Matemáticas, Educación y Sociedad

ISSN: 2603-9982
Matemáticas, Educación y Sociedad
http://mesjournal.es/
editor@mesjournal.es

Vol 5 No 1 (2022): Matemáticas, Educación y Sociedad

Teófilo de Sousa, R., Vieira Alves, F. R. y Araújo Souza, M. J. (2022). La Teoría de los Conceptos Figurativos y GeoGebra: el concepto y la visualización en geometría dinámica. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *5*(1), 1-17

ISSN: 2603-9982

LA TEORÍA DE LOS CONCEPTOS FIGURATIVOS Y GEOGEBRA: EL CONCEPTO Y LA VISUALIZACIÓN EN GEOMETRÍA DINÁMICA

Renata Teófilo de Sousa, Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil

Francisco Régis Vieira Alves, Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil

Maria José Araújo Souza, Universidade Estadual Vale do Acaraú, Brasil

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar la resolución de una pregunta de Olimpiada Matemática sobre el área de figuras planas utilizando el software GeoGebra, observando el razonamiento geométrico y las relaciones establecidas entre concepto e imagen por los estudiantes, con base en la Teoría de los Conceptos Figurativos. La metodología utilizada en este trabajo fue el estudio de caso, buscando observar y describir las estrategias y dificultades de los estudiantes en su resolución. Para este estudio se realizó una reunión virtual en la plataforma Google Meet, debido a la pandemia COVID-19, con un grupo de 20 estudiantes de segundo año de secundaria. Como resultado, el problema planteado en el estudio se logra resolver mediante la exploración de la visualización y manipulación dentro del entorno del software GeoGebra.

Palabras clave: *Teoría de los Conceptos Figurativos; Geometria Plana; GeoGebra; Razonamiento geométrico; Visualización.*

The Theory of Figural Concepts and GeoGebra: concept and visualization in Dynamic Geometry

Abstract

The objective of this work is to present the resolution of a Mathematical Olympiad question on the area of flat figures using the GeoGebra software, observing the geometric reasoning and the relations established between concept and image by the students, based on the Theory of Figural Concepts. The methodology used in this work was the case study, seeking to observe and describe the strategies and difficulties of students in their resolution. For this study, a virtual meeting was held on the Google Meet platform, due to the COVID-19 pandemic, with a group of 20 students from 2nd year high school. As a result, the problem raised in the study is solved by exploring visualization and manipulation within the GeoGebra software environment.

Keywords: *Theory of Figural Concepts; Flat geometry; GeoGebra; Geometric reasoning; Visualization.*

Recibido: 22/07/2021; Aceptado: 13/12/2021

INTRODUCCIÓN

La geometría, como rama de las matemáticas, también utiliza el razonamiento lógico-deductivo. Sin embargo, en diversas situaciones que conciernen a la comprensión de sus conceptos, aspectos cognitivos como la intuición, la imaginación creativa e incluso el uso de herramientas gráficas y digitales que abordan sus características no son adecuadamente explorados en el proceso de construcción del conocimiento, aun sabiendo que el tratamiento de las figuras geométricas obedece a un sistema axiomático previamente establecido.

La visualización geométrica y comprensión de las entidades geométricas con el fin de relacionarlas con el mundo que nos rodea, así como las dificultades que presentan los estudiantes, ha sido objeto de estudios y varios autores ya han desarrollado trabajos sobre el tema, como Fischbein (1993), País (1996), Gutiérrez (1992), Alves, (2019), Costa (2020), entre otros.

Fischbein (1993), en su trabajo *The Theory of Figural Concepts* (La Teoría de los Conceptos Figurativos) señala que la geometría utiliza entidades mentales, las llamadas figuras geométricas, que tienen características conceptuales y figurativas. Es decir, para entender la Geometría a partir de estas entidades mentales, uno debe entender la asociación entre tales características. Costa (2020, p. 153) refuerza que "el elemento de la imagen estimula nuevas orientaciones del pensamiento geométrico, pero existen restricciones lógicas y conceptuales que controlan el rigor formal del proceso".

Es un hecho que muchos estudiantes, al enfrentarse a problemas de Geometría, en general, presentan dificultades, ya que la construcción del razonamiento geométrico requiere que se establezca una relación entre definición e imagen mental a varios conceptos previos, y no de manera fragmentada, con el mero uso de fórmulas, algoritmos o teoremas prefabricados y retenidos en la memoria del individuo (Becker, 2009; Leivas y Cury, 2010; Lorenzato, 1995; Pavanello, 1993; Fonseca et al., 2001). La relación entre concepto e imagen, en este punto, se vuelve fundamental para la construcción del razonamiento en Geometría.

En este sentido, se buscó desarrollar habilidades para la construcción del razonamiento geométrico de los estudiantes, a través del aporte del software GeoGebra como facilitador del proceso de comprensión de la Geometría, siendo un aporte a la visualización y percepción.

GeoGebra es un *software* de acceso libre y es un recurso que se suma al aprendizaje del alumno y a la metodología del docente, siendo eficiente en la presentación de contenidos de asimilación compleja. El entorno GeoGebra permite la visualización y manipulación de sus elementos y construcciones. Según Alves y Borges Neto (2012), la exploración de GeoGebra como instrumento tecnológico permite visualizar situaciones inimaginables, cuando se restringe al lápiz y el papel. Por lo tanto, el software tiene el potencial de estimular la intuición y el razonamiento geométrico del estudiante, permitiendo la deducción y la interacción a través de la experimentación del contenido.

De lo anterior, la pregunta es: ¿cómo podría GeoGebra posibilitar la comprensión de cuestiones relacionadas con la geometría plana, trabajando la relación entre concepto, imagen y concepto figurativo para el desarrollo de la visualización geométrica en el alumno?

Para responder a esta pregunta, el objetivo de este trabajo es presentar la resolución de una pregunta de Olimpiada Matemática sobre el área de figuras planas utilizando el software GeoGebra, observando el razonamiento geométrico y las relaciones establecidas entre concepto e imagen por los estudiantes, con base en la Teoría de los Conceptos Figurativos, para ayudarlos a desarrollar una visión más amplia de la geometría, en un enfoque no tradicional.

