Álgebra* (1894) (4ª edición)

Las *Lecciones de Aritmética y de Álgebra elemental*

Publicada en 1894 en su cuarta edición. Oviedo: Imprenta de Pardo, Gusano y Compañía. El texto consta de 279 páginas, distribuidas en dos partes: lecciones de Aritmética y lecciones de Álgebra; la primera está dividida en 37 lecciones. Inicia definiendo los conceptos básicos: número, cantidad, unidad, etc.; prosigue con la numeración y las operaciones aritméticas; se explican las operaciones con los números primos y los fraccionarios; prosigue con las raíces, potencias, razones y proporciones, logaritmos, variables, limites, regla de tres; hay un apartado de la lección XXVI que se dedica a los números positivos y negativos.

La segunda parte se divide en 24 lecciones. Define el objeto del álgebra, las expresiones algebraicas y las operaciones entre ellas, prosigue con las fracciones algebraicas, raíces y potencias, permutaciones y combinaciones; presenta las ecuaciones y los métodos de solución, incluye problemas de primer grado con una y varias incógnitas.

Un hecho interesante es que Terrero indica que utilizó, para resolver la mayor parte de los ejercicios, un Aritmómetro, que era una calculadora mecánica con la que se podían realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. No indica expresamente en qué autores se basó para escribir el texto, sin embargo, cuando utiliza algunas fórmulas o métodos menciona a sus autores, tal es el caso de Pitágoras, Ougtred, Guy, Briggs, Neper; y cuando hace referencia a las tablas de logaritmos menciona las de: Sánchez Ramos, Vázquez Queipo, Callet y Schroön. Finalmente, menciona un diccionario matemático de Montferrier. Los objetivos de la obra son iniciar a los alumnos en el estudio de las matemáticas y presentar algunas de las aplicaciones más usuales de esta ciencia.

Se dan unas definiciones básicas sobre cantidad: “todo lo que tiene igual y este igual puede determinarse” (p. 9) y número es “la idea que se adquiere de una cantidad al compararla con la unidad” (p. 9). El número entero (natural para nosotros) surge cuando “la cantidad es conmensurable con la unidad elegida” (p. 10). Indica que la cantidad constante es la que siempre es la misma, mientras que la cantidad variable “es la que no es siempre la misma” (p.82); estas aparecen en las ecuaciones, las cuales define así: “ECUACIÓN. Es la unión por medio del signo igual de dos expresiones que no son siempre iguales, por que los son en alguno ó algunos casos” (p. 213); las ecuaciones pueden ser “numéricas y literales” (p. 213). Las cantidades negativas aparecen en dos apartados: en la parte de aritmética (lección XXVI) y en el álgebra (lección I).

El autor afirma que es consciente de que se podrían percibir algunas “lagunas” en el desarrollo de los contenidos pues considera que a duras penas se pueden enseñar estos conocimientos matemáticos a los alumnos, ya que, por su corta edad y carencia de otros conocimientos fundamentales, así como por estudiar otras asignaturas, no comprenderían adecuadamente más matemáticas. Indica que los contenidos se ajustan a los fines de la segunda enseñanza.

Tratamiento dado a los negativos

TSN1: Significado y presentación de los signos + y -.

> “[...] el signo + que se lee más.” (p. 15).
>
> “[...] el signo -, que se lee menos” (p. 16).

La presentación que se hace de los signos + y - es sólo de signos abstractos asociados a aumento y disminución.

TSN2: Presentación de las cantidades negativas.

> “Los números afectados del signo más, los llamaremos positivos, y los que lo estén del signo menos, NEGATIVOS.
>
> Cuando un número no lleve expreso su signo, se deberá entender que es positivo” (p. 115).

Indica que los signos más y menos actúan sobre los números y deja de lado a las cantidades. Asimismo, es el signo el que determina la condición del número y su ausencia reafirma el sentido positivo de los números.

TSN3: Naturaleza de las cantidades negativas.

> “Entre las cantidades que se den para la resolución de un problema, puede haber dos de la misma naturaleza, que tiendan á producir efectos contrarios.” (p. 176).

Hallamos dos ideas:

- De forma implícita se indica que las cantidades negativas y positivas tienen igual naturaleza.
- Las cantidades positivas y negativas intervienen en la resolución de problemas y según se utilicen unas u otras sus efectos son diferentes.

TSN4: Justificación de la aparición de las cantidades negativas.

> "Necesario es, para que esta distinta afección ó modo de ser de las cantidades sea tomada en consideración, introducir en el cálculo algo que lo indique, y al efecto vamos á CONVENIR en afectar de un signo las que tengan un modo de existencia, y de otro distinto las que tengan el contrario, siendo el más y el menos los elegidos, á pesar de habernos servido ya, y aún servirnos ahora, para indicar la adición y la sustracción.
>
> Las cantidades que estén afectadas del signo más las llamaremos positivas, y negativas las que lo estén del signo ménos." (p. 176).

La consideración de cantidades positivas o negativas es tan sólo convencional; la elección de los signos + o - es arbitraria según el modo de existencia de cada cantidad. Se reitera la idea presentada en TSN2 sobre la forma en que los signos que preceden a la cantidad determinan la condición de positiva o negativa.

TSN5: Cantidades negativas como menores que nada.

> "Observamos que, si los puntos M' y M" están igualmente distantes de A, no hay motivo para decir que la cantidad positiva AM' es mayor que la negativa AM", y si el punto móvil estuviese en A, su distancia á este punto sería cero, ó mejor dicho, no abría distancia, siendo por lo tanto un absurdo el admitir que las cantidades negativas son menores que cero, y menores que las positivas. Cero no es cantidad, y por consiguiente no puede compararse con una cantidad, ni ser menor o mayor que ella. Si se admitiera comparación entre las cantidades positivas ó negativas y cero, podríamos asegurar con verdad, que respecto de cero, lo mismo son las unas que las otras." (p. 177).

P____________________.________.________._________.________.______Q

M"   A   M'   M

No se considera la "nada", se aborda la reflexión es sobre el cero. Se indica la imposibilidad de establecer una comparación entre las cantidades positivas y negativas respecto a cero.

TSN6: Ejemplificación de cantidades negativas.

> "Tales son, por ejemplo, el metálico que ingresa en la caja de un comerciante por ventas ó cobro de letras, y el que sale para pago de éstas ó de mercancías la cantidad de agua que echa un caño en el pilón de una fuente, y la que otro arroja fuera del mismo…" (p. 176).

Presenta actividades cotidianas asociadas a situaciones relativas (ingresos, cobros, pagos) para dar ideas y ejemplos de las cantidades negativas. Todas ellas se caracterizan por presentar contextos de oposición o contrarios.

> "Para demostrar las ventajas de la consideración de las cantidades positivas y negativas, y al mismo tiempo, para ver que el CONVENIO para representarlas no se opone á los hechos anteriormente, presentaremos la siguiente cuestión:

P____________________.________.________._________.________.______Q

M"   A   M'   M

> Sean los puntos fijos A y B en la línea PQ, y un punto móvil que podrá tomar las posiciones M, M', M".
>
> Llamando d á la distancia conocida y constante AB, x á la variable desde A al punto móvil, é y á la que hay desde B al mismo punto, tendremos que

para la posición M, AM=AB+BM, ó x=d+y. Iª fórmula;

para la posición M', AM'=AB-BM' ó x=d-y. 2ª fórmula;

para la posición M", AM"=BM"-AB, ó x=y-d. 3ª fórmula.

Considerando las cantidades positivas y negativas, se tendrá que, en la posición M', será y=-BM' y aplicando á este caso la primera fórmula se obtendra

AM'=AB+(-BM')

Ó bien AM'=AB-BM',

Resultado idéntico al que proporciona la segunda fórmula, no considerándolas.

En la tercera posición, x=-AM", y=-BM", y la primera fórmula nos dá

-AM"=AB+(-BM");

-AM"=AB-BM";

ó bien AM"=BM"-AB;

resultado también igual al proporcionado por la tercera, no considerándolas.

Vemos, pues que la consideración de las cantidades positivas y negativas es ventajosa, pues dá más generalidad á las fórmulas haciendo que una sola sirva para los tres casos." (pp. 176-177).

Utiliza una representación geométrica (la recta) en una situación física de desplazamientos para interpretar el sentido de las cantidades positivas y negativas. Explica la conveniencia de la ubicación o determinación de las cantidades negativas en uno u otro extremo de la recta; e incorpora la representación algebraica como complemento a la gráfica para la explicación.

TSN7: Regla de los signos.

"El producto de un número negativo por otro positivo es también negativo, y de un valor absoluto igual al producto de los valores absolutos de los factores.

En efecto: (-3) X 4=-3-3-3-3=-(3X4)=-12.

Del mismo modo, 3 X (-4)=-4-4-4=- (3X4)=-12." (p. 116).

"El producto de dos números negativos es positivo.

Si el producto (-3) X 4=-12, cambiando de signo al factor 4, debe cambiar de signo el producto, según la consecuencia anterior.

Luego (-3) X (-4)=12." (p. 116).

"El producto ó el cociente de dos números del mismo signo es positivo, y el de dos números de signo contrario, es negativo." (p. 116).

En estos párrafos, se enuncia una regla para la multiplicación de números con signo. Justifica el valor positivo o negativo del número resultante por medio del carácter aditivo de una misma cantidad con signo en una multiplicación.

TSN8: Valor absoluto y relativo de una cantidad negativa.

"Si de dos sujetos uno debe 2000 duros y otro 7000, decimos que la deuda del primero, es MENOR que la del segundo, ó la de éste MAYOR que el capital del primero; lo mismo que si uno tiene 2000 duros de capital y otro 7000, diremos

> que el capital del primero es MENOR que el del segundo, ó el de éste MAYOR que el del primero. También podría decirse que la deuda del primero era mayor ó menor que el capital del segundo, pero entonces prescindimos del modo de existencia de estas cantidades y solo atendemos á sus valores absolutos. Según esto,
>
> -2000<-7000, y +2000<+7000
>
> El ejemplo anterior nos enseña que para comparar la magnitud de dos cantidades, es necesario que tengan el mismo modo de existencia, y en este caso aquella que está incluida ó comprendida en la otra, es la que llamaremos menor, y mayor á la que comprende" (p. 177).

Se indica el doble sentido en el que puede considerarse una cantidad; uno relativo, el cual tiene que ver con la situación o contexto en el que se utiliza; el otro, el valor absoluto, se relaciona únicamente con su carácter numérico y sin tener en cuenta la clase de naturaleza, positiva o negativa. En el ejemplo, hay una comparación de orden relativo; esta indica que deber 200 es menor que deber 700, por lo cual se evidencia que, aunque se trata de deudas y es dinero "faltante", se está considerando el valor absoluto de los naturales para estas cantidades.

TSN9: Orden en las cantidades negativas.

> "1º. De dos números positivos, es menor aquel cuyo valor absoluto éste contenido en el otro.
>
> Así, +4<+7, pues +4+3=7
>
> 2º. Cero es menor que cualquier número positivo.
>
> Así, 0<+7, pues 0+7=+7
>
> 3º. Un número negativo es menor que cero.
>
> Así, -4<0, pues –4+4=0
>
> 4º. De dos números negativos es menor el de mayor valor absoluto.
>
> Así, -7<-4, pues –7+3=-4." (p. 177).

Se establecen dos cosas: en primer lugar, un orden entre los números positivos y también entre los números negativos con otros negativos; en segundo término, el orden, tanto para los positivos como para los negativos, se establece respecto al cero, pero no se hace ninguna mención de los positivos en relación con los negativos, o lo contrario.

TSN10: Operaciones y utilización de las cantidades negativas.

> "3ª. La sustracción de un número negativo equivale á la adición de otro positivo de igual valor absoluto." (p. 116).
>
> "10ª. El cociente de dos números negativos es positivo.
>
> 11ª. Todos los teoremas demostrados para números positivos serán ciertos para los negativos." (p. 116).

Hay una referencia a la sustracción como un caso particular de la adición. En la primera afirmación, hay una distinción entre el significado del signo menos en operación sustracción y el signo menos de la cantidad negativa. Además, da presunción del cumplimiento de teoremas de números positivos a negativos. Es una referencia primaria al principio de permanencia de las leyes formales que había establecido Hankel (1867).

Los negativos son asumidos y considerados "números", manifestándose esto de forma reiterada en estos párrafos.

> "Continuando en ambos sentidos la primera de las dos progresiones anteriores, se tendrá:
>
> ÷...-6.-3. 0. 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27…." (p. 117).
>
> "Sea, por ejemplo, el logaritmo enteramente negativo –2,345678." (p. 132).
>
> "[…] se tendrá 8-5=3, y 5-8=-3" (p. 115).

Las cantidades negativas pueden hacer parte de una progresión o ser un logaritmo. Desde el punto de vista numérico, es posible seguir una secuencia iniciada desde los negativos y proseguirla en los positivos. Esto implica la admisión de la continuidad del sistema numérico de forma independiente a los signos más y menos.

> "En efecto si 5-8=-3, se deberá tener, para conformarse con la definición de la sustracción, 5=8+(-3); y como 5=8+(-3), será 8+(-3)=8-3". (p. 116).

TSN11: Interpretación de los resultados negativos.

> "[...] Ahora bien: al introducir en el cálculo las cantidades positivas y negativas, damos á las palabras Menor y mayor otra significación distinta de la que hasta aquí han tenido; [...]" (p. 177).

Algebraicamente con los positivos y negativos entran en juego significados diferentes para ciertos términos que se utilizaban en aritmética (mayor y menor), pero que en álgebra se usan bajo otras connotaciones.

> "[...]Es evidente que el que debe 7000 duros, debe 4000; pero el que debe 4000 no debe 7000; lo mismo que el que tiene 7000 duros, tiene 4000; pero el que tiene 4000 no tiene 7000." (p. 177).

Presenta situaciones con cantidades relativas para mostrar la diferencia de significado en una circunstancia en la que los términos "deber/tener" imprimen distintas características de valor absoluto. Relaciones de inclusión y subconjunto con cantidades negativas están manifiestas en el ejemplo.

TSN12: Utilidad de las cantidades negativas.

> "Vemos, pues que la consideración de las cantidades positivas y negativas es ventajosa, pues dá más generalidad á las fórmulas haciendo que una sola sirva para los tres casos." (p. 177).

La generalidad otorgada por el uso de cantidades positivas o negativas en las fórmulas permite utilizarlas para la solución de un problema determinado según la conveniencia para calculador.

TSN13: Otros.

> "3º. Si la incógnita puede recibir el valor positivo ó negativo que nos dé la fórmula, ni el problema ni la hipótesis serán absurdos, aunque esta última podrá no ser la verdadera. Pero si la incógnita no puede recibir el valor positivo ó negativo que nos dé la fórmula, el problema será absurdo, si la hipótesis es la verdadera, pero si ésta no es la verdadera, el problema no será absurdo." (p. 232).

Vemos cómo, aunque la respuesta negativa refuta lo absurdo, tanto del problema como de la hipótesis, esta es rechazada y no se acepta como verdadera solución a un problema.

Sin embargo, esta respuesta implica un análisis al tipo de planteamiento realizado, centrando la atención al tratamiento dado a las hipótesis.

Análisis conceptual y revisión histórico-crítica

Número

Para Terrero, el número surge de comparar la cantidad con la unidad, es "la idea que se adquiere de una cantidad al compararla con la unidad", esta noción de número es de carácter relacional; es otra evidencia en autores españoles de la influencia del concepto de número enunciada por Stevin y Newton (Maz, 2005). Sin embargo, el hecho de condicionar el número a la comparación con una medida, que llama unidad, hace que sea esta medida respecto a la unidad la que constituya el numero; este planteamiento es de corte cartesiano, donde es la medida la condición del número.

Cantidad

El autor define la cantidad como "todo aquello que tiene igual y puede determinarse", de tal forma, la cantidad puede ser comparada con otra de su misma especie. Se aleja de la idea de aumento y disminución postulada por Euler (Maz, 2009); esto permite que puedan ser ordenadas respecto a otras mediante relaciones de comparación y orden. Esta es la misma idea que había planteado Comte (Maz, 2005).

Cantidad positiva y cantidad negativa

Las cantidades negativas tienen una misma naturaleza que las positivas, aunque los efectos que produce su aparición son contrarios, tal como se afirma en TSN3. Se indica que la consideración de positivo o negativo de las cantidades es sólo de forma convencional, así como también lo es la asignación de signos + o – a las cantidades, tal como se deduce de TSN4. La conveniencia del calculador es lo que permite utilizarles de una u otra forma determinada, como se deduce de TSN12; este aspecto de "conveniencia" es destacado en muchos apartados del texto, los cuales hemos recogido en TSN4, TSN6 y TSN12. Se asignan distintos significados para el signo menos. Prueba de ello es que en TSN10 se plantea la distinción entre la sustracción y la cantidad negativa.

En TSN6, vemos unos ejemplos mediante los cuales pretende aclarar la idea de cantidad negativa. Estas son situaciones asociadas a fenómenos físicos reales tales como ingresos de dinero, pagos, flujos y salidas de agua. Más adelante utiliza otra situación para dar ejemplo de lo beneficiosas que son las cantidades negativas, esa situación corresponde a desplazamientos. En este caso hay una representación simbólica y geométrica pues se utiliza una recta en la cual se han señalado puntos que representan ciertas posiciones. Es claramente un ejemplo de una modelización de situaciones reales en la cual se utilizan cantidades negativas.

Terrero en TSN2, TSN7, TSN9 y TSN10 llama "números negativos" a las cantidades precedidas del signo menos. Esta asignación como número, se refleja en TSN11 cuando afirma que las cantidades negativas y positivas llevan a una significación distinta de los términos mayor y menor. En TSN3 se indica que son dos los tipos de cantidades que se dan para la resolución de problemas, las cantidades positivas y negativas. Por tanto, estas surgen como consecuencia de operaciones algebraicas.

Fenomenología/Justificación

La justificación dada por Terrero se basa en la necesidad de considerar las distintas "afecciones" de las cantidades, por lo cual era preciso afectar mediante un signo tales diferencias en las cantidades. Como se infiere de TSN3 estas alteraciones que producen los signos + y – en las cantidades dan origen a las cantidades positivas y negativas,

Como se ha mencionado en TSN6, los ejemplos utilizados son situaciones cotidianas de tipo relativo, asociadas a entornos y acciones físicas tangibles. Las situaciones fenomenológicas a las que recurre el autor para ilustrar a las cantidades tanto positivas como negativas, corresponden a ingresos, retiros, pagos, cobros, flujos, salidas y recorridos. En TSN6, TSN9 y TSN10 se utilizan representaciones numéricas, algebraicas y gráficas para las cantidades negativas.

Uso algebraico

Queda suficientemente ilustrado, en TSN4 y TSN5, que la elección de los signos para las cantidades en una situación determinada es arbitraria, según sea el modo de existencia de tal cantidad; este mismo hecho entra en juego de acuerdo a la conveniencia para que el calculador alcance su propósito.

En TSN10, las cantidades negativas hacen parte de una progresión aritmética, asumiéndose la continuidad del sistema numérico en cero. Las incógnitas de planteadas para resolver un problema determinado pueden adquirir un valor negativo como resultado de las operaciones algebraicas.

CONCLUSIONES

Este estudio ha permitido constatar que Diego Terrero fue una figura importante en el ámbito académico y científico de la sociedad asturiana del siglo XIX. Sus conocimientos matemáticos estaban al mismo nivel que otros autores de libros de matemáticas de la época en España.

El autor se involucró de manera activa en diversos aspectos relacionados con la enseñanza, en particular de las matemáticas, desde distintos frentes: docente, gestor y divulgativo.

Terrero tenía una noción sobre los números negativos similar a la de Juan Cortázar o José Mariano Vallejo. Consideraba que estos números existen como resultado de operaciones y cálculos aritméticos. Esto es llamativo e indica que desconocía la obra de Hankel (1867) en la que formaliza los números negativos mediante el principio de permanencia de las leyes formales.

Consideraba que existía un orden entre las cantidades positivas y negativas, pero que estas no eran comparables entre sí, idea que compartía con autores como Asciclo Fernández Vallín y Bustillo o Joaquín María Fern

REFERENCIAS

Álvarez, L. X. (1978). *La universidad de Asturias.* Salinas, Astrurias: Ayalga Ediciones.

Canella, F. (1995). *Historia de la Universidad de Oviedo y noticicas de los establecimientos de enseñanza de su distrito (Asturias y León).* 3ª edición.Oviedo: Imp. de flórez, Gusano y Cª.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos.* Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza. Zaragoza, España.

Clark, K. M. (2012). History of mathematics: Illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(1), 67-84.

Fried, M. (2008). History of mathematics in mathematics education: A Saussurean perspective. *The Mathematics Enthusiast*, *5*(2), 185-198.

García, J. J. y Beas, M. (1995). Análsis histórico del libro de texto. en Figueres, J. y Beas, M. (Eds.): *Libros de texto y construcción de matemáticas currículares*. (pp. 21- 47). Granada: Proyecto Sur.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, *5*(2), 49-65.

Gracia-Noriega, J. I. (2001). Entrevistas en la historia: el pintor Tómas García Sampedro. *La Nueva España. Diario Independeinte de Asturias* (6 de agosto de 2001).

Gutiérrez-Rubio, D., y Madrid, M. J. (2018). Geometría Selecta Theorica, y práctica del matemático cordobés Gonzalo Antonio Serrano. *Matemáticas, educación y sociedad*, *1*(1), 32-39.

Hankel, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen zahlen und ihrefuntionen*. Leipzig: Leopold Voss.

Haverhals, N., y Roscoe, M. (2010). The history of mathematics as a pedagogical tool: Teaching the integral of the secant via Mercator's projection. *The Mathematics Enthusiast*, *7*(2), 339-368.

Hefendehl-Heberker, L. (1991). Negative numbers: obstacles in their evolution from intuitivw to intellectual constructos. *For the Learning in Mathematics*, *2*(1), 16-31.

Heeffer, A. (2008). Negative numbers as an epistemic difficult concept: Some lessons from history. In *Proceedings of the History and Pedagogy of Mathematics Conference* (pp. 1-13).

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., y Madrid, M. J. (2021). El Tratado de Álgebra elemental de Juan Cortázar: un libro significativo para la enseñanza de las matemáticas en España. *Educatio Siglo XXI*, *39*(1), 235-256.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Madrid, M. J., y Jiménez-Fanjul, N. (2018). Estrategias didácticas en libros de matemáticas españoles del siglo XIX: los tratados elementales de Juan Cortázar. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *52*, 34-45.

Madrid, M. J. (2016). *Los libros de aritmética en España a lo largo del siglo XVI* (Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca).

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., y León-Mantero, C. (2018). Una caracterización de los autores de manuales de matemáticas en España en el siglo XVIII. In *Actas del IV Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática* (pp. 281-291).

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., y López, C. (2016). 500 años de Historia de las Matemáticas: la obra de Juan Andrés. *Suma*, *82*, 51-58.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., López, C., y León-Mantero, C. (2019). Old Arithmetic Books: Mathematics in Spain in the First Half of the Sixteenth Century. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(1), em0553.

Madrid M. J., León-Mantero, C., Gutiérrez-Rubio, D. y Maz-Machado, A. (2019). La enseñanza de las matemáticas en la Universidad de Salamanca en el siglo XVIII: la obra de Juan Justo García. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 627). Valladolid: SEIEM.

Martínez, J. L. y Lastra, C. (1978) *Historia de la enseñanza de las ciencias biológicas en la Universidad de Oviedo (hasta 1968).* Oviedo: Universidad de Oviedo.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Granada: editorial de la Universidad de Granada.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M. González, M. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación matemática XIII* (pp. 5-20). Santander, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Maz, A. y Rico, L. (2007). Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX. *PNA, 1*(3), 113-123.

Maz, A. y Rico, L. (2009). Las Liciones de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758-2008). *Suma* (60), 35-41.

Maz, A. y Rico, L. (2009). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 537-554.

Maz-Machado, A., y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *18*(1), 49-76.

Maz, A., Rico, L. y Torralbo, M. (2006). José Mariano Vallejo y Ortega: Matemático y Político. En Maz, A., Torralbo, M. y Rico, L. (eds.): *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática* (Pp. 11-25). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Maz-Machado, A., López, C. y Sierra, M. (2013). Fenomenología y representaciones en la Arithmetica de Juan de Yciar. En L. Rico L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 77-84). Granda: Editorial Comares.

Maz-Machado, A., Argudo-Osado, C., y Gutiérrez-Rubio, D. (2020). Semblanza de un cordobés del siglo XVIII: Gonzalo Antonio Serrano, médico, astrónomo y matemático. En Maz-Machado, A. y López, C. (Eds.): *Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores* (pp. 181-198). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Maz-Machado, A., Madrid, M. J., León-Mantero, C. y Jiménez-Fanjul, J. (2017). Research trends in the history of mathematics education: the Spanish case. In Patterson, K. (Ed.), *Focus on Mathematics Eduaction Research* (pp. 150-182). Nova.

Meavilla, V. (2005). Historia de la Educación Matemática en España: el contenido algebraico de la Arithmetica practica, y specvlatiua de Juan Pérez de Moya (ca. 1512–1596). *Revista Brasileira de História da matemática, 5*(9), 19-35.

Meavilla, V., y Oller, A. M. (2014). La extracción de raíces en el Tratado de Mathematicas (1573) del bachiller Juan Pérez de Moya. *Revista Épsilon, 31*(88), 71-88.

Meavilla, V. y Oller, A. (2015). Los textos matemáticos de Antonio Terry y Ribas. *Números,* 90, 89-103.

Oliveira, C., y Schubring, G. (2021). Las dobles transmisiones de los libros de Lacroix y Legendre en el siglo XIX: el caso de Colombia y Venezuela. *Matemáticas, educación y Sociedad*, *4*(2), 1-20.

Picado, M., y Rico, L. (2011). La selección de textos en una investigación histórica en Educación Matemática. *Revista Épsilon*, *28*(77), 99-112

Picado, M., Rico, L., y Gómez, B. (2015). Enseñanza de las unidades métricas en España en la segunda mitad del siglo XIX. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 175-196.

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study* (pp. 187-223). Springer, Dordrecht.

S.S. (1879). *Guía civil, militar y eclesiástica del aprovincia de Asturias. 1878-1879.* Oviedo: Imp. de Vallian y Comp.

Sánchez, I. y González, M. T. (2017). La geometría analítica en España durante el siglo XIX: estudio de las soluciones negativas de una ecuación. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 35*(3), 89-106.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathematique des nombres negatifs. *Petit X*, 12, 5-32.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbooks authors. *For the Learning of Mathematics*, *7* (3), 41-51.

Terrero, D. y Cuesta, T. (1881). *Andalucía y Asturías. Polémica en los dialectos andaluz y bable*. Oviedo: Libreria de Juan Martínez.

Alexander Maz-Machado
Universidad de Córdoba, España
ma1mama@uco.es

Astrid Cuida
Universidad de Valladolid, España
acuidag@am.uva.es

Cristina Pedrosa-Jesús
Universidad de Granada, España
crispj1991@gmail.com

Kiener, F. y Scaglia, S. (2021). La construcción de sentidos en la iniciación al lenguaje algebraico. Matemáticas, Educación y Sociedad, 4(3), 17-36

ISSN: 2603-9982

LA CONSTRUCCIÓN DE SENTIDOS EN LA INICIACIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO

Fabiana Kiener, Universidad Nacional del Litoral, Argentina

Sara Scaglia, Universidad Nacional del Litoral, Argentina

Resumen

El trabajo algebraico en los distintos niveles educativos constituye una problemática de gran interés que ha sido abordada desde diferentes perspectivas. Con el propósito de favorecer la construcción de sentidos en relación con el álgebra escolar, hemos diseñado una propuesta para introducir el lenguaje algebraico desde el establecimiento de relaciones entre variables en séptimo grado de la escuela primaria (estudiantes de 11/12 años), atendiendo a los aportes de la perspectiva del Álgebra Temprana, Sessa (2005) y Arcavi (2005). En este artículo presentamos el análisis de la implementación de una de las tareas, focalizando el estudio en el rol de los intercambios producidos en el aula y las posibilidades de producir significado en relación con las nociones abordadas.

Palabras clave: *lenguaje algebraico, sentido, variables, interacciones.*

The construction of senses in the initiation to algebraic language

Abstract

Algebraic work at different educational levels constitutes a problem of great interest that has been approached from different perspectives. With the purpose of favoring the construction of senses in relation to school algebra, we have designed a proposal to introduce algebraic language from the establishment of relationships between variables in seventh grade of primary school (11/12 year old students), attending to the contributions of the perspective of Early Algebra, Sessa (2005) and Arcavi (2005). In this article we present the analysis of the implementation of one of the tasks, focusing the study on the role of the exchanges produced in the classroom and the possibilities of constructing meanings in relation to the notions addressed.