Para lograr el objetivo de este trabajo, la metodología adoptada fue la investigación cualitativa, del tipo estudio de caso, con el fin de observar los experimentos y analizarlos desde la perspectiva de la Teoría de los Conceptos Figurativos, de Efraim Fischbein. Según Yin (2001), los resultados de un estudio de caso poden ser utilizados para probar una teoría bien formulada, ya sea para confirmarla, para refutarla o incluso para ampliar las discusiones sobre esta teoría.

La observación se realizó con un grupo de veinte estudiantes de segundo año de secundaria (16-17 años) de una escuela pública en el estado de Ceará, Brasil, en un encuentro virtual sincrónico, utilizando la plataforma Google Meet, debido al escenario de la pandemia del Nuevo Coronavirus (COVID-19). La recolección de datos se realizó a través de registros fotográficos de los estudiantes, grabación de la reunión y grabación de los diálogos que tuvieron lugar en la plataforma de chat.

Con base en lo anterior, los siguientes apartados traen la relación entre la visualización geométrica desde la perspectiva de los autores antes mencionados y GeoGebra, una profundización de la Teoría de los Conceptos Figurativos, los procedimientos metodológicos, resultados y discusión, así como las consideraciones de los autores.

MARCO TEÓRICO

Visualización geométrica y GeoGebra

En este apartado se discute el punto de vista de los autores que sustentan el marco teórico de este trabajo, siendo estos Fischbein (1993), Piaget e Inhelder (1993), Pais (1996), Gutiérrez (1992), Kaleff (2003), Leivas y Cury (2010), Jeannotte y Kieran (2017) y Costa (2020), reforzando aspectos de visualización geométrica y pensamiento matemático y geométrico, así como Iglesias y Ortiz (2018), Alves (2019), Santiago, Alves y Maia (2021), trayendo los beneficios de su desarrollo con el aporte del software GeoGebra.

Jeannotte y Kieran (2017, p. 7), con respecto al razonamiento matemático, lo definen “como un proceso de comunicación con los demás o con uno mismo, que permite inferir enunciados matemáticos a partir de otros enunciados matemáticos”. Así, se tiene en cuenta que un aspecto estructural organiza la línea de pensamiento lógico-matemático formal a partir de estructuras lógicas como la deducción, inducción, analogía, generalización, entre otras.

Sobre el razonamiento en geometría, Piaget e Inhelder (1993) afirman que consiste en un conjunto de procesos cognitivos en los que se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales. La representación espacial, por ejemplo, constituye un sistema complejo de concepciones, que van más allá de la percepción del individuo en general, siendo el espacio algo subjetivo, una interpretación de la realidad y no necesariamente una reproducción de esta.

Sin embargo, el pensamiento geométrico no se forma de la misma manera en todas las personas. Según las ideas de Van Hiele, existe una jerarquía de cinco niveles de comprensión de las ideas espaciales, que describen los procesos de pensamiento utilizados en contextos geométricos: visualización, análisis, deducción informal, deducción y rigor (Van de Walle, 2009, como citado en Leivas y Cury, 2010).

Ya para Pais (1996) hay cuatro elementos considerados fundamentales y que influyen directamente en el aprendizaje de la Geometría Euclidiana, ya sea plana o espacial, que son el objeto, el concepto, el dibujo y la imagen mental. Respecto a estos cuatro elementos, es crucial agregar la semántica presente en el lenguaje geométrico dentro de los problemas. Así, todavía según el autor, tales objetos y sus respectivas representaciones dibujadas interfieren en el razonamiento procedimental y en la construcción del conocimiento geométrico del alumno.

Fischbein (1993) reitera que los objetos geométricos tienen dos componentes esenciales, el concepto y la imagen, que conciben el aprendizaje de la geometría de manera significativa. Además, el paso de la etapa de experimentación a la abstracción requiere un equilibrio entre dichos componentes, que a su vez puede ser proporcionado por el uso de softwares matemáticos, como es el caso de GeoGebra, presentado en este trabajo.

Aún en la perspectiva de Fischbein (1993), las figuras geométricas constituyen una entidad mental, elaborada a partir de un razonamiento geométrico, en la que una figura es diferente tanto de su definición formal como de su imagen mental y a su vez se sustenta en una percepción sensorial de una determinada representación particular.

En cuanto a Gutiérrez (1992), él considera que la visualización en Geometría es fundamental, ya que dicha habilidad, cuando no se desarrolla, genera dificultades para que el alumno exprese su pensamiento geométrico, incluso para comprender situaciones que se presentan en temas de libros de texto, entre otras situaciones. En este sentido, Kaleff (2003, p. 14) cita también los estudios de Van Hiele en que "la visualización, el análisis y la organización informal (síntesis) de las propiedades geométricas relacionadas con un concepto geométrico son pasos preparatorios para comprender la formalización del concepto". La preocupación por la visualización en geometría es citada por la autora, a partir de una investigación en Educación Matemática que "(...) señaló la importancia de fomentar el desarrollo de las habilidades visuales en los entornos educativos" (Kaleff, 2003, p. 15).

Costa (2020), a partir de su análisis de los estudios de los autores Fischbein, Duval y Pais, señala que el pensamiento geométrico es una habilidad mental en la construcción del conocimiento geométrico, con el fin de aplicar coherentemente la geometría en la resolución de problemas. Así, el autor reitera que el pensamiento geométrico es fundamental "para comprender la naturaleza de los fenómenos e inferir sobre ellos, para identificar y percibir la Geometría como herramienta para comprender el mundo físico y como modelo matemático para comprender el mundo teórico" (Costa, 2020, p. 177).

Con respecto a esta comprensión del mundo que nos rodea a partir de la visualización geométrica, Alves (2019) afirma que con el *software* GeoGebra, los estudiantes pueden desarrollar una capacidad de análisis global y local de propiedades extraídas del entorno computacional y geométrico. El mismo autor también reitera que en base a las potencialidades del GeoGebra, el docente, al utilizarlo, puede incentivar la implicación del alumno en una exploración dinámica de propiedades numéricas y geométricas, desarrollando la visualización, percepción e intuición, imprescindibles para la evolución del aprendizaje del alumno (Alves, 2019).

Los autores Santiago, Alves y Maia (2021) argumentan que el GeoGebra como recurso didáctico es capaz de proporcionar al alumno la asimilación de nuevas estrategias en cuanto a la resolución de problemas geométricos, en particular de las pruebas de Olimpiadas Matemáticas, a través del modelado de situaciones-problema y su respectiva visualización y manipulación dentro del entorno del *software*.

Para Iglesias y Ortiz (2018), los *softwares* de Geometría Dinámica, incluido GeoGebra, favorecen la elaboración de construcciones geométricas, así como su exploración a través de la herramienta "mover un objeto", entre otras posibilidades de manipulación dentro del *software*, permiten el reconocimiento de propiedades invariantes cuando un objeto sufre una transformación, ya que el *software* permite descubrir relaciones entre los objetos que componen una construcción geométrica.

Así, la Geometría Dinámica tiene un gran impacto en el papel que juega para las demostraciones en Matemáticas, especialmente en Geometría, como la verificación, ya que una proposición dada, cuya veracidad no es obvia a partir de unas pocas figuras estáticas, puede ser verificada mediante una variedad de representaciones obtenidas por la computadora (King y Schattschneider, 2003).

Sobre la base de lo que se ha dicho sobre visualización geométrica, pensamiento geométrico, así como el uso del *software* GeoGebra en el desarrollo de los estudiantes, la siguiente sección analiza la Teoría de los Conceptos Figurativos, que muestra cómo el concepto y la imagen se relacionan dentro del dominio de la Geometría, como, así como la comprensión de la definición del concepto figural, en la perspectiva de Fischbein (1993).

La Teoría de los Conceptos Figurativos

Fischbein (1993), al abordar la Teoría de los Conceptos Figurativos en su tesis, afirma que en Geometría existen relaciones que, de hecho, no dependen de dibujos esquemáticos, sino que vienen impuestas por teoremas y definiciones lógicas. El autor destaca que las propiedades de las figuras geométricas se imponen o derivan de definiciones dentro del dominio de un sistema axiomático, siendo una figura geométrica de carácter conceptual.

Bishop (1983) aporta una idea que complementa la de Fischbein, cuando sugiere dos componentes espaciales que serían especialmente relevantes para el aprendizaje de la geometría. El primero es la capacidad de interpretar la información figurativa, lo que implica la comprensión de representaciones visuales. El segundo se refiere a la capacidad de procesamiento visual. Implica la manipulación y transformación de representaciones e imágenes visuales, además de la traducción de relaciones presentes en las representaciones visuales observadas.

La imagen que el sujeto extrae de un objeto es lo que se puede construir a partir de sus propias acciones realizadas sobre el objeto. Para formas complejas, la percepción puede fallar en realizar una síntesis y coordinación de datos perceptuales que se basa en el razonamiento. Para construir una imagen mental, es necesario anticipar posibles características del objeto observado, como líneas, curvas, ángulos, congruencias, entre otras (Piaget e Inhelder, 1993; Mariotti, 1992).

Hershkowitz (1998) afirma que, al pensar, las personas no usan definiciones de conceptos, sino imágenes conceptuales, una combinación de todas las imágenes y propiedades mentales que se han asociado con el concepto. Sin embargo, un estudiante que enfrenta un problema geométrico es inducido por características figurativas en detrimento de las definiciones y restricciones formales. Pero inconscientemente y en diversas situaciones, los conceptos formales están determinados por la imagen mental construida. Por lo tanto, es importante que el estudiante comprenda la diferencia entre la definición formal, la imagen y el concepto figurativo, ya que estos consisten en tres categorías distintas de entidades mentales.

Según Fischbein (1993), lo que caracteriza a un concepto es el hecho de que expresa una idea, una forma de representación ideal de una clase de objetos que tienen características comunes. Por otro lado, una imagen (entendida aquí como una imagen mental) se refiere a una representación sensorial de un objeto o fenómeno.

Mientras tanto, el concepto figurativo expresa una realidad mental, siendo una construcción tratada por el razonamiento matemático en el dominio de la Geometría. Así, el concepto figurativo está totalmente desprovisto de propiedades concretas como peso, color, densidad, etc., sin embargo, presenta las propiedades figurativas, como lo explica Fischbein (1993):

> Los objetos de manipulación en el razonamiento geométrico son entidades mentales, llamadas conceptos figurativos, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, magnitud) y, al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales, como idealidad, abstracción, generalización, perfección. (Fischbein, 1993, p. 143).

En el fragmento señalado y desde la perspectiva del autor, se entiende que, a través de la dualidad de concepto e imagen, se construye una imagen mental basada principalmente en conceptos previamente establecidos y formalizados. Por ejemplo, la imagen de un cuadrado no consiste en una mera imagen dibujada en una hoja de papel de manera arbitraria, sino que su concepción, aunque puede estar influenciada por un objeto real, es parte de una definición formal dentro de un sistema axiomático que impone que *un cuadrado es un rectángulo con todos los lados iguales*.

En general, las imágenes están controladas por conceptos. Sin embargo, hay situaciones en las que los conceptos no pueden controlar las imágenes, como en el siguiente ejemplo (Figura 1):

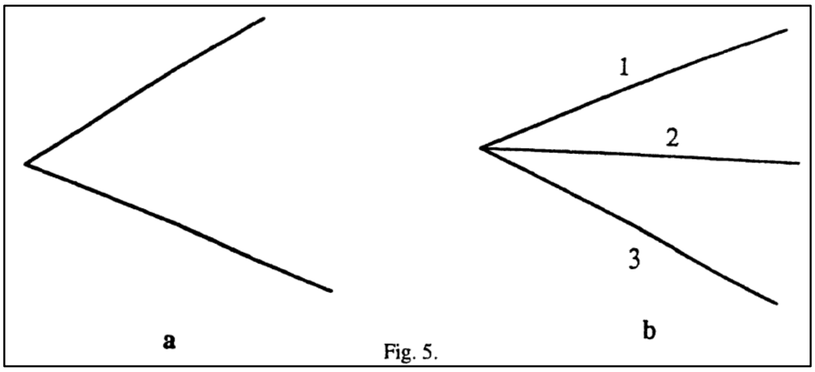


Figura 1. Ejemplo de un concepto que no controla la imagen. Fuente: Mariotti (1992, citado por Fischbein, 1993, p. 152).