Keywords*: algebraic language, meaning, variables, interactions.*

Recibido: 10/11/2021; Aceptado: 14/12/2021

INTRODUCCIÓN

El trabajo algebraico en los distintos niveles educativos constituye una problemática de gran interés que ha sido abordada desde diferentes perspectivas. Como muestra de ello, Kieran (2006) propone una síntesis de cómo se han modificado los focos de interés en los estudios sobre esta temática a nivel internacional desde el año 1977 hasta el 2006 considerando los trabajos publicados en los congresos anuales de la Comunidad Internacional de Investigadores y Educadores Matemáticos conocida con el nombre de PME (Psychology of Mathematics Education). Menciona un primer grupo temático referido a la transición de la aritmética al álgebra, nociones de variables e incógnitas, resolución de ecuaciones y problemas verbales de álgebra (1977 a 2006). Un segundo grupo se centra en el uso de herramientas tecnológicas, múltiples representaciones y la generalización (mediados de 1980 a 2006). El tercer y último grupo temático gira en torno al pensamiento algebraico de estudiantes de la escuela primaria, la enseñanza del álgebra, la modelización en escenarios dinámicos (mediados de 1990 a 2006).

El National Council of Teacher of Mathematics (NCTM, 2014) fija su posición respecto a la enseñanza del álgebra a partir del interrogante: ¿Qué es el álgebra como parte de un currículo de matemáticas de la escuela para todos los estudiantes? Afirma que antes de que los estudiantes realicen la transición al contenido de álgebra como una parte importante de sus cursos, necesitan desarrollar una base sólida en matemáticas desde preescolar hasta la escuela secundaria. Por ejemplo, antes de un estudio extenso de ecuaciones lineales y pendientes, deberían escribir e interpretar expresiones numéricas equivalentes, reconocer situaciones en las que las cantidades están relacionadas de manera proporcional y expresar relaciones entre esas cantidades. En particular, en el nivel primario, los estudiantes deberían desarrollar fluidez con los números, explorar la estructura de las operaciones y sus propiedades y verbalizar relaciones cuantitativas.

Numerosos estudios muestran preocupación por las dificultades que presentan los estudiantes en torno al trabajo algebraico (Barrio, Lalanne y Petich, 2010; Ramírez García y Rodríguez Marcos, 2011; Sessa, 2005; Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1996; Olmedo, Galíndez, Peralta y Di Bárbaro, 2015, Pramesti y Retnawati, 2019). En Argentina, la introducción al trabajo algebraico suele iniciarse mediante la resolución de ecuaciones (Sessa, 2005), lo cual ocasiona serias dificultades en los alumnos, puesto que no disponen de suficientes elementos como para explicitar diferencias entre las transformaciones efectuadas al resolverlas y muchas veces terminan memorizando "reglas prácticas" para su resolución, sin entender el sentido de lo que están haciendo (Sessa, 2005; Moreno y Castellanos, 1997).

En lugar del tradicional inicio mediante la resolución de ecuaciones, Sessa (2005) propone diversas puertas de entrada al álgebra escolar. Una de ellas es la denominada funcional, que privilegia la noción de variable y propone la "construcción de la idea de dependencia entre dos magnitudes o cantidades y […] la consideración de las letras para expresar esas cantidades variables" (Sessa, 2005, p. 71). Consideramos interesante la propuesta de introducir el álgebra desde esta vía, porque posibilita, entre otras cosas, aproximarse a nociones como la de variable o dependencia y comprender que el uso de las letras excede la noción de incógnita de una ecuación.

A partir de estas consideraciones, se plantea como objetivo general de la investigación explorar la iniciación al trabajo algebraico mediante el establecimiento de relaciones entre dos variables en séptimo grado de la educación primaria. Con ese propósito, se diseña, implementa y estudia una propuesta para abordar el lenguaje algebraico como herramienta de modelización (Buffarini, 2005), que incluye tareas que propician el desarrollo de conjeturas y argumentos sobre las respuestas dadas. El hilo conductor de toda la secuencia es la noción de variable y puntualmente, la relación entre dos variables. Esta relación se plantea desde diferentes registros de representación (Duval, 2008) en cada una de las tareas (gráfico, tabular, coloquial, simbólico). En este artículo describimos y discutimos los resultados alcanzados en una tarea, considerada central en la propuesta, dado que promueve la introducción del lenguaje algebraico.

Situamos la propuesta en el enfoque denominado Álgebra Temprana (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011; Carraher, Schliemann y Schwartz, 2013; Carraher y Schliemann, 2018; Blanton, Brizuela, Stephens, Knuth, Isler, Murphy Gardiner, Stroud, Fonger y Stylianou, 2018; Carraher y Schliemann, 2020), cuyo objetivo no es añadir álgebra a los planes de estudio del nivel primario, sino ayudar a que emerja el carácter algebraico de la matemática que se trabaja desde los primeros años de la escuela primaria. El álgebra se encuentra implícita en situaciones problemáticas, en contenidos (como por ejemplo las operaciones básicas) y en diferentes sistemas de representación (como tablas, gráficos, escritura en notación aritmética). Investigaciones basadas en este enfoque "han demostrado consistentemente que, mucho antes de la adolescencia, los estudiantes demuestran razonamiento algebraico, usan formas algebraicas convencionales para expresar tal razonamiento y hacen generalizaciones matemáticas que tienen un carácter algebraico" (Carraher y Scliemann, 2020, p. 249).

En el marco del objetivo general del estudio mencionado anteriormente, nos proponemos en este artículo describir el papel de las interacciones en el aula en relación con la emergencia de significados en torno al lenguaje algebraico. Asumimos como Barwell (2016), que el significado matemático emerge a través de relaciones que se producen entre múltiples discursos, voces y lenguajes en la interacción matemática en el aula.

En el siguiente apartado, presentamos algunos aportes teóricos que nos ayudan a interpretar los resultados alcanzados. Posteriormente, describimos brevemente el marco metodológico y la tarea propuesta. En los apartados siguientes, estudiamos y discutimos los resultados alcanzados, a partir de fragmentos de la transcripción de la clase estudiada. En el último apartado compartimos algunas reflexiones y comentarios acerca de los resultados en términos de las potencialidades del contexto y de las intervenciones propiciadas por la docente.

MARCO TEÓRICO

Kaput (2008) plantea la necesidad de repensar nuestra concepción acerca de lo que es el álgebra y el razonamiento algebraico, porque esto influye necesariamente en su abordaje en el aula, especialmente si se propone su tratamiento para el nivel primario. Sostiene que el tipo de visión del álgebra escolar que dominó durante años en muchos países incluía principalmente manipulaciones simbólicas guiadas por la sintáctica. Esta perspectiva, en la que se enmarca el tratamiento habitual que se da en Argentina a partir de la resolución de ecuaciones (Sessa, 2005) constituye una base inadecuada para la reconsideración de su lugar en la escuela. Se precisa una visión más amplia y profunda del álgebra que posibilite su integración en las matemáticas de cada nivel escolar.

En este sentido, afirma que centrarse en la pregunta sobre *qué es el álgebra* destaca a esta disciplina como un cuerpo de conocimiento independiente, como un artefacto cultural. La pregunta sobre *qué es el razonamiento algebraico*, enfatiza el álgebra como una actividad humana. El autor ejemplifica diciendo que aquellos que conciben el álgebra como tema heredado pueden referirse a la ley conmutativa de la adición, por ejemplo, sin tener que establecer cómo se formó la ley o cómo los estudiantes aprenden (o no); mientras que quienes sostienen que el álgebra es un razonamiento se inclinan por considerar las formas de hacer, pensar y hablar de las matemáticas de los estudiantes como algo fundamental. Kaput (2008) considera que los dos puntos de vistas son útiles, dependiendo de los propósitos que se persigan.

El autor ofrece un punto de vista más amplio acerca de la simbolización del álgebra, que combina las dos identidades expresadas en el párrafo anterior (como herencia cultural y como actividad humana) y posibilita organizar su tratamiento en todos los niveles. Considera que un aspecto central del razonamiento algebraico es la *generalización* y la expresión de la generalización en sistemas de símbolos convencionales cada vez más sistemáticos (Aspecto Básico A). Como segundo aspecto central plantea la *acción guiada sintácticamente sobre los símbolos* dentro de los sistemas organizados de símbolos (Aspecto Básico B).

Kaput (2008) menciona la falta de consenso sobre los roles de los dos Aspectos Básicos en el aprendizaje temprano de álgebra y completa su descripción del álgebra añadiendo tres líneas en las que aparecen de alguna manera cada uno de los dos aspectos centrales mencionados.

1 Álgebra como estudio de estructuras y sistemas extraídos de cálculos y relaciones, incluidos los que surgen en la aritmética (álgebra como aritmética generalizada) y en el razonamiento cuantitativo.

2 El álgebra como estudio de funciones, relaciones y variación conjunta.

3 Álgebra como la aplicación de un grupo de lenguajes de modelado dentro y fuera de las matemáticas.

La primera línea es considerada en muchos casos como la ruta principal hacia el álgebra. Incluye generalizar operaciones aritméticas y sus propiedades y razonar sobre relaciones más generales y sus formas e implica observar las expresiones aritméticas de una manera nueva, en términos de su forma en lugar de su valor cuando se calcula.

La segunda línea se relaciona con la noción de función, en el sentido de que la expresión de la generalización describe la variación sistemática de instancias en algún dominio. El aspecto sintáctico del álgebra se aplica generalmente para cambiar la forma de las expresiones que denotan regularidades, al comparar diferentes expresiones de un patrón para determinar si son equivalentes, o al hallar cuándo las funciones toman valores particulares (por ejemplo, raíces) o satisfacen restricciones (construir y resolver ecuaciones). Utiliza una amplia gama de sistemas de símbolos, además de los habituales, que incluyen tablas, gráficos y estrategias pedagógicas, como las "máquinas de función".

La tercera línea es el modelado como actividad algebraica y se organiza en tres tipos según cómo se utilizan los dos aspectos básicos mencionados. Un primer tipo es *numérico o cuantitativo* y toma la forma de la declaración de una restricción, generalmente en la forma de una ecuación, que luego requiere el uso del aspecto sintáctico del álgebra para obtener una solución. En este caso la variable se considera como una incógnita. Un segundo tipo de modelado utiliza el primer aspecto central *al generalizar y expresar patrones* y regularidades en situaciones o fenómenos, que surgen dentro o fuera de las matemáticas. Aquí, el dominio de generalización es la situación que se está modelando y, en algunos casos la expresión de la generalización utiliza una o más variables que pueden expresar una función o clase de funciones. Trabajar con tales expresiones para comprender mejor la situación que se está modelando implica el aspecto sintáctico del álgebra. Un tercer tipo de modelado algebraico involucra *generalizar soluciones a una* *situación de modelado de respuesta única* del primer tipo o de problemas aritméticos que no requirieron maniobras algebraicas para su resolución. En este caso, el álgebra ingresa a medida que uno relaja las limitaciones del problema dado para explorar su forma más general, alcance y relaciones más profundas, incluidas las comparaciones con otros modelos o situaciones. La introducción de variables que expresan la generalidad de la situación normalmente toma la forma de parámetros.

El autor señala que esta red de conexiones (entre aspectos y líneas mencionadas) permite que el álgebra desempeñe el papel clave en las matemáticas desde el Nivel Inicial hasta los 12 años. Este análisis de contenido es coherente con el proporcionado por el NCTM (2014).

En la propuesta de enseñanza diseñada se promueve el uso del segundo tipo de modelado, porque se trabaja en torno al establecimiento de relaciones entre variables. Pero a su vez, en lo que concierne a los aspectos básicos y líneas relacionadas con los mismos, clasificamos las tareas propuestas como coherentes con el Aspecto Básico A que apunta a la expresión de generalizaciones y a las líneas 2 y 3 relacionadas con el estudio de variación conjunta y modelado, respectivamente.

Blanton et al. (2018) señalan que involucrar a los niños de educación primaria en la actividad de generalizar es vital porque fortalece su capacidad para filtrar información matemática con características comunes y extraer conclusiones en forma de afirmaciones generalizadas. El acto de representar no solo expresa las generalizaciones que los niños obtienen de las situaciones problemáticas, sino que también determina la naturaleza misma de su comprensión de estos conceptos. Estos autores sostienen que, durante la justificación de las generalizaciones, los estudiantes desarrollan argumentos matemáticos para defender o refutar la validez de una generalización propuesta. En los grados de educación primaria, las formas de argumentos que hacen los estudiantes son a menudo justificaciones empíricas ingenuas (naive).

En relación con el tipo de razonamiento que se requiere para el Álgebra Temprana, Schliemann *et al.* (2011) mencionan la consideración de *premisas tácitas* sobre las situaciones problemáticas que se plantean y la realización de *generalizaciones hipotéticas*, resaltando su carácter no deductivo y la relevancia que tiene para la formulación de hipótesis matemáticas. El foco de atención de la investigación se dirige de las operaciones numéricas a las relaciones funcionales.

En la misma línea, Carraher, Schliemann y Schwartz (2013, p. 156) sostienen que

> *Cualquier* enunciado aritmético puede ser considerado como una instancia particular de un enunciado algebraico más general y ser expresado como tal por medio de la notación de funciones. Toda situación que involucre a la aritmética proporciona una oportunidad para pensar acerca de relaciones algebraicas.

Esto no significa que cada concepto o técnica aritmética sea evidentemente algebraico, sino que se trata de nociones *potencialmente algebraicas* y que precisan del diseño de actividades y de intervenciones docentes adecuadas para hacer visible el álgebra que esconden (Schliemann *et al.*, 2011). En las situaciones problemáticas que plantean trabajan con cantidades indeterminadas. Estos autores reconocen que el éxito en la introducción del Álgebra Temprana depende muchas veces del aprovechamiento adecuado de la ambigüedad en las situaciones problemáticas y que la elección del concepto de función como puerta de entrada al trabajo algebraico posibilita articular un gran conjunto de temas que de otra manera permanecerían aislados.

Consideramos potente la idea que sostienen acerca de promover un tipo de prácticas que se vayan aproximando a lo algebraico, sin apresurar la aparición de definiciones formales. Creemos que una propuesta que persiga una reflexión crítica sobre lo que se realiza, revisando las normas y prácticas que se venían utilizando hasta el momento (porque no permiten dar respuesta cabal al problema) puede resultar significativa para los estudiantes. Pensamos que un trabajo de este tipo, posicionado en la frontera de lo aritmético y algebraico, genera "rupturas" en la actividad matemática que se despliega en el aula (Sadovsky, 2003) que podrían favorecer la iniciación al razonamiento algebraico y la construcción del sentido de las nociones abordadas.