La pregunta con respecto a la Figura 1 fue: *¿Cuántos ángulos ves en las figuras a y b?* dirigido a un estudiante de 16 años, que en nuestro sistema educativo probablemente sería un estudiante de secundaria. La respuesta obtenida fue:

> Siempre que veo dos líneas que se cruzan, sé que el espacio entre las dos líneas forma un ángulo. Creo que en ambas figuras solo hay un ángulo, aunque al principio pensé que en la segunda figura había dos ángulos. Puedo explicar mi suposición. Primero, pensé que, en esta representación, la línea 1 y la línea 2 forman un ángulo, y la línea 2 y la línea 3 forman un segundo ángulo. Pero ahora creo que solo hay un ángulo formado por las líneas de cruce (1, 3) y esa línea 2 es la bisectriz de ese ángulo. (Mariotti, 1992, citado por Fischbein, 1993, p. 151).

Tenga en cuenta que, a partir de la respuesta del estudiante, el concepto no tenía control sobre la imagen, por lo que hubo confusión mental por parte del estudiante. Este último, incluso en posesión de la imagen, no pudo relacionar el concepto de ángulo con una respuesta correcta e inmediata. Esto se debe a que "la figura todavía tiene características de la Gestalt[1] inspirada en la práctica". (Fischbein, 1993, p. 152). Así, el concepto de ángulo no controla completamente la figura y su interpretación depende, en parte, de restricciones formales.

Según Costa (2020), la diferenciación existente entre el objeto geométrico (construcción mental) y su representación (objeto físico) tiene un papel destacado en el desarrollo del pensamiento geométrico. Alguien que lucha con esta distinción generalmente no ha alcanzado un nivel más avanzado de este tipo de razonamiento. "En esta dirección, el campo geométrico se considera una herramienta para comprender el mundo físico. Por tanto, la geometría no se ve como un modelo teórico para el estudio de objetos matemáticos en el mundo platónico" (Costa, 2020, p. 155).

Por lo tanto, de esta manera Fischbein (1993) la integración de propiedades conceptuales y figurativas en estructuras mentales unitarias, dado el predominio de restricciones conceptuales sobre figurativas, no consiste en un proceso natural o un efecto espontáneo de los cursos habituales de Geometría en la mente del estudiante. Por tanto, esta debe ser una preocupación continua y sistemática del docente.

Muchas veces, la enseñanza de la Geometría parte del uso de algoritmos y técnicas que privilegian la presentación de conceptos a través de definiciones formales, demostraciones y ejercicios que no proporcionan, en un principio, un desarrollo cognitivo del razonamiento geométrico del alumno. El uso recurrente de analogías y una inadecuada exploración de la intuición en la construcción del conocimiento, acompañada de varios ejemplos y contraejemplos hasta que existe una demostración formal y generalizada, es el formato de enseñanza de los conceptos fundamentales de esta asignatura / disciplina.

METODOLOGÍA

Para la realización de este trabajo se adoptó como metodología el estudio de caso, ya que, según Yin (2001), el estudio de caso es un método de investigación amplio sobre un tema específico, que permite un conocimiento más profundo del mismo y, por lo tanto, ofrece subsidios para futuras investigaciones sobre el mismo tema. Aún en el enfoque de Yin, el Estudio de Caso como herramienta de investigación científica se utiliza para comprender los procesos en la complejidad social en los que se manifiestan: ya sea en situaciones problemáticas, para analizar obstáculos, o en situaciones exitosas, para evaluar copias de modelos.

La investigación se elaboró a partir de estudios que involucraron los temas más recurrentes en la prueba de la Olimpiada de Matemáticas de las Escuelas Públicas de Brasil (OBMEP)[2]. Entre las temáticas seleccionadas, la temática "área de figuras planas" fue escogida por ser muy recurrente tanto en la 1ª como en la 2ª fase de esta Olimpiada, además de formar parte de la Geometría en la que los alumnos aún enfrentan dificultades de aprendizaje.

[1] La Gestalt es una doctrina de la psicología que, inspirada en la obra de Max Wertheimer, tiene como principio rector que el todo es mayor que la suma de sus partes. Es decir, se considera que un conjunto de información es más relevante que un extracto y la idea de totalidad debe entenderse para que las partes la perciban (Piaget, 1983).

[2] Para obtener más información sobre OBMEP, visite http://www.obmep.org.br/.

La encuesta se realizó en una reunión virtual a través de la plataforma Google Meet, debido al escenario de la pandemia COVID-19. El público objetivo de este trabajo fue un grupo de veinte estudiantes de segundo año de secundaria, con edades entre 16 y 17 años, de una escuela pública en el estado de Ceará, Brasil. Estos estudiantes forman parte de un grupo de estudio con clases preparatorias para el OBMEP y fueron invitados a participar en el experimento.

El encuentro tuvo una duración de dos horas / clase, donde se repasó el tema de área y perímetro de figuras planas y se enfatizó que muchos ejercicios sobre este tema requieren conocimiento de temas de geometría estudiados de manera preliminar, tales como relaciones métricas, propiedades de triángulos, similitud de figuras y el uso de mallas cuadriculadas, por ejemplo.

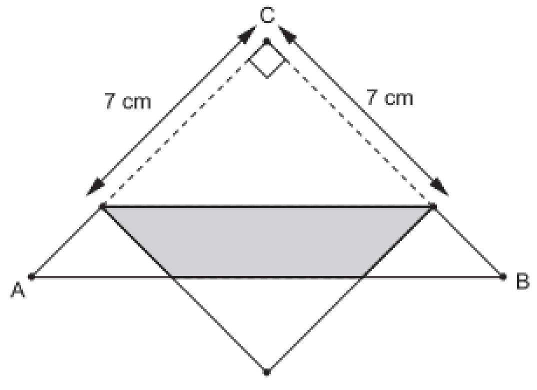
Se trabajaron algunas preguntas extraídas de pruebas OBMEP anteriores, donde se explora la resolución de situaciones problemáticas en geometría plana, buscando desarrollar el razonamiento geométrico del alumno. Sin embargo, entre las preguntas, solo se seleccionó una para componer el análisis de los resultados del estudio de caso de este trabajo, tanto por tratarse de un estudio inicial en el área de la Teoría de los Conceptos Figurativos por parte de los autores, como por la extensión que tendría el trabajo, si se analizan todas las cuestiones.