En relación con la preocupación por promover dicha construcción, Arcavi (2005) propone las componentes más importantes que conforman lo que denomina "el sentido de los símbolos". Planteamos a continuación cada una de ellas de un modo sintético:

1- *Amigabilidad con los símbolos:* Supone la comprensión de los símbolos y del sentido estético de su poder. Específicamente, cuándo y cómo los símbolos pueden y deben ser usados para mostrar relaciones, generalidades y realizar demostraciones que de otro modo permanecerían implícitas.

2- *Capacidad para 'manipular' y 'leer a través' de expresiones simbólicas*, como aspectos complementarios en la resolución de problemas algebraicos.

3- *Conciencia de que uno puede diseñar de forma exitosa relaciones simbólicas* que expresen cierta información (verbal o gráfica) dada o deseada.

4- *Capacidad para seleccionar una posible representación simbólica* (elegir la variable a la cual asignar un símbolo), y en ciertos casos, inclusive reconocer nuestra propia insatisfacción con esa selección e ingeniarse para buscar una mejor.

5- *Conciencia de la necesidad de revisar los significados de los símbolos* durante la aplicación de un procedimiento, resolución de un problema o inspección de un resultado, y comparar esos significados con las intuiciones sobre los resultados esperados y la situación que plantea el problema.

6- *Conciencia de que los símbolos pueden cumplir roles distintos* en diferentes contextos y desarrollar un sentido intuitivo de esas diferencias.

Somos conscientes de que las componentes que menciona este autor se deben trabajar en forma progresiva a lo largo de la escolaridad y por lo tanto no aspiramos a considerar todas ellas en nuestra secuencia de enseñanza. Pretendemos comenzar a trabajar la componente 3 con las tareas diseñadas.

Para completar la descripción de los aportes teóricos considerados, y dado el tipo de trabajo que se genera en el aula a partir de las tareas propuestas, nos interesa revisar el papel que representan las interacciones que se producen entre los sujetos durante el trabajo en el aula de matemática.

Sadovsky (2005) afirma que "la calidad de los aprendizajes cobra mayor espesor cuando se hace evidente que para avanzar hay que tomar decisiones de nuevo tipo, para las cuales diferentes alumnos aportan distintos puntos de vista que es necesario zanjar" (pp.61-62). Las decisiones íntimas de cada estudiante se van nutriendo a través de las interacciones que se promueven en el aula, tanto por parte de sus compañeros como por parte del docente. De hecho,

> un alumno pudo haber resuelto un problema sin poner en juego una perspectiva muy general, pero una invitación del docente a reexaminar de manera colectiva el problema una vez resuelto, cambiando por ejemplo las condiciones de los datos y analizando qué

> aspectos permanecen y cuáles se modifican, contribuye a modificar la posición del alumno y lo ayuda a instalarse en un proyecto más general. (Sadovsky, 2005, p. 37)

Asimismo, consideramos significativo atender al rol que juegan las diferencias durante las interacciones, es decir, los desacuerdos, las interpretaciones erróneas, las dudas que surgen en clase durante los intercambios. Zack y Graves (2002) otorgan un papel importante a los intercambios, y para su estudio recurren a la *idea de alteridad* de Bajtín (2011). Esta idea hace referencia al rol que adquieren los enunciados individuales ajenos en la experiencia discursiva de una persona. En efecto, este autor define a esta experiencia como un:

> proceso de asimilación (más o menos creativa) de palabras ajenas (y no de palabras de la lengua). Nuestro discurso, o sea todos nuestros enunciados […] están llenos de palabras ajenas de diferente grado de “alteridad” o de asimilación, de diferente grado de concientización y de manifestación. (Bajtín, 2011, p. 51-52)

De esta manera, el autor manifiesta la *no independencia de los enunciados durante el diálogo*. Plantea que “los enunciados no son indiferentes entre sí ni son autosuficientes sino que “saben” uno del otro y se reflejan mutuamente” (p. 54). Esta idea resulta central para justificar nuestro interés por analizar de qué modo se construye el sentido de las ideas matemáticas durante los diálogos que se producen en el aula.

Otra idea significativa de este autor es la del *rol activo del otro durante la comunicación*:

> En efecto, el oyente, al recibir y entender el significado (lingüístico) del discurso, al mismo tiempo toma una posición activa de respuesta con respecto a él: está de acuerdo con él (por completo o en parte) o no lo está, lo completa, lo aplica, se dispone a su ejecución, etc.; y esta actitud de respuesta del oyente se forma durante el proceso de escucha y comprensión, desde su comienzo mismo, a veces literalmente desde la primera palabra del hablante. (p.23)

La comprensión del discurso, de acuerdo con Bajtín (2011), genera obligatoriamente la respuesta, y por tanto el oyente se convierte en el hablante: “tarde o temprano lo escuchado y activamente comprendido se manifestará en los discursos posteriores o en el comportamiento del oyente” (p.24). Plantea que “nuestro pensamiento (filosófico, científico, artístico) surge y se forma en el proceso de interacción y controversia con ideas ajenas, lo que sin duda se refleja en la forma de la expresión verbal de las propias” (p. 56). Los aportes que realiza este autor sobre la forma en la que se nutre un enunciado propio de los discursos ajenos y el modo en que se forma nuestro pensamiento fundamenta la importancia de estudiar las interacciones en el aula para la construcción del sentido.

PROPUESTA METODOLÓGICA

Siguiendo a McMillan y Schumacher (2005), situamos nuestra investigación bajo la modalidad *cualitativa interactiva*, que consideramos como un *estudio de caso*. La característica interactiva alude al origen de los datos empleados, se refiere a “un estudio en profundidad mediante el empleo de técnicas cara a cara para recoger los datos de la gente en escenarios naturales” (p. 44). En nuestro caso en particular, la información se obtiene de escenarios naturales puesto que observamos a los estudiantes y a la docente en el aula durante la implementación de la propuesta de enseñanza. Decimos también que se clasifica como estudio de caso porque se trata de un “sistema definido” (séptimo grado seleccionado) que se observa a lo largo de un período de tiempo (nueve clases en total de una hora de reloj cada una aproximadamente).

En el marco de la clasificación de *estudio de caso* que plantea Stake (2007), nos posicionamos en el *caso instrumental* porque nos encontramos ante “una cuestión que se debe investigar” como es la iniciación al trabajo algebraico a través del análisis de situaciones que relacionan dos variables y “consideramos que podemos entender la cuestión mediante el estudio de un caso particular” (p. 16). Los sujetos de estudio son la docente y los estudiantes del curso mencionado.

El caso bajo estudio constituye un séptimo grado de una escuela primaria de la ciudad de Santa Fe (Argentina). La escuela cuenta con dos cursos de séptimo grado y el diseño de la propuesta se llevó a cabo a través de un trabajo colaborativo con las docentes de ambos cursos. Se implementaron las tareas en los dos cursos, pero en solo uno de ellos se registró la información en torno a la cual se analizan los resultados de la investigación. El curso estaba conformado por 25 estudiantes de edad comprendida entre los 11 y los 12 años. Hasta el momento de implementar la propuesta no habían trabajado con gráficos cartesianos ni con las nociones de variable, ecuación y función. Al comienzo del año habían leído el texto “La gran incógnita” (Alsina, Burgués y Fortuny, 1997) y realizado una actividad, en el marco de un proyecto interdisciplinario, en la que cada estudiante debía pensar y anotar una incógnita (número del 0 al 9) en un papel para que sea hallada por un compañero, mediante pistas que utilicen el lenguaje matemático.

En lo que concierne al modo de recolectar los datos para nuestro estudio, cabe destacar que se grabaron en audio las reuniones previas con las docentes de los dos séptimos grados y que durante el período de implementación de la propuesta de enseñanza se dispuso de dos *observadores externos*: una investigadora y una adscripta en investigación[1] que grabaron las interacciones que se producen, fotografiaron las escrituras realizadas en el pizarrón y recopilaron las producciones de los estudiantes. La docente del curso fue la encargada de plantear las tareas y explicar lo necesario a los estudiantes. Las observadoras no participaron de las interacciones producidas en cada clase.

Como método de análisis de datos hemos utilizado la *codificación*, es decir, la revisión de un conjunto de datos (las transcripciones de clase y las producciones de los estudiantes) con la finalidad de determinar patrones que describan características particulares del fenómeno estudiado (McKnight, Magid, Murphy, y McKnigt, 2000).

Algunos de los aspectos que tuvimos en cuenta al momento de realizar el análisis de las transcripciones de clase y de las producciones de los estudiantes fueron las cuestiones que el docente deja pendientes, que ignora, que retoma o realza durante la clase; los intercambios durante momentos que fomentan la producción de conjeturas y/o elaboración de argumentos; las características de las prácticas que se despliegan en relación con el trabajo matemático que se promueven con la propuesta y las equivocaciones o interpretaciones erróneas que surgen durante los intercambios o producciones de los estudiantes.

Descripción de la tarea

Como hemos mencionado, en este artículo presentamos los resultados obtenidos en torno a una tarea, enmarcada en una propuesta más amplia que tiene como finalidad proponer una vía de entrada funcional al trabajo algebraico. Se trata de propiciar situaciones que requieran del establecimiento de *relaciones entre variables* partiendo de los saberes previos de los estudiantes y que permitan articular diferentes *registros de representación* (Duval, 2008).

[1] Alumna avanzada del Profesorado de Matemática de la UNL que realizó una pasantía en el proyecto de investigación.

La mayoría de las tareas planteadas se enmarcan en un *contexto* que pretendemos que resulte significativo para los estudiantes. Por este motivo, cobra especial relevancia el *trabajo colaborativo* que realizamos con las docentes de los dos séptimos grados para el diseño de las tareas, bajo el supuesto de que sus conocimientos acerca de las características del grupo de estudiantes elegido (y de niños de esa etapa etaria en general) enriquecen notablemente los aportes de las investigadoras. Las modificaciones que proponen se vinculan especialmente con los contextos y complejidad de las tareas, adecuándolas al grupo de estudiantes.

En la Tabla Nº 1 presentamos la estructura general de la propuesta de enseñanza. Se divide en dos bloques con objetivos diferenciados:

Tabla 1. *Estructura general de la propuesta de enseñanza*

Bloque	*Objetivos*
A	Introducir las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos. Interpretar gráficos.
B	Introducir el lenguaje algebraico. Articular registros coloquial, simbólico, gráfico y tabular.

El Bloque A incluye en principio tareas lúdicas para abordar las nociones de pares ordenados y ejes cartesianos. Luego se presentan gráficos que refieren a contextos diversos (acordes con las características de los estudiantes) para su interpretación.

Según Carraher y Schliemann (2020) la adopción exitosa del álgebra temprana se relaciona con la fluidez con la que los docentes pueden desplazarse entre las representaciones algebraicas y aquellas expresadas mediante el lenguaje coloquial, diagramas, tablas de valores y gráficos cartesianos. Esta afirmación ha guiado el diseño de las actividades del Bloque B.

Imagen 1: Soportes materiales para el Problema de los gogos.

Éste se inicia con el Problema de los gogos[2] y en este artículo presentamos un análisis de algunos resultados obtenidos durante su implementación. Para introducir el problema, la docente del curso muestra a los niños dos cajas iguales que contienen la misma cantidad de gogos (Imagen 1). Les explica que pertenecen a dos compañeros (Pablo y Juanjo, sugieren los estudiantes) y que en el recreo anterior, Pablo ganó tres gogos más (que

[2] Esta tarea es una adaptación de un problema extraído de Carraher, *et al.* (2013).

muestra a los niños). A partir de esta introducción les plantea a los estudiantes que expresen lo que saben sobre el número de gogos que tiene cada niño.

En dicha tarea (que justificamos en Kiener, 2015) se introduce el lenguaje algebraico como herramienta para dar respuesta a la situación planteada. La expresión simbólica es un modelo para representar la relación entre las variables involucradas.

Una de las características que vale la pena mencionar acerca del Problema de los gogos es que pone de manifiesto el *principio de necesidad* de Sessa (2005). Su resolución puede iniciarse por estrategias aritméticas, pero las mismas no alcanzan para dar respuesta al problema. Con este tipo de tareas pretendemos evitar el uso forzado del álgebra en problemas aritméticos (Buffarini, 2005; Oller Marcén y Meavilla Seguí, 2014) para *promover el sentido* de este dominio de la matemática, ausente en los tratamientos de muchos libros de textos.

La tarea en cuestión hace referencia a una de las razones de ser del lenguaje algebraico: representar con símbolos la relación entre dos cantidades indeterminadas. Consideramos que esta es una forma de iniciar un camino, en el nivel primario, que proyecte trabajar en los niveles siguientes el álgebra como *herramienta de modelización y validación*, al modo que lo plantea Buffarini (2005). Pretendemos trabajar en torno a la expresión en símbolos de determinada información sobre la relación entre dos variables y al mismo tiempo, promover la comprensión de los símbolos que intervienen y de la capacidad que tienen para modelizar la situación planteada, aludiendo a la tercera componente del sentido de los símbolos de Arcavi (2005).

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación, presentamos una transcripción del fragmento de la clase en el cual la docente enuncia el Problema de los gogos:

9. D: Juanjo, vamos a ponerle Pablo y Juanjo. . . que tienen la misma cantidad, y Pablo ganó tres gogos más en el recreo. La pregunta es la siguiente, primero para pensarla cerramos la boca, no digo lo primero que se me ocurre. Cierro un poquito la boca y pienso. Después si de pensarlo, levanto la mano y digo mi opinión. ¿Cuántos gogos tiene Pablo y cuántos gogos tiene Juanjo?
10. José: ¿Contando esos o no?
11. La docente les llama la atención para que no digan lo primero que se les ocurre. Vuelve a leer el enunciado del problema.
12. José: Pero no sabemos a quién le ganó Pablo.
13. A1: ¡Yo yo yo!
14. A2: No, no entiendo.
15. La docente les dice que levanten la mano. Vuelve a repetir el problema.
16. José: Capaz que le ganó a Juanjo.
17. A1: Claro, capaz que se los ganó a Juanjo.
18. A2: Pero pueden ser varias posibilidades.
19. D: Bueno, a Juanjo no se los ganó porque Juanjo sigue teniendo la misma caja con la que vino a la escuela, que tiene la misma cantidad que la que tiene Pablo. Entonces a Juanjo no se los ganó.
20. José: No los sacó de la mochila todavía.
21. D: Entonces a Juanjo no se los ganó. Bien, esa es una duda descartada. La pregunta es ¿Cuántos gogos tiene Juanjo y cuántos gogos tiene Pablo?
22. José: ¡Yo!
23. A2: Ah, pero si no sabemos…
24. D: Nadie me dice cantidades todavía, tienen que tener la mano levantada.
Se escucha alumnos hablando entre ellos (no dirigiéndose hacia la maestra)
25. A3: ¿Pablo es el que empezó por la derecha?
26. A5: Dividiendo en dos…
27. A3: ¿Pablo es el que empezó por la derecha?

28. A4: Pueden ser muchas posibilidades…

Transcripción 1. Frases 9-28 del Problema de los gogos

El enunciado del problema de los gogos da lugar a planteos diversos por parte de los estudiantes. Uno de ellos parece realizar un cálculo para determinar la respuesta al problema: "*Dividiendo en dos…"* (frase 26, Transcripción 1), pero no logramos reconstruir su razonamiento. Otro alumno pregunta dos veces si la caja de Pablo es la que comenzó a circular por el lado derecho del aula "*¿Pablo es el que empezó por la derecha?*" (frases 25 y 27, Transcripción 1). Estas intervenciones muestran que el estudiante centra su atención en los soportes materiales que acompañan al enunciado de la situación (cajas con gogos), en lugar de considerar los datos que aporta el problema. La docente no responde el interrogante del alumno.

La primera estudiante que utiliza una respuesta *de tipo aritmético* es Ana. Esta estudiante expresa que Pablo tiene 11 gogos y Juanjo, 8. La docente anota este resultado en una tabla en el pizarrón (cuyas columnas son "Cantidad de gogos de Pablo" y "Cantidad de gogos de Juanjo"). Veamos los intercambios sucedidos en torno a esta respuesta:

29. D: […]A ver Ana:
30. Ana: 11.
31. D: ¿Quién?
32. Ana: Pablo.
33. D: Pablo tiene 11.
34. A6: ¿Cuál es el que empezó por el lado de José?
35. D: Eh no, no porque como eran iguales las cajas pudo haber sido la de Pablo o la de Juan.
36. A7: Pero qué ¿tienen la misma cantidad?
37. D: 11 tiene Pablo y ¿Juanjo? Shhh *(dirige la pregunta a Ana)*
38. Ana: Ehh, 8.

Transcripción 2. Frases 29-38 del Problema de los gogos

En este fragmento, un alumno consulta cuál de los dos (si Pablo o Juanjo) es el que empezó por el lado de José, haciendo referencia a las cajas de gogos que circulan (frase 34). La docente decide aclarar la situación (frase 35). Otro estudiante pregunta si los dos tienen las mismas cantidades (frase 36). La docente no responde a esta pregunta (quizás porque no la oye) y continúa interactuando con Ana primero, y luego con otros estudiantes que proponen otras alternativas de soluciones (*respuestas de tipo aritméticas*). Durante ese intercambio, José se dirige a su compañero de banco y exclama: *"¡Ehh! ¿De dónde sacaron esas cantidades*?" (frase 45, Transcripción de Clase 5, que no se incluye en estos fragmentos). No se escucha ninguna respuesta a su pregunta.

La docente otorga la palabra a una alumna llamada Luciana que plantea si se puede tener en cuenta *el peso de los gogos* (frase 58, Transcripción 3). A partir de ese momento comienzan a intervenir otros estudiantes.

58. Luciana: ¿Teniendo en cuenta lo que te parece que pesan?
59. D: Vos tené en cuenta lo que quieras.
60. Luciana: Porque por ahí puede tener uno más que el otro.
61. Nicolás: Perdón, porque hay gogos más grandes que otros.
62. A1: Son más…
63. A2: ¡Devuelvan las cajas!
64. D: A ver…
65. José: Pero si no sabés cuántos tenían, no se puede.
66. A1: Sí se puede pero hay muchas posibilidades.
67. A: Yo, yo...
68. D: Sí puede ser cualquier número.

69. Mariana: Y puede ser 80 y 83.
70. D: Esa es una posibilidad y dice Luciana …
71. A: Yo, yo...
72. A1: Al revés seño, es 83 y 80 *(no logramos identificar si se trata de Luciana)*
73. José: Seño, ¿es a tirarle a pegar?
74. D: Ajá.
75. José: ¡Ahh!
76. A: Y sí, son muchas posibilidades.
77. A1: Yo quiero 11 y 8 no 12 y 13.
78. D: Es arriesgar.
79. D: Ehh, ¿al revés Lu? ¿83 y 80?
80. A: Yo, Seño, ¡yo!
81. D: Luciana..., yo no sé si escucharon. Luciana me preguntó si tenía que tener en cuenta el peso. yo le dije que tuviera en cuenta lo que ella necesitara tener en cuenta. En principio en los datos que yo les di no dije nada sobre el peso y un compañero contestó que pueden ser algunos más pesados y otros más livianos. El dato que yo les dí es que tenían la misma cantidad.

Transcripción 3. Frases 58-81 del Problema de los gogos

Podemos notar algunos aspectos interesantes que surgen a partir de la intervención de Luciana (frase 58). Por un lado, instala en la clase otro tipo de mirada sobre la situación: antes de arriesgar una *respuesta aritmética*, consulta acerca de una posible *variable* a tener en cuenta (el peso de los gogos). Parecería que Luciana se preocupa por establecer *cuál es la variable* a tener en cuenta para realizar su estimación de manera acertada (aunque la niña no utilice el término “variable”).

Si pensamos en nuestro interés por desarrollar actividades de modelización con los estudiantes, la intervención de Luciana cobra especial relevancia porque apunta a qué variables debemos tener en cuenta para dar una respuesta al problema (peso de los gogos, tamaño de los gogos, tamaño de las cajas, etc.). Sin embargo, nos quedan algunas dudas acerca de la naturaleza de su interrogante. Podría ser que la alumna se refiera a la necesidad de utilizar la variable peso con algunos de los objetivos siguientes:

- para intentar acertar una respuesta particular (o mejorar la estimación) a partir de considerar un peso promedio de un gogo (sopesando las cajas, por ejemplo).
- para indicar que hay varias posibilidades de solución (considerando que los gogos pueden tener distintos pesos).
- para mostrar que las cajas podrían diferir en la cantidad de gogos que contiene cada una (asumiendo que deben tener el mismo peso, en lugar de la misma cantidad).

A raíz de la segunda intervención de la alumna “*Porque por ahí puede tener uno más que el otro*” (frase 60, Transcripción 3) podría estar refiriéndose al tercer aspecto que mencionamos. No obstante, observamos que luego propone una solución particular que considera que las dos cajas contienen lo mismo. No podemos determinar con precisión de qué manera influye su atención en el *peso de los gogos* en la respuesta que sugiere, porque los valores que propone (80 y 83) no consideran, por ejemplo, el tamaño de las cajas utilizadas.

Por otro lado, a partir de la intervención de Luciana, otro estudiante (Nicolás) irrumpe diciendo “*Perdón, porque hay gogos más grandes que otros*” (frase 61, Transcripción 3). Su planteo puede interpretarse de diversas formas: podría querer demostrar su acuerdo con el de su compañera (aunque su discurso apunta a otra variable que es el *tamaño de los gogos*) o podría estar proponiendo precisamente la consideración del tamaño de los gogos como una *nueva variable* a tener en cuenta, o bien unifica las variables considerando que a mayor tamaño corresponde mayor peso, entre otras. La docente interpreta que el alumno se refiere al primer aspecto mencionado cuando dice: "*un compañero contestó que pueden ser algunos más pesados y otros más livianos*" (frase 81, Transcripción 3).

Entre las interacciones que se desencadenan a raíz del planteo de Luciana, vemos que José insiste en su inquietud acerca de cómo se obtienen las respuestas aritméticas que indican sus compañeros "*Pero si no sabés cuántos tenían, no se puede*" (frase 65, Transcripción 3). En un primer momento, un compañero le responde que pueden existir varias posibilidades. La docente reafirma esta idea con una expresión que podríamos cuestionar por falta de precisión "*Sí, puede ser cualquier número*" (frase 68, Transcripción 3), pero también podemos interpretar desde su intención de "no dar pistas" para condicionar la resolución de los estudiantes.

No obstante, José vuelve a intervenir más adelante, pero esta vez dirigiéndose directamente a la docente "*Seño, ¿es a tirarle a pegar?*" (frase 73, Transcripción 3). La docente le responde afirmativamente y otro estudiante repite que pueden ser varias alternativas de solución. Creemos que José observa *con preocupación* que del enunciado del problema no se deducen directamente las respuestas que dan sus compañeros. Si bien en el momento en el que ocurren las interacciones podría interpretarse que este alumno no comprende *qué es lo que hay que hacer*, desde nuestro punto de vista, creemos que su mirada es más general que la del resto. Podría ser que perciba que el problema sólo establece *relaciones entre dos variables* y este aspecto también nos interesa desde el punto de vista de la modelización.

A continuación analizaremos el modo en el que un alumno, Gerónimo, percibe que debe revisar su respuesta al observar las de sus compañeros. Esto sucede mientras la docente se encuentra escribiendo las respuestas particulares que le dictan algunos alumnos. Consideremos el siguiente fragmento de lo sucedido en la clase:

83. Gerónimo: Seño, yo calculé mal el mío ¿me lo podés borrar?
84. D: A ver, ya vamos ya vamos, por supuesto… Sí, Mariana.
85. […] *(varios estudiantes indican respuestas aritméticas a la docente)*

97. D: Bien, ahí llego. Gerónimo, ¿por qué vos decís que te equivocaste?
98. Gerónimo: Porque hice mal el cálculo...
99. D: A ver…
100. Gerónimo: Porque pensé que como decía que coleccionaron juntos, pensé que Pablo y Juanjo hacían 5 y 5, entonces se sumaban… eran 10 y 3 que ganaba Pablo, hacían 13.
101. D: Bien, ¿Cuál es el tuyo?
102. Gerónimo: 13 y 5.
103. Todos: 13 y 5.
104. D: ¿Y por qué esto está mal, entonces?
105. Gerónimo: Porque…
106. D: ¿Cuánto te tiene que dar?
107. A: Tienen que tener diferencia de 3.
108. A1: Porque ahí hay 8 cositos de diferencia.
109. D: Ajá. ¿Eso es lo que estás diciendo, lo que dicen las chicas?
110. Gerónimo: Si.
111. D: Bien, entonces ¿qué número tendría que escribir acá?
112. Gerónimo: 10.
113. A1: Eso es lo que iba a decir yo.
114. Varios: O cambiaría el otro.
115. D: ¿O? Déjenlo a Gerónimo decidir porque él está corrigiendo su posibilidad. A ver, ¿o…?
116. *(Silencio)*
117. D: 13 ó 10, está bien eso. Sino lo que dicen las chicas es si vos dejás un 5 acá ¿cuánto tendrías que tener?

118. Gerónimo: Ah, 8.
119. Varios: 8.
120. D: Esa es la otra posibilidad. Porque como están diciendo también la diferencia tiene que ser ¿cuánto?
121. Varios: De 3.
122. D: ¿Quién dijo 11 y 8?
123. Ana: Yo.
124. D: Ana. La diferencia ¿cuánto es?
125. Ana: 3.

Transcripción 4. Frases 83-125 del del Problema de los gogos

Si centramos nuestra mirada en la explicación que da el alumno sobre su razonamiento, notamos que su primera respuesta (13 y 5) responde a una lógica determinada y que podría aceptarse como una *posible interpretación* del enunciado del problema. Lo único que podría cuestionarse es que indica esos valores para que la docente los complete en las columnas que dicen Pablo y Juanjo (en ese orden).

Para este estudiante resultó clave la confrontación de respuestas que se escribieron en el pizarrón. Sin las mismas, no podría haber identificado la suya como "diferente" de las demás y, lo más importante, no habría tenido la necesidad de revisarla y poner en palabras su razonamiento. Este hecho concuerda con lo señalado por Sadovsky (2005), en el sentido de que los intercambios en torno a una determinada tarea nos invitan a considerar la producción propia como marco para confrontar, analizar y/o revisar otras resoluciones.

Retomando la explicación de Gerónimo, observamos en el fragmento anterior que intervienen otras alumnas que hacen referencia a que la diferencia entre los dos valores debe ser tres. Esto no significa que Gerónimo no se haya dado cuenta de esto (al momento de corregir su respuesta) sino que, posiblemente, sus compañeras se adelantaron en explicitarlo. Aún así, gracias a la intervención de la docente, que desde el principio se muestra *decidida* a que sea el propio autor el que explique *por qué* su respuesta es incorrecta, el alumno logra explicar su razonamiento y realizar modificaciones para corregir su respuesta. Cuando el estudiante debe dar una fundamentación sobre su producción *se enfrenta con lo que verdaderamente hizo o sabe* y esto permite *desplegar lo individual* (que muchas veces permanece oculto inclusive para el propio productor) (Buffarini, 2005).

La intervención de Gerónimo relatada en el episodio anterior, no sólo posibilita poner en palabras su interpretación de la tarea sino que promueve una *mirada más general sobre* el problema porque ubica el foco de atención en el *valor constante de la diferencia* entre cada par de soluciones particulares. Al indicar públicamente que su respuesta es incorrecta, provoca que el resto de los estudiantes intenten identificar el origen de esa diferencia (Zack y Graves, 2002). Este cambio de actividad -ya no se trata de proponer valores particulares sino de buscar la regularidad en la relación entre los valores que están escritos en el pizarrón, qué es lo que tienen en común- desemboca en que los números de cada par propuesto "*tienen que tener diferencia de tres"*. De modo que este aspecto general (o más bien, relacional entre las dos variables) surge en el seno de la clase a raíz de la intervención de Gerónimo y no por solicitud de la docente. En todo caso, la maestra aprovecha esta ocasión para hacer especial hincapié en el *nuevo descubrimiento*[3], buscando que aquellos que aún no lograron esta perspectiva más general sobre el problema se encaminen en esta dirección. Para ello, continúa la clase retomando las otras

[3] Hablamos de *nuevo descubrimiento* pero no quiere decir que todos los estudiantes perciban recién en este momento que la diferencia debe ser tres, sino que destacamos el hecho de que lo que tal vez formaba parte del conocimiento de algunos, se explicita y se propone como conocimiento común para todos.

respuestas que estaban en el pizarrón para que sus autores indiquen cuánto da la diferencia entre los valores propuestos y que expliquen por qué sucede esto.