Dentro de la Teoría de los Conceptos Figurativos, se analizaron los datos (las respuestas de los estudiantes) a partir de sus manifestaciones (correctas o no) sobre la relación entre el concepto y la imagen relativa al tema estudiado, buscando verificar si el proceso de visualización, construcción y razonamiento utilizando el software GeoGebra permitió a los estudiantes teorizar las representaciones figurativas del objeto y el significado del concepto.

En el Cuadro 1 se muestra la pregunta que origina el análisis de los resultados de esta investigación:

(OBMEP 2013 - Nivel 3, Pregunta 4 - Segunda fase - adaptado)

La figura muestra un triángulo de papel ABC, rectángulo en C y cuyos lados miden 10 cm. Para cada número x tal que $0 \leq x \leq 10$, los puntos que están a x cm del punto C están marcados en los catetos y el triángulo se pliega a lo largo de la línea recta determinada por estos puntos. Indicamos con f(x) el área, en cm², de la región donde se produce la superposición del papel. Por ejemplo, en la figura del lado, el área de la región gris, en cm², es f (7).



Calcular *f(2), f(5)* y *f(7).*

Cuadro 1. Tema trabajado en el encuentro. Fuente: OBMEP (2013).

La resolución de la pregunta se estructuró a partir de una construcción en el *software* GeoGebra, en la que los estudiantes buscaron formas de resolverla a partir de la movilización del razonamiento geométrico a través de la visualización y manipulación dentro del entorno del *software*. Los estudiantes ya conocían el software de clases anteriores y algunas de sus herramientas, pero no lo suficiente para completar la construcción de manera oportuna. Además, el foco fue observar la manipulación de la construcción.

La recolección de datos para este trabajo se realizó a través de registro fotográfico de los estudiantes, registro fotográfico del docente, grabación de video del momento del encuentro y grabación de conversaciones vía chat en la plataforma Google Meet. Se utilizó un análisis cualitativo de los datos, según Kuckartz (2014), realizándose un análisis del discurso como forma de obtener una explicación, comprensión o interpretación de los fenómenos manifestados por el grupo participante y su relación con lo expuesto en el marco teórico de este trabajo. Para preservar la identidad de los estudiantes, sus nombres se han ocultado y reemplazado en el cuerpo del texto como Estudiante A, Estudiante B, etc.

En la siguiente sección, traemos como resultado las notas sobre las observaciones presentadas por los estudiantes, así como algunos extractos de la construcción realizada en GeoGebra, como registros que respaldaron la solución de los estudiantes.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Como resultado de esta investigación, analizamos las observaciones de los estudiantes sobre la pregunta presentada y su respectiva construcción en el *software* GeoGebra, con base en la Teoría de los Conceptos Figurativos. La construcción se proporcionó a los estudiantes como una forma de optimizar el tiempo de reunión. En la Figura 2, hay un registro de la reunión en la plataforma Google Meet.

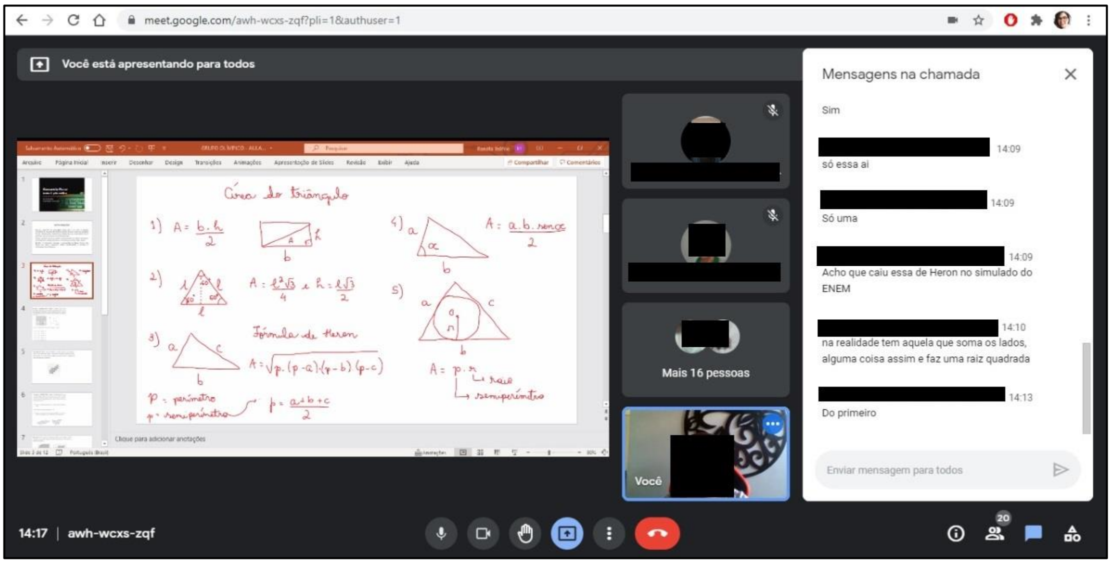


Figura 2. Registro de la reunión en la plataforma Google Meet. Fuente: Registro de autor.

Como se ilustra en la Figura 2, en un primer momento se realizó una revisión y, a partir de ésta, un relevamiento de los conocimientos previos de los estudiantes sobre el área y perímetro de figuras planas. Los apuntes realizados por el docente se originaron a partir de los recuerdos hablados por los alumnos sobre fórmulas matemáticas para el cálculo de áreas. En el caso de este registro, estas fueron las diferentes formas que los estudiantes reportaron haber visto en algún momento, como método para calcular el área de un triángulo.

Una observación es que la mayoría de los estudiantes memorizan muchas fórmulas y algoritmos matemáticos para resolver problemas y usan estos métodos en muchas preguntas, que de alguna manera pueden no estimular la comprensión de la geometría a partir de las percepciones visuales. Kaleff (2003) afirma que la capacidad de visualizar no es innata a todos los individuos. Así, encontramos individuos que visualizan y otros que no visualizan. Aquellos que tienen dificultad para visualizar la geometría prefieren recurrir a fórmulas.

En la pregunta dada, se pidió a los estudiantes que manipularan la construcción proporcionada en https://www.geogebra.org/m/t5mxxwya, haciendo preguntas como: ¿Qué le sucede a la figura al manipular punto P? ¿Qué características se pueden notar en la figura sombreada? ¿Qué sucede con el área gris al manipular punto P?

Los registros de manipulaciones del punto P se presentan en las Figuras 3, 4 y 5, como una forma de orientar mejor la comprensión de las respuestas presentadas por los estudiantes:

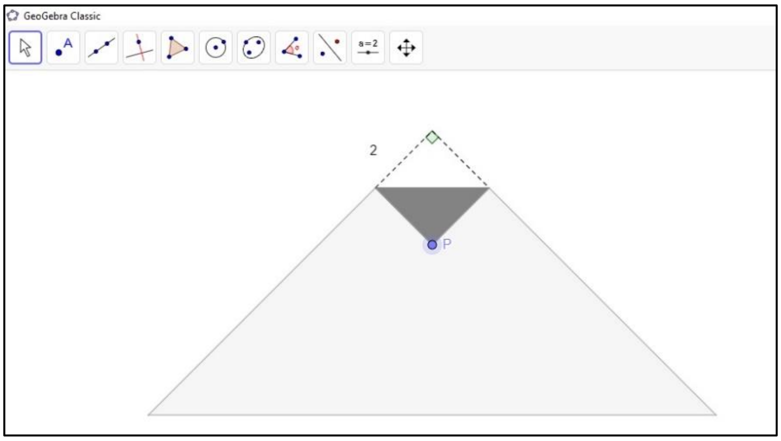


Figura 3. Manipulación desde el punto P a f(2). Fuente: Registro de autor.

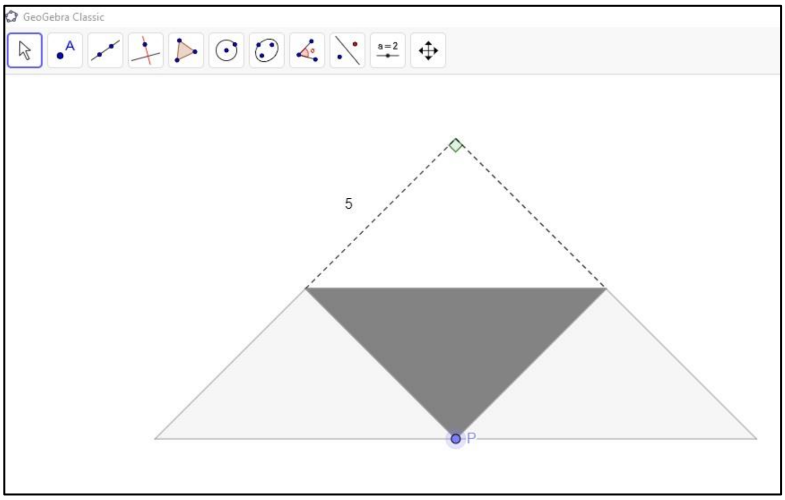


Figura 4. Manipulación desde el punto P a f(5). Fuente: Registro de autor.

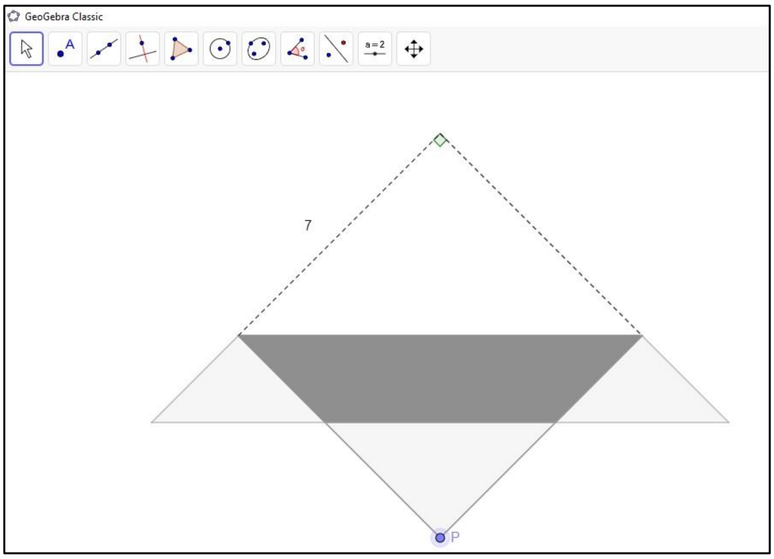


Figura 5. Manipulación desde el punto P a f(7). Fuente: Registro de autor.

A partir del movimiento del punto P, como se ilustra en la secuencia de movimientos de las Figuras 3, 4 y 5, algunas de las respuestas de los estudiantes a las preguntas formuladas por el profesor fueron transcritas de la grabación en video del encuentro en el fragmento:

> *"Sabemos que el triángulo blanco encima de la parte gris oscura es siempre isósceles, porque los dos lados son iguales" (Estudiante A).*
> *"Creo que cuando arrastramos el punto P, la zona gris siempre aumenta" (Estudiante B).*
> *"Cuando el punto P toca la base del triángulo más grande, la figura se divide en cuatro triángulos iguales" (Estudiante C).*

Nótese que el comentario del Estudiante A se basa en el concepto figurativo, a partir de una relación entre la definición de un triángulo isósceles, como un triángulo que tiene dos lados de la misma medida, que termina de alguna manera "confirmado" a partir de la imagen que visualiza al manipular punto P. Desde la perspectiva de Fischbein (1993), cuando se opera directamente con una figura geométrica, es común actuar como si no importara ninguna otra cualidad o restricción, teniendo en cuenta solo el atractivo visual que transmite la imagen. Esta línea de razonamiento también se puede observar en el discurso del Estudiante C, cuando afirma que el punto P, al llegar a la base del triángulo ABC, divide la figura en cuatro triángulos iguales. Esta fue una afirmación basada únicamente en lo que se muestra en la pantalla del estudiante, sin tener en cuenta una prueba matemática formal.

El Estudiante C fue más allá, señalando una característica de la construcción al afirmar que *"la base del triángulo gris oscuro es como la diagonal de un cuadrado"*. Señaló como observación que al arrastrar el punto P, como el triángulo formado siempre es isósceles, y los lados iguales forman un ángulo recto, entonces la línea correspondiente a la base del triángulo gris en cuestión representa la diagonal de un cuadrado. A partir del enunciado del alumno C, podemos ver lo que señalan Leivas y Cury (2010) sobre la visualización, considerándola como un proceso de formación de imágenes mentales, con el fin de construir y comunicar un determinado concepto matemático, con miras a ayudar en la resolución de problemas analíticos o geométricos.