Luego, se discute en torno al modo de expresar la relación entre el número de gogos de Pablo y Juanjo. Para ello la docente recupera una intervención de Luciana diciendo: *"¿por qué hay infinitas posibilidades? Yo escribí en el pizarrón algo que dijo Luciana que es lo que estamos pensando, cualquier número podría ser.", "¿cómo podríamos entonces lo que tiene Pablo y lo que tiene Juanjo sin pensar en un número concreto, de qué manera?"* (frases 198 y 200, Transcripción de Clase 5 no incluida en este artículo). Un alumno sugiere abrir la caja. La docente afirma que de ese modo se pueden contar, pero repregunta de qué modo matemáticamente se puede escribir. Un estudiante irrumpe diciendo que con la letra x u otra letra (antes de que la docente termine de preguntar). Veamos a continuación como se desarrolla el debate a partir de este punto:

202. D: Abriendo… ahí contamos. Pero digo de qué [modo] matemáticamente …
203. A: Con la letra x o otra letra.
204. D: Podemos usar una letra para eso.
205. A: La incógnita.
206. José: ¡x! Juanjo tiene x y Pablo tiene el mismo x que Juanjo más tres.
207. D: ¡Apa! A ver… ¿estás escuchando?
208. A2: Sí, ¡x más tres!
209. A3: Como las ecuaciones.
210. D: Pablo tiene x+ 3 dicen acá y Juanjo tiene x, ¿están de acuerdo?
211. Varios: ¡Sí!
212. D: ¿Si? Porque Pablo tiene tres gogos más que Juanjo que tiene x. Muy bien. Otra forma podría ser decir, como es cualquier número, que Pablo tiene…
213. A: La culpa la tiene *(inaudible) (en simultáneo con el discurso de la docente)*
214. D: Podemos poner una n para señalar el universo de los números más tres y Juanjo tiene n, ¿sí?

Transcripción 5. Frases 202-214 del Problema de los gogos

Tal como podemos observar en la transcripción anterior, surgen en la discusión algunos términos interesantes: *incógnita* y *ecuación*. En relación con el primero de ellos, se puede relacionar con el texto que habían trabajado con la docente (Alsina *et al*., 1997). En lo que concierne al segundo, los estudiantes no abordaron el tratamiento de ecuaciones en la escuela, pero quizás algunos de ellos reciben apoyo adicional para prepararse para el examen de ingreso en el nivel secundario.

Respecto al surgimiento de una expresión simbólica para el número de gogos de Juanjo y Pablo, notamos que José es el primero en lograrlo (frase 206, Transcripción 5). La docente refuerza su aporte llamando la atención del resto de la clase y repitiendo lo que dijo este alumno (frase 207, Transcripción 5). Aunque algunos alumnos proponen la letra x, la docente utiliza otra letra y señala: "*Podemos poner una n para señalar el universo de los números más tres y Juanjo tiene n, ¿sí?"* (frase 214, Transcripción 5)

No podemos afirmar que los estudiantes hayan comprendido la razón por la cual la maestra escribe el número de gogos de cada uno como "n" y "n+3", en lugar de utilizar la letra "x" que había surgido de ellos. Creemos que la decisión docente se basa en la planificación de la tarea. Desde nuestro punto de vista, consideramos que no resulta oportuno el cambio de letra en ese momento de la clase en la que el *salto conceptual* es muy grande. Se pasa de indicar respuestas aritméticas a escribir en símbolos la relación entre la cantidad de gogos de los dos niños. Además, interpretamos que la elección de los niños de la letra x se podría relacionar con la actividad sobre el texto "La gran incógnita" (Alsina *et al.*, 1997). En ese caso, la letra representaba un número a develar.

La clase continúa con la discusión en torno al resultado de realizar *x+3-x*. Esta idea surge de un estudiante, como podemos ver en el episodio siguiente:

216. A1: ¡Seño! x+3-x te da lo de… eh.. te da Pablo.
217. D: A ver...él dice x+3-x te da ¿qué?
218. A1: Pablo.
219. Varios: La diferencia.
220. D: Ahh y entonces ¿cómo se hallaría esto?
221. A2: ¡3!
222. A3: x menos … x más x menos…no, no.
223. José: Ah, tenés que saber…
224. D: La diferencia te va a dar ahí o ¿no?
225. José: Ah, ¡es que tenés que saber lo que vale x!
226. A: No ¡Seño!
227. D: ¿Cómo hago la diferencia?
228. A2: ¡Restando!
229. A1: x-x-3 *(en simultáneo con el discurso del estudiante anterior)*
230. D: Ahh.
231. A3: Pero imposible...
232. A: A x le restás x… no, si a x+3 le restás x te da 3 *(en simultáneo con el discurso del estudiante anterior).*
233. D: Ajá. Bien, pero porque sé que es tres en este caso. Lo que estás diciendo vos Nicolás es que x+3 que es lo que tiene Pablo (escribe en el pizarrón) menos x te va a dar igual a 3, que es la diferencia, ¿sí? porque sé que es 3 la diferencia en este caso.

Transcripción 6. Frases 216-233 del Problema de los gogos

En esta transcripción observamos que algunos niños parecen operar con una expresión algebraica sin conocer las reglas formales del álgebra. Inferimos que lo logran a partir de establecer relaciones con el contexto. Por otro lado, en medio de los intercambios surgen dos expresiones algebraicas equivalentes *x+3-x* y *x-x+3* (frases 216 y 229, Transcripción 6). La docente no trata esta cuestión en la clase.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Destacamos en este caso el papel que juega el discurso del otro en el punto de vista personal. En los intercambios producidos en el aula en torno al Problema de los gogos, José interviene buscando razones para poder entender *cómo están razonando* sus compañeros sobre el problema para llegar a sus *respuestas*. A pesar de que partieron todos del mismo enunciado, no todos lo interpretan de la *misma manera*. Se pone de manifiesto en este caso que “un tipo de interacción sostenida para el conjunto puede ayudar a los que todavía no entraron en un cierto juego matemático, a construir una posición de búsqueda de razones, necesaria para producir conocimiento” (Sadovsky, 2005, p. 89).

Los cuestionamientos de algunos estudiantes acerca de cómo se obtienen las *respuestas aritméticas* que brindan sus compañeros manifiesta que posiblemente no están familiarizados con tareas de este tipo, donde aparentemente hay *varias respuestas posibles* y no está claro *qué calculo* realizan para obtenerlas. Este es el espacio en el que se producen “rupturas” desde el punto de vista de Sadovsky (2003) entre las prácticas aritméticas y algebraicas. En este caso en particular creemos que el problema invita a revisar algunas *normas del trabajo matemático* en el aula. Es probable que la acción de *elegir* un número, que se utiliza en esta primera parte del problema (se selecciona un número para la cantidad de gogos de Pablo y se halla la correspondiente cantidad de gogos de Juanjo) no haya sido una acción frecuente para dar respuestas a problemas matemáticos en la experiencia escolar de estos niños.

A partir de la descripción realizada notamos que aparecen *enunciados*, según la terminología de Batjín (2011), de diferente naturaleza en torno a la situación problemática planteada por la docente. Según las características de cada una de ellas, proponemos las siguientes categorías:

- De naturaleza concreta: incluimos en esta categoría a aquellas intervenciones de los estudiantes que priorizan los soportes materiales (las cajas concretas con gogos) por sobre los datos que aporta el problema. Por tal motivo, insisten en poder distinguir cuál es la caja de Pablo y cuál la de Juan, en lugar de considerar el dato de que tienen la misma cantidad.
- De naturaleza aritmética: adoptamos esta denominación de Buffarini (2005) para considerar aquellas respuestas que señalan valores numéricos particulares para la cantidad de gogos de Juanjo y Pablo, sin intentar explicitar las relaciones que establece el problema.
- De naturaleza relacional- funcional: incluimos aquí a las intervenciones que sugieren que el problema admite varias soluciones, a los cuestionamientos sobre los modos de obtener las soluciones particulares y a las propuestas de variables a considerar para resolver la situación.

Estos distintos tipos de enunciados constituyen diferentes miradas que se dirigen hacia un mismo fin (resolver la situación) y que tienen lugar en el debate colectivo. Creemos que los diversos aportes que se producen en esta clase invitan a revisar la interpretación personal del problema y en muchos casos, la enriquecen. Por ejemplo, los enunciados que corresponden al tercer tipo (relacional-funcional) resultan más interesantes, desde el punto de vista matemático, que las dos primeras categorías (concreta y aritmética). Las intervenciones que proponen variables a considerar o la indicación de que existen muchas soluciones podrían interpelar a aquellos alumnos que dan respuestas aritméticas o concretas. El hecho de que haya compañeros que manifiesten razonamientos totalmente diferentes al propio obliga al menos, a intentar comprender *cómo* está pensando *el otro*.

También sucede otro tanto en el sentido contrario: los cuestionamientos acerca del modo de obtener las soluciones particulares no hubiesen tenido lugar si no hubiesen surgido respuestas de este tipo. Por lo tanto, la divergencia de voces en el debate provoca el avance colectivo en la búsqueda de razones para lograr un criterio común y resolver finalmente la situación. Tal como lo plantea Batjín (1986 en Zack y Graves, 2002) la diferencia sirve como un mecanismo de pensamiento, dada la función dialógica del lenguaje que permite el desacuerdo y las múltiples voces. En nuestro caso particular, se muestra que la heterogeneidad de puntos de vista contribuye a iniciar un camino para modelizar la situación.

En relación con el papel del *contexto* en la tarea creemos que, por el hecho de resultar familiar, contribuyó a que los estudiantes se involucren en la resolución del problema. No obstante, reconocemos que el contexto generó un conflicto al momento de discutir sobre la cantidad de soluciones de la tarea. En ese caso, la docente optó por *flexibilizar* los condicionantes que surgen de los soportes materiales que acompañaron al planteo del problema (si no entran los gogos en las cajas, podemos colocar figuritas de esos gogos). Sostenemos que reflexionar sobre la cantidad de soluciones manteniendo los soportes materiales hasta el final genera otro tipo de trabajo matemático (interesante) sobre el problema original.

COMENTARIOS FINALES

Nos interesa señalar algunas evidencias que encontramos en nuestro trabajo al analizar las producciones orales y escritas de los niños. En general, observamos que la tarea diseñada favoreció el establecimiento de vínculos con contextos cercanos para los niños, y en algunos casos, la recuperación de experiencias previas que tuvieron lugar dentro del escenario escolar. Las características de la tarea (y la gestión de la clase por parte del docente) promovieron los intercambios entre niños sobre sus resoluciones e interpretaciones de las consignas, dando lugar en varias ocasiones al surgimiento de nuevos problemas y a la revisión de la interpretación personal de la tarea.

Los intercambios producidos en clase enriquecieron las discusiones y habilitaron la posibilidad de abordar cuestiones que quizás no hubiesen tenido lugar en un trabajo individual. Como sostiene Barwel (2016) el trabajo de los estudiantes con la docente en torno a la tarea permite ampliar el repertorio de posibles formas de producir significado en matemática.

Durante la puesta en común del problema analizado, las interacciones contribuyeron a la evolución de las estrategias, desde prácticas aritméticas a prácticas algebraicas, favoreciendo la atribución del sentido al uso de las letras para expresar una relación entre dos variables, promoviendo la tercera componente del sentido de los símbolos (Arcavi, 2005). El problema genera la posibilidad de que los estudiantes se formulen preguntas y busquen explicaciones, condiciones que consideramos centrales para un trabajo matemático en el aula que permita atribuir sentido al lenguaje algebraico.

Consideramos interesante el estudio de la implementación de actividades de modelización, atendiendo a las interacciones entre los diferentes actores, a la gestión de la clase por parte del docente y al surgimiento de nuevos interrogantes a partir del problema inicial. En relación con el modo de proponer el trabajo sobre la *frontera* aritmético-algebraica, creemos que el trabajo en torno al establecimiento de relaciones entre variables y la utilización de soportes materiales promueve algunas características de la perspectiva Álgebra Temprana y hace uso del *principio de necesidad* (Sessa, 2005) para introducir el lenguaje algebraico.

En lo que concierne al análisis de la implementación de la tarea, entendemos que se puede profundizar desde otras miradas, como puede ser la de docentes y estudiantes mediante la realización de entrevistas. Esto resultaría un insumo significativo para el estudio, añadiendo una mirada posiblemente diferente de la propuesta por las investigadoras. Dejamos pendiente este desafío para un estudio futuro.

Consideramos que este trabajo se convierte en un punto de partida para generar estudios que profundicen en la temática elegida: la construcción de sentidos en la introducción al trabajo algebraico mediante el establecimiento de relaciones entre variables.

REFERENCIAS

Alsina, C. Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Editorial Síntesis.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics* 25, 42- 48.

Bajtín, M. (2011). *Las fronteras del discurso*. (Trad. Borovsky, L.) Buenos Aires, Argentina: Las cuarenta.

Barrio, L., Lalanne y A. Petich (2010) *Entre Aritmética y Álgebra: un camino que atraviesa los niveles primario y secundario: investigaciones y aportes.* Buenos Aires, Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

Barwel, R. (2016). Formal and informal mathematical discourses: Bakhtin and Vygotsky, dialogue and dialectic. *Educational Studies in Mathematics* 92(3), 331–345.

Blanton, M., Brizuela B., Stephens A., Knuth E., Isler, I., Murphy Gardiner A., Stroud R., Fonger, N. y Stylianou D. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 27-49). Montreal, Canada: Springer.

Buffarini, F. (2005). *La dimensión del álgebra como herramienta de modelización y validación: las interacciones en el aula como medio para su evolución*. Tesis de maestría. Universidad Nacional de Río Cuarto.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2018). Cultivating Early Algebraic Reasoning. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- 12- year-olds. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice.* (pp. 107-138) ICME-13 Monographs. Chaim, Switzerland: Springer International Publishing.

Carraher, D. y Schliemann, A.D. (2020). Early Algebra Teaching and Learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education. Second Edition* (pp. 249-252). Londres: Springer.

Carraher, D., Schliemann, D. y Schwartz, J. (2013). ¿Álgebra en la escuela primaria? En C. Broitman (Comp.), *Matemáticas en la escuela primaria (II).* Saberes y conocimientos de niños y docentes (pp. 121-167). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G, Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education. Epistemology, History, Classroom and Culture,* (pp.49-62). Rotterdam: Sense Publishers.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Kiener, F. (2015) Una propuesta para iniciar el trabajo algebraico en la escuela primaria: el caso de los gogos. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*. *32*(2), 90, pp. 39-48.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Róterdan: Sense Publishers.

McKnight, C., Magid, A., Murphy, T. y McKnigt, M. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician.* Rhode Island: American Mathematical Society.

McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa.* 5° edición. Madrid, España: Pearson. Addison Wesley.

Moreno, I. y Castellanos L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Revista EMA, 2*(3), 247-258.

NCTM (2014). *Algebra as a Strand of School Mathematics for All Students.* A Position of the National Council of Teachers of Mathematics.

Oller Marcén, A. M., Meavilla Seguí, V. (2014) Entre la aritmética y el álgebra. Un análisis histórico de los "problemas de grifos". Educación matemática, 26 (1) pp. 103-126.

Olmedo, N., Galíndez, M., Peralta, J. y Di Bárbaro, M. (2015). *Errores y concepciones de los alumnos en álgebra.* XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Chiapas, México. Recuperado de http://xiv.ciaemredumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/877/367

Pramesti, T.I. y Retnawati, H. (2019). Difficulties in learning algebra: An analysis of students' errors. *Journal of Physics: Conf. Series 1320 012061*. Recuperado de https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1320/1/012061

Ramírez García, M., Rodríguez Marcos P. (2011) Interpretaciones del signo igual. Un estudio de libros de texto. *Revista UNIÓN*. 26, 41-55.

Sadovsky (2003) *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas*. Tesis de doctorado. Universidad de Buenos Aires.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W. y Brizuela, B.M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Paidós Cuestiones de Educación.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid, España: Síntesis.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.

Zack, V. y Graves, B. (2002) Making mathematical meaning through dialogue: "once you think of it, the z minus three seems pretty weird" *Educational Studies in Mathematics* 46, pp. 229–271, Kluwer Academic Publishers.

Fabiana Kiener
Universidad Nacional del Litoral, Argentina
fkiener@gmail.com

Sara Scaglia
Universidad Nacional del Litoral, Argentina
sbscaglia@gmail.com

Meavilla Seguí, V. (2021). Problemas de Trigonometría plana para una enseñanza bilingüe, resueltos o propuestos por un marino mahonés de la primera mitad del siglo XIX. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *4*(3), 37-48

ISSN: 2603-9982

PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA PLANA PARA UNA ENSEÑANZA BILINGÜE, RESUELTOS O PROPUESTOS POR UN MARINO MAHONÉS DE LA PRIMERA MITAD DEL SIGLO XIX

Vicente Meavilla Seguí, Catedrático jubilado, España

Resumen

Se presentan tres problemas de Trigonometría plana que fueron propuestos o resueltos en inglés por el marino y matemático español Pedro José Rodríguez Riola en un diario matemático neoyorquino. Se han diseñado asimismo un conjunto de actividades de enseñanza y aprendizaje que se apoyan en ellos y cuyos destinatarios son el estudiantado de Bachillerato bilingüe.

Palabras clave: *Trigonometría, enseñanza bilingüe, siglo XIX, Historia de la Educación Matemática*

Trigonometry problems for bilingual teaching, solved or proposed by a Mahon sailor in the first half of the 19th century

Abstract

Three plane trigonometry problems are presented that were proposed or solved in English by the Spanish sailor and mathematician Pedro José Rodríguez Riola in a New York mathematical newspaper. A set of teaching and learning activities have also been designed that are based on them and whose recipients are the bilingual Hight School students.

Keywords: *Trigonometry, bilingual teaching, nineteenth century, History of mathematics education.*

Recibido: 05/11/2021; Aceptado: 13/12/2021

PEDRO JOSÉ RODRÍGUEZ RIOLA: DATOS BIOGRÁFICOS[1]

Pedro José Rodríguez Riola nació en Mahón (Menorca) el 30 de mayo de 1802, año en que Menorca se incorporó definitivamente a España[2].

Hijo de Pedro Rodríguez Prats[3] y Águeda Riola Rosas, cursó los estudios de náutica y lenguas extranjeras en la academia privada que dirigía su padre.

En 1818, con dieciséis años de edad, inició las prácticas de navegación con una serie de viajes por el mar Negro en barcos mahoneses que se dedicaban al transporte de trigo. Finalizada esta etapa de formación, obtuvo el título de piloto mercante en 1825.

Al año siguiente Rodríguez fue admitido como profesor de Matemáticas e idiomas de los guardiamarinas en el buque norteamericano *North Carolina*, fondeado en el puerto de Mahón, al mando del Comodoro John Rodgers.

En 1827 se trasladó a los Estados Unidos para ejercer como profesor de guardiamarinas en la Academia de Náutica del Departamento de Gosport (Virginia).

Publicó los dos tratados siguientes:

- *Elements of Spherical Trigonometry; designed as an introduction to the study of Nautical Astronomy* (1829)[4].
- *Tables for determining the latitude at sea, by an altitude, the Polar Star. Observed at any distance from the meridian* (1830).

Los *Elementos de Trigonometría esférica* se dirigen a los jóvenes guardiamarinas estadounidenses, ocupan veinticuatro páginas, contienen veintiuna figuras y se estructuran los ocho capítulos siguientes (Comas Roqueta, 2015):

Cap. I. Círculos y ángulos en la esfera.

Cap. II. De los triángulos esféricos.

Cap. III. Triángulos rectángulos.

Cap. IV. Resolución de triángulos rectángulos esféricos.

Cap. V. Resolución de triángulos oblicuángulos.

Cap. VI. Ejemplos de resolución de triángulos esféricos.

Cap. VII. De los triángulos indeterminados.

Cap. VIII. De los triángulos cuadrantales[5].

---

[1] Para redactar este apunte biográfico hemos consultado los autores siguientes: Joaquín María Bover y Rosselló (1842, 1868 y 1878), Flaquer (1957) y Comas Roqueta (2015).

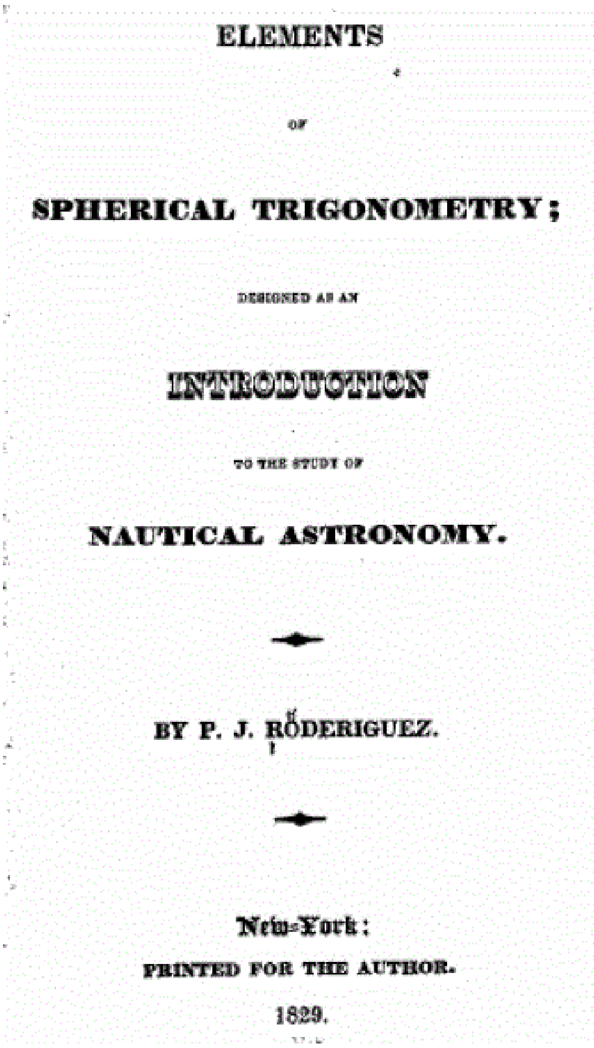
[2] Durante el siglo XVIII, hasta su incorporación definitiva a España en 1802, la historia de Menorca transitó por las cinco etapas siguientes:

Primera dominación británica (1713 – 1756).
Dominación francesa (1756 – 1763).
Segunda dominación británica (1763 – 1782).
Dominación española (1782 – 1798).
Tercera dominación británica (1798 – 1802).

[3] Pedro Rodríguez Prats llegó a ser director y profesor de náutica y dibujo de la Escuela de Náutica de Mahón (1855 – 1869). Murió en 1857.

[4] Un ejemplar de dicha obra se conserva en la New York Public Library.

[5] Se llaman así a los triángulos esféricos algunos de cuyos lados son cuadrantes de circunferencia.



ELEMENTS

OF

SPHERICAL TRIGONOMETRY;

DESIGNED AS AN

INTRODUCTION

TO THE STUDY OF

NAUTICAL ASTRONOMY.

BY P. J. RODERIGUEZ.

New-York:

PRINTED FOR THE AUTHOR.

1829.

El opúsculo *Tables for determining the latitude at sea, by an altitude, the Polar Star. Observed at any distance from the meridian* se desarrolla en doce páginas, y contiene tres tablas (con las fórmulas utilizadas para construirlas) para calcular, tal como señala el título de la obra, «la latitud en el mar mediante la altura de la estrella Polar observada a cualquier distancia del meridiano». En esta obrita Rodríguez cita a Gabriel Císcar[6] (Comas Roqueta, 2015).

También colaboró en *The Mathematical Diary: containing new researches and improvements in the Mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents* (Vol. II, 1828 – 1832) y publicó el artículo *On the observations of Comets* en la revista *The American Journal of Science and Arts* (Vol. 16, 1829).

Dejó inédito un tratado de Astronomía Náutica.

Pedro José Rodríguez Riola falleció el 14 de octubre de 1838 y fue enterrado en Porstmouth (Virginia).

6 El marino, matemático y físico valenciano Gabriel Císcar y Císcar nació en Oliva (ca. 1760) y murió en Gibraltar (1829).

RODRÍGUEZ RIOLA Y *THE MATHEMATICAL DIARY* [TMD]

Las colaboraciones del marino mahonés en el diario TMD se incluyen en su segundo volumen y se reducen a:

> [1] La resolución del problema de trigonometría plana propuesto por William H. Sidell[7]:
>
> > Construir un triángulo si se conoce su base, la diferencia de los cuadrados de sus lados, y la suma de las tangentes de los ángulos de su base (p. 83).
>
> [2] La proposición del problema de trigonometría plana[8]:
>
> > En un triángulo plano ABC, dado el ángulo A, su lado opuesto BC, y el producto de los otros dos lados, encontrar la expresión analítica del valor del ángulo C (p. 104).
>
> [3] La proposición del problema de trigonometría plana:
>
> > Encontrar un ángulo tal que su seno sea la mitad de la tangente del ángulo doble (p. 104)[9].
>
> [4] La resolución del problema de integración propuesto por J. Thompson de la Universidad de Nashville (Tennessee)[10]:
>
> > La integral de $\frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ se suele calcular mediante el arco circular. Calcúlese mediante el área circular. También se pide el valor de dicha integral cuando $x = a$ y cuando $x = 0$ (p. 129).
>
> [5] La resolución de un problema relativo al cálculo de la altitud del lugar, propuesto por $O\mu\iota\chi\varrho o\nu$ (p. 135).

Dado el carácter elemental de este artículo y la tipología de los contenidos que se incluyen en los programas actuales de Matemáticas de Bachillerato, nos limitaremos a estudiar los problemas cuyos enunciados hemos ofrecido en [1], [2] y [3].

La resolución de Rodríguez al problema propuesto por William H. Sidell[11]

EL ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Construir un triángulo si se conoce su base, la diferencia de los cuadrados de sus lados, y la suma de las tangentes de los ángulos de su base.

LA RESOLUCIÓN DE RODRÍGUEZ[12]

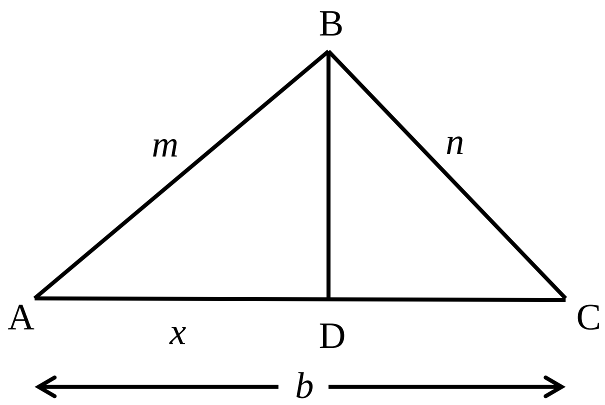
Representemos los lados AB y BC del triángulo por *m* y *n*, respectivamente.

Sea AC = b la base, y AD = x uno de los segmentos en los que la perpendicular BD divide a la base.

Sea s la suma de las tangentes de los ángulos A y C, y d la diferencia de los cuadrados de los lados.

---

[7] Ofrecemos la adaptación al castellano del enunciado del problema de Sidell.
[8] Ofrecemos la adaptación al castellano del enunciado del problema de Rodríguez Riola.
[9] Ofrecemos la adaptación al castellano del enunciado del problema del marino mahonés.
[10] Ofrecemos la adaptación al castellano del enunciado de dicho problema.
[11] Ofrecemos la adaptación al castellano de la resolución de Rodríguez Riola.
[12] Para seguir el discurso del marino menorquín, hemos incluido una figura que no aparece en el texto original.



Entonces, se tiene que:

$$m^2 - x^2 = n^2 - (b-x)^2 \;\; ; \quad m^2 - n^2 = 2bx - b^2,$$

y, por consiguiente,

$$x = \frac{d + b^2}{2b} \quad (13)$$

También se tiene que:

$$x \, tg\mathrm{A} = (b-x) tg\mathrm{C} \quad (14)$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de x y de $tg\mathrm{A} = s - tg\mathrm{C}$, resulta:

$$\frac{d+b^2}{2b}(s - tg\mathrm{C}) = \left(b - \frac{d+b^2}{2b}\right) tg\mathrm{C}$$

Por tanto:

$$tg\mathrm{C} = s\left(\frac{d+b^2}{2b^2}\right)$$

[13] En el triángulo rectángulo ADB se tiene que:

$$m^2 = \mathrm{BD}^2 + x^2 \Rightarrow \mathrm{BD}^2 = m^2 - x^2$$

En el triángulo rectángulo CDB se tiene que:

$$n^2 = \mathrm{BD}^2 + (b-x)^2 \Rightarrow \mathrm{BD}^2 = n^2 - (b-x)^2$$

Por tanto:

$$m^2 - x^2 = n^2 - (b-x)^2 \Rightarrow m^2 - n^2 = x^2 - (b-x)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m^2 - n^2 = x^2 - (b^2 + x^2 - 2bx) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m^2 - n^2 = 2bx - b^2 \Rightarrow x = \frac{m^2 - n^2 + b^2}{2b} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{d + b^2}{2b}$$

[14] Sabemos que:

$$tg\mathrm{A} = \frac{\mathrm{BD}}{x} \quad y \quad tg\mathrm{C} = \frac{\mathrm{BD}}{b-x}$$

Entonces:

$$\mathrm{BD} = x tg\mathrm{A} \quad y \quad \mathrm{BD} = (b-x) tg\mathrm{C}$$

Por tanto:

$$x tg\mathrm{A} = (b-x) tg\mathrm{C}$$

Los problemas propuestos por Rodríguez

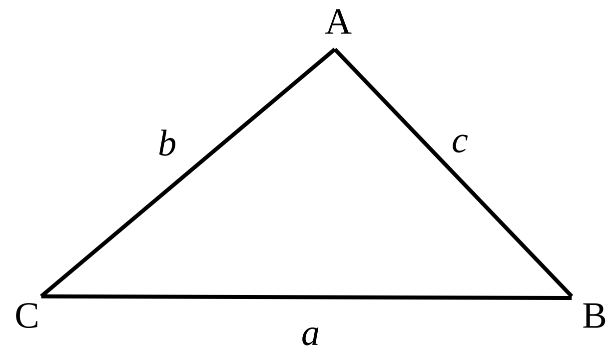
En el *Mathematical Diary* el marino balear propuso los dos problemas siguientes:

> **1.** En un triángulo plano ABC, dado el ángulo A, su lado opuesto BC, y el rectángulo de los otros dos lados, encontrar la expresión analítica del valor del ángulo C.
>
> **2.** Encontrar un ángulo tal que su seno sea la mitad de la tangente del ángulo doble.