Por otro lado, el Estudiante B, al señalar que el área gris siempre aumenta, fue cuestionado por otro colega (Estudiante D) quien, al arrastrar el punto P al límite máximo, mostró que el área de la figura "suma". Tenga en cuenta esta situación ilustrada en la Figura 6:

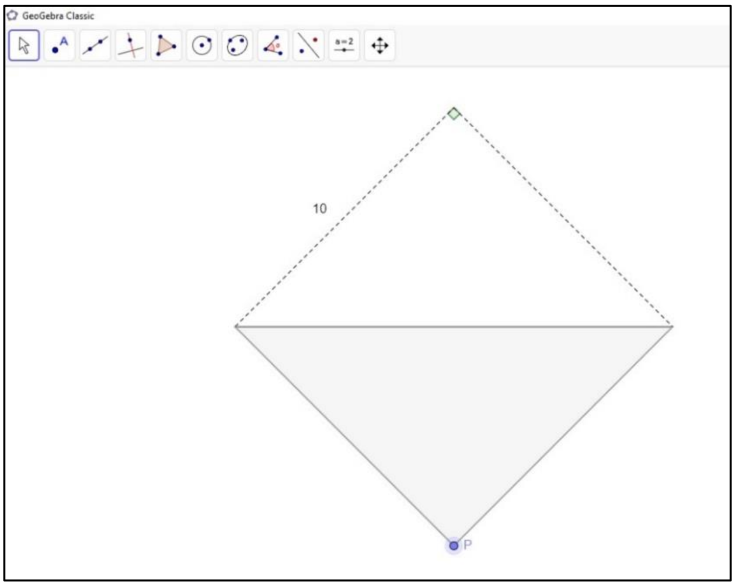


Figura 6. Notas del alumno D. Fuente: Registro de autor.

Al estudiante B se le deshizo su argumento, sin embargo, podemos ver, a partir de la situación presentada en la Figura 6, que el discurso del estudiante C tenía sentido. En realidad, la base del triángulo gris correspondía a la diagonal de un cuadrado. El error del Estudiante B puede justificarse según Fischbein (1993) por el hecho de que las imágenes están controladas por conceptos, pero no siempre es así. Hay situaciones en las que los conceptos no controlan las imágenes y son estas situaciones las que provocan malas interpretaciones en Geometría.

Otra observación respecto a las respuestas de los estudiantes es que las áreas *f(2)* y *f(5)* fueron resueltas esencialmente a partir de la visualización en GeoGebra, sin recurrir al uso de cálculos manuales. De la manipulación de la construcción y enunciados junto con sus compañeros, los estudiantes llegaron a la conclusión de que el área *f(2)* corresponde a la mitad del área de un cuadrado de lado 2, es decir, $f(2) = \frac{2^2}{2} = 2$. De manera similar, el área *f(5)* corresponde a la mitad del área de un cuadrado con lado 5, es decir, $f(5) = \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$.

Sin embargo, en el área *f(7)*, los estudiantes sintieron la necesidad de esbozar en papel y luego calcular su valor, buscando, a partir de la visualización de datos con la manipulación de la figura, armar un esquema que organizara las ideas, como se ilustran en las Figuras 7 y 8:

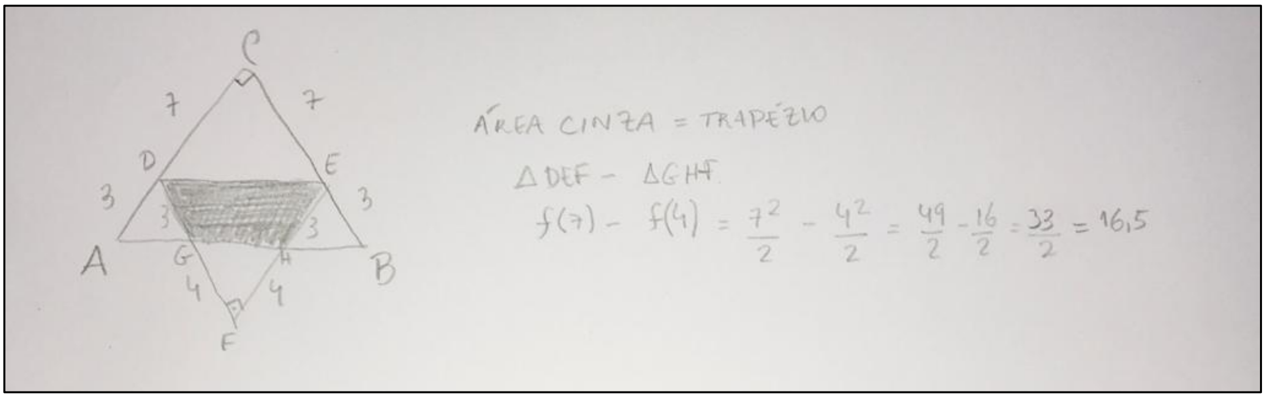


Figura 7. Cálculo manuscrito del Estudiante C. Fuente: Registro del Estudiante C.

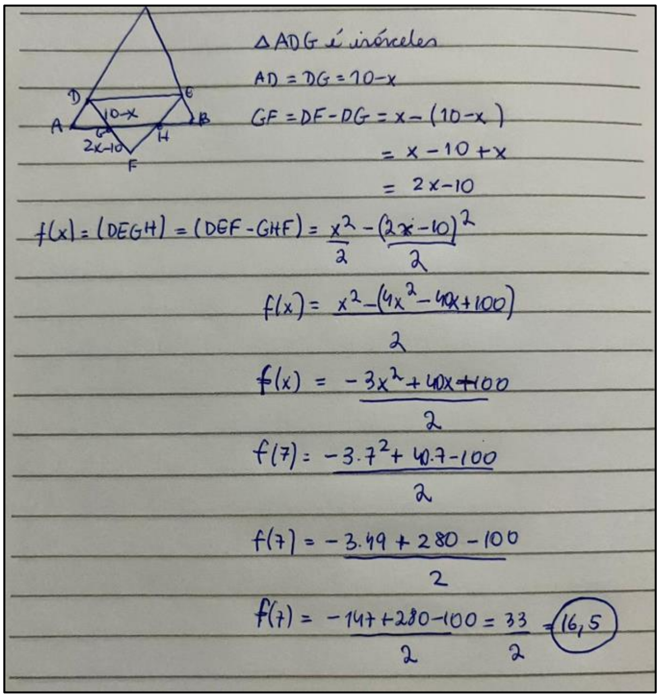


Figura 8. Cálculo manuscrito del Estudiante G. Fuente: Registro del Estudiante G.