El diario recibió tres soluciones al primero (Francis Sherry, John M. Will, Patrick Lee) y dos al segundo (John Swinburne, Enoch Lansing y J. C. Jones).

Ofrecemos las adaptaciones al castellano de las soluciones de Patrick Lee y Swinburne.

LA SOLUCIÓN DE PATRICK LEE AL PRIMER PROBLEMA[15]



Sean BC = a, AB = c y AC = b. Entonces, por Trigonometría, se tiene que:

$$cos\text{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bs} \quad (^{16})$$

Por tanto:

$$cos\text{A} \times 2bs = b^2 + c^2 - a^2 \text{ y } (cos\text{A} \times 2bs) + a^2 = b^2 + c^2$$

Entonces, sumando 2bc a los dos miembros de la segunda igualdad, se tiene que:

$$(cos\text{A} \times 2bs) + a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

Luego:

$$b + c = \sqrt{(cos\text{A} \times 2bs) + a^2 + 2bc}$$

Del modo similar, restando 2bc, resultará:

$$b - c = \sqrt{(cos\text{A} \times 2bs) + a^2 - 2bc} \quad (^{17})$$

[15] Para seguir el discurso de dicha resolución, hemos incluido una figura que no aparece en el texto original.
[16] Por la «fórmula del ángulo opuesto a un ángulo agudo», se tiene que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\text{A} \Rightarrow cos\text{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

[17] En el texto original se comete un error cuando se escribe $b - c = \sqrt{(2cos\text{A} \times 2bs) + a^2 - 2bc}$

En consecuencia, b y c se pueden determinar fácilmente.
Por consiguiente,

$$cos\mathrm{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad ([18])$$

también se puede determinar.

LA SOLUCIÓN DE JOHN SWINBURNE AL SEGUNDO PROBLEMA
Sea φ el ángulo.
Entonces:

$$sen\varphi = \frac{1}{2} tg2\varphi$$

Además:

$$sen\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} \quad ([19])$$

$$tg2\varphi = \frac{2tg\varphi}{1 - tg^2\varphi}$$

Por tanto, por sustitución, se tiene que:

$$\frac{tg\varphi}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{tg\varphi}{1 - tg^2\varphi} \quad ([20])$$

De aquí se obtiene que $tg\varphi = \sqrt{3}$, de donde $\varphi = 60°$ o $\varphi = 120°$.

ACTIVIDADES DE TRIGONOMETRÍA PLANA PARA UNA ENSEÑANZA BILINGÜE DE LAS MATEMÁTICAS

En la sección precedente hemos prestado atención a tres problemas de Trigonometría plana que fueron propuestos o resueltos en inglés por el marino y matemático español Pedro José Rodríguez Riola en un diario matemático neoyorquino
Atendiendo a la nacionalidad del autor y teniendo en cuenta el idioma en que escribió sus trabajos matemáticos, nos parece pertinente diseñar un conjunto de actividades de

---

[18] Por la «fórmula del ángulo opuesto a un ángulo agudo», se tiene que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\mathrm{C} \Rightarrow cos\mathrm{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

En el texto original se comete un error cuando se escribe:

$$cos\mathrm{A} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

[19]

$$\frac{tg\varphi}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{sen\varphi/cos\varphi}{\sqrt{1 + \frac{sen^2\varphi}{cos^2\varphi}}} = \frac{sen\varphi/cos\varphi}{\sqrt{\frac{sen^2\varphi + cos^2\varphi}{cos^2\varphi}}} =$$

$$= \frac{sen\varphi/cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{cos^2\varphi}}} = \frac{sen\varphi/cos\varphi}{1/cos\varphi} = sen\varphi$$

[20] En el texto original se comete un error cuando se escribe:

$$\frac{tg\varphi}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{1 - tg^2\varphi}{tg\varphi}$$

enseñanza y aprendizaje que se apoyen en los antedichos problemas y se dirijan a los alumnos de Bachillerato bilingüe.

Actividad 1. Un marino mahonés

La placa anterior da nombre a un pasaje del barrio de *Les Corts*, que la ciudad de Barcelona dedica al marino y matemático mahonés Pedro José Rodríguez Riola.
Busca en INTERNET los datos biográficos de dicho personaje.

AYUDA: Puedes consultar la obra *Biblioteca de escritores menorquines* (1878) de Joaquín María Bover y Rosselló, disponible en Google Books.

Actividad 2: Un problema de Trigonometría plana

Pedro José Rodríguez Riola colaboró en el diario matemático *The Mathematical Diary* que se publicaba en New York.
En el volumen II de dicha publicación científica, el marino y matemático mahonés resolvió el siguiente problema de trigonometría plana propuesto por William H. Sidell:

Question XII. (165.)—*Mr. William H. Sidell.*

The base, difference of the squares of the sides, and the sum of the tangents of the angles at the base being given, to construct the triangle.

Traduce el enunciado anterior y resuelve el problema que se propone en él.

Actividad 3: La resolución de Pedro J. Rodríguez

La resolución ofrecida por Rodríguez al problema de Sidell es la siguiente:

SECOND SOLUTION.—*By Mr. P. J. Rodriguez, Gosport, Virg.*

Let the sides AB and BC be represented by m and n respectively, the base $AC = b$, one of the segments AD of the base, made by the perpendicular BD, equal to x, the sum of the tangents of the angles A and $C = s$, and d the difference of the squares of the sides. Then on account of the perpendicular BD, we have

$$m^2 - x^2 = n^2 - (b-x)^2; \therefore m^2 - n^2 = 2bx - b^2,$$

and consequently, $x = \dfrac{d+b^2}{2b}$.

We have also $x \tan A = (b-x) \tan C$.

Substituting in this equation the values of x and of $\tan A = s - \tan C$, we have

$$\frac{d+b^2}{2b}(s - \tan\ C) = \left(b - \frac{d+b^2}{2b}\right)\tan C;$$

hence, $\tan C = s\left(\dfrac{d+b^2}{2b^2}\right)$.

[a] Traduce el texto de Rodríguez
[b] Deduce razonadamente la expresión $m^2 - x^2 = n^2 - (b-x)^2$.
[c] A partir de la expresión anterior deduce que $x = \frac{d+b^2}{2b}$.
[d] Deduce razonadamente la igualdad $xtg\mathrm{A} = (b-x)tg\mathrm{C}$.
[e] Apoyándote en la resolución de Rodríguez, ¿cómo se construye el triángulo ABC?
[f] Compara tu resolución con la del marino mahonés.

Actividad 4. El primer problema propuesto por Rodríguez

Pedro J. Rodríguez propuso en el *Mathematical Diary* el siguiente problema de Trigonometría plana:

QUESTION IX. (184.)—*By Mr. P. J. Rodriguez.*

In a plain triangle ABC, given the angle A, its opposite side BC, and the rectangle of the other two sides, to find the analytical expression of the value of the angle C.

Traduce el enunciado anterior y resuelve el problema que se propone en él.
AYUDA: La expresión «the rectangle of the other two sides» equivale a decir «el producto de los otros dos lados».

Actividad 5: La resolución de Patrick Lee

Patrick Lee, de New York, remitió al diario matemático neoyorkino la solución siguiente:

THIRD SOLUTION—*By Mr. Patrick Lee, New-York.*

Let BC$=a$, AB$=c$, and AC$=b$; then, per Trignometry,

$$\cos. \text{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

freeing from fractions, we get

$\cos. \text{A}\times 2bc=b^2+c^2-a^2$, and $\cos. \text{A}\times 2bc+a^2=b^2+c^2$,

add $2bc$ to both, and we get

$$\cos. \text{A}\times 2bc+a^2+2bc=b^2+2bc+c^2; \text{ therefore}$$

$$b+c=\sqrt{}(\cos. \text{A}\times 2bc+a^2+2bc):$$

and in like manner, by subtracting $2bc$, we shall get

$$b-c=\sqrt{}(2 \cos. \text{A}\times 2bc+a^2-2bc);$$

consequently, b and c may be easily found. Hence cos. A$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, is also given.

[1] Traduce el texto de Patrick Lee.
[2] Deduce razonadamente la fórmula $cos\text{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.
[3] ¿Hay algún error en la resolución del matemático neoyorquino?
[4] Compara tu resolución con la de P. Lee.

Actividad 6: El segundo problema propuesto por Rodríguez

Pedro J. Rodríguez también propuso en el *Mathematical Diary* el siguiente problema de Trigonometría plana:

QUESTION X. (185.)—*By the same.*

To find an arc such, that its sine be half the tangent of twice that arc.

Traduce el enunciado anterior y resuelve el problema que se propone en él.

Actividad 7: La resolución de John Swinburne

John Swinburne, de Brooklyn, remitió al *Mathematical Diary* la resolución siguiente:

FIRST SOLUTION—*By Mr. John Swinburne, Brooklyn.*

Let φ be the arc; then, by the question,

$$\sin. \varphi=\tfrac{1}{2} \text{ tang. } 2\varphi.$$

But $\sin. \varphi=\frac{\tan. \varphi}{\sqrt{1+\tan.^2\varphi}}$, and tang. $2\varphi=\frac{2 \text{ tang. } \varphi}{1-\tan.^2\varphi}$;

therefore, by substitution, $\frac{\text{tang. } \varphi}{\sqrt{1+\tan.^2\varphi}}=\frac{1-\tan.^2\varphi}{\text{tang. } \varphi}$;

this equation being reduced, gives tang.$\varphi=\sqrt{3}$; whence $\varphi=60°$ or $120°$, the arc required.

[α] Traduce el texto de John Swinburne.

[β] Deduce la fórmula $sen\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$

[γ] ¿Hay algún error en la resolución anterior?
[δ] Compara tu resolución con la de J. Swinburne.

CONSIDERACIONES FINALES

Las actividades de enseñanza y aprendizaje que hemos propuesto en el parágrafo anterior (inspiradas en tres problemas de Trigonometría plana resueltos o propuestos por un marino y matemático mahonés del siglo XIX y dirigidas a los alumnos de Bachillerato bilingüe) pueden ayudar a los profesores y alumnos de dicho nivel educativo en la consecución de algunos de los objetivos histórico-didácticos que se detallan en el cuadro siguiente:

OBJETIVOS HISTÓRICO-DIDÁCTICOS	
PROFESORES	ALUMNOS
Poner al alcance de los alumnos textos matemáticos de otros tiempos.	
Propiciar la consulta de textos de Matemáticas escritos en lenguas extranjeras.	Trabajar con textos matemáticos redactados en inglés por profesores españoles de otras épocas.
Animar a los alumnos a que, utilizando las herramientas apropiadas, reconstruyan la biografía científica de algunos matemáticos españoles que no figuran en la nómina de «matemáticos famosos».	Descubrir datos biográficos de matemáticos españoles poco conocidos (salvo para los investigadores), utilizando la bibliografía y las herramientas tecnológicas necesarias. Valorar la aportación de los matemáticos de segunda fila a la comunicación y transmisión de conocimientos matemáticos elementales.
Introducir en los programas de Matemáticas de las distintas autonomías del Estado Español materiales didácticos inspirados en las obras científicas de «autores locales».	
Poner de manifiesto la importancia de las revistas matemáticas en la comunicación y transmisión de conocimientos.	
Poner a disposición de los alumnos las resoluciones propuestas a algunos problemas matemáticos elementales por matemáticos profesionales.	
Aprovechar dichas resoluciones para el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje dirigidas a sus alumnos, que propicien en ellos la capacidad de análisis.	Analizar resoluciones ajenas a problemas de Trigonometría plana y compararlas con las propias.

REFERENCIAS

Bover y Roselló, J. Mª (1842). *Memoria biográfica de los mallorquines que se han distinguido en la antigua y moderna literatura.* Palma: Imprenta Nacional a cargo de Don Juan Guasp y Pascual.

Bover y Roselló, J. Mª (1868). *Biblioteca de escritores baleares* (Tomo I). Palma: Imprenta de P. J. Gelabert. Impresor de S. M.

Bover y Roselló, J. Mª (1878). *Biblioteca de escritores menorquines* (Estracto de la obra «Biblioteca de escritores baleares» original de D. Joaquin M. Bover, aumentada con nuevos datos recojidos por Fernando Fabregues). Ciudadela: Establecimiento Tipográfico de Salvador Fabregues

Comas Roqueta, J. (2015). *La enseñanza de las matemáticas en la Armada Española en el siglo XIX* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza: Departamento de Ciencias de la Documentación e Historia de la Ciencia.

Flaquer, J. (1957). *D. Pedro J. Rodríguez y Riola* (Monografías menorquinas, 26). Ciudadela: Allés Quintana.

The Mathematical Diary: containing new researches and improvements in the Mathematics; with collections of questions proposed and resolved by ingenious correspondents (Vol. II, 1828 – 1832). New York: J. Seimour, printer.

Vicente Meavilla Seguí
Catedrático jubilado, España
vmeavill@hotmail.com

El equipo editorial de MES agradece la colaboración como referees durante el año 2021 en el volumen número cuatro a:

Alexander Maz Machado
David Gutiérrez Rubio
José Carlos Casas del Rosal
María Astrid Cuida Gómez
María Pilar Gutiérrez Arenas
Juan Antonio Jimber del Río
María de los Ángeles Hidalgo Méndez
Dagoberto Salgado Horta
Cristina Rodríguez-Faneca
María Rodríguez Baiget
Bernardo Gómez Alfonso
Ana Elisa Esteves Santiago
María Luisa Novo
María Salgado Somoza
Fernando Almaraz Menéndez
Marina Arnal Ferrándiz
Carmen López-Esteban
Bibiana Muñoz-Ñungo
María José Madrid Martín
Noelia Noemí Jiménez Fanjul

MES

Obra publicada con Licencia Creative Commons Atribución 3.0 España