Nótese la diferencia entre las respuestas de los estudiantes C y G en las Figuras 7 y 8. Aunque ambos dieron la respuesta correcta, el estudiante C la obtuvo con cálculos más simples, a través de la manipulación con GeoGebra y también de una manera más rápida. El estudiante G, por otro lado, usó más álgebra en la solución, tomó más tiempo y cometió algunos errores, como en la parte del producto notable $(2x - 10)^2$, en la que no vio el signo en el producto. Sin embargo, al enviar la foto de la respuesta, no envió con los errores, sino una versión corregida, luego de comparar su respuesta con colegas y notar el error. En el caso del alumno G, utiliza con más fuerza la parte conceptual y algebraica, que exige más atención.

Para resolver los ítems *a* y *b* de la pregunta, los estudiantes no presentaron grandes dificultades, sin embargo, la mayoría recurrió al uso de lápiz y papel para resolver el ítem *c*. Algunos no lo intentaron porque dijeron que no sabían cómo empezar y se sentían inseguros. La distancia física entre el profesor y el alumno en este momento fue un factor de dificultad, ya que el profesor tuvo dificultades para ayudar a los alumnos con menos habilidades geométricas por teléfono celular.

En este caso, ocurre lo que Fischbein (1993) señala como la necesidad de una demostración lógica y matemáticamente válida para llegar a una conclusión aceptable. Sin embargo, debe enfatizarse que toda prueba fue producto de la lógica del razonamiento geométrico, desarrollada específicamente a partir de este problema. El autor señala que:

> El matemático, como el físico, el biólogo, utiliza la observación, la experimentación, la inducción, las comparaciones, las generalizaciones, pero los objetos de su investigación son puramente mentales. Su laboratorio está, en principio, confinado a su mente. Sus pruebas nunca son de naturaleza empírica, solo lógicas. (Fischbein, 1993, p. 149).

Nótese que Fischbein (1993) es enfático al afirmar que la evidencia es de naturaleza lógica. Esto reafirma el concepto figurativo como realidad mental, a partir del razonamiento geométrico del alumno, es decir, la comprensión global de las tres entidades de categorías mentales necesarias para su desarrollo en el campo de la Geometría, que son la definición, la imagen y el concepto. en sí mismo figurativo. En línea con Fischbein (1993), los autores Jeannotte y Kieran (2017) afirman que, contrariamente a la prueba por mera justificación, la prueba formal trata de una teoría matemática construida a priori y con resultados formalizados, los llamados axiomas y teoremas. En otras palabras, la demostración formal genera resultados matemáticos a partir de demostraciones sistematizadas aceptadas por la comunidad científica.

Esta necesidad de pruebas formales y algebraicas, como lo demostró el estudiante G, es cultural en las clases de Matemáticas. Según Leivas y Cury (2010, p. 80):

> Nos parece que, efectivamente, existe una tendencia a asociar el Álgebra con la Geometría, tratando de obtener fórmulas que puedan justificar afirmaciones y no utilizando los niveles más elementales del pensamiento geométrico, especialmente visualización que, al permitir la formación de imágenes mentales, ayudaría a resolver problemas geométricos.

Según Alves (2019) se puede incentivar a los estudiantes a investigar y determinar propiedades extraídas de la geometría a partir de las configuraciones de la construcción realizada en GeoGebra. En el caso específico de resolver el área de *f(7)*, los estudiantes recurrieron al cálculo formal. Sin embargo, destacamos que se utilizaron valores numéricos y no variables *x*, *y*, *z* ..., como se muestran en la Figura 7, lo cual se debe a que los estudiantes percibieron estos valores a partir de la visualización y manipulación de la construcción dada en el entorno GeoGebra.

Prieto González (2016, citado por Iglesias y Ortiz, 2018) señala que, desde el punto de vista del aprendizaje, la integración de GeoGebra en las clases de Matemáticas ayuda al desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes, basado en la experimentación, visualización y reconocimiento de elementos matemáticos o geométricos, como consecuencia de la interacción del alumno con los objetos representados en su visión gráfica.

Por tanto, con esta actividad podemos ver que el GeoGebra puede potenciar la comprensión de la geometría – no solo la geometría plana, sino espacial, analítica, entre otras áreas de conocimiento –, a partir de las posibilidades de percepción geométrica, manipulación e interacción que ofrece el software como recurso, siendo la visualización la principal, explorada en este trabajo. El alumno, a partir de la visualización, puede realizar la investigación de propiedades geométricas y la formulación de ideas, desarrollando su razonamiento geométrico, tal como se presenta en el cuerpo de estos resultados.

CONSIDERACIONES FINALES

La Teoría de los Conceptos Figurativos señala una forma de entender la relación entre definición, imagen y el concepto figurativo en sí mismo dentro del campo de la geometría, en el que los conceptos y las imágenes se consideran dos categorías distintas de entidades mentales. En este estudio de caso, se buscó analizar, desde la perspectiva de esta teoría, la resolución de una pregunta de geometría plana, involucrando el software de geometría dinámica GeoGebra, tomando en cuenta la visualización como premisa para el desarrollo del razonamiento geométrico del estudiante.

A partir de los análisis realizados, identificamos que los procesos de aprendizaje se dan cuando el alumno es capaz de asignar sentidos y significados a su pensamiento y en la formación de conceptos, estableciendo relaciones que le permiten analizar, discutir, confirmar y refutar hipótesis, lo que se percibió con base en la teoría adoptada y en el uso del software, alcanzando el objetivo del trabajo.

Con la Teoría de los Conceptos Figurativos y su asociación con el software GeoGebra, fue posible tener una noción preliminar de cómo funciona el proceso de construcción del razonamiento geométrico de los estudiantes y sus dificultades. El dinamismo y la posibilidad de movimiento dentro del software tiene un gran potencial para ayudar en el desarrollo del razonamiento del alumno a través de la manipulación y visualización, siendo una forma de ayudar al alumno a conjeturar y comprender propiedades geométricas.

Los principales obstáculos de este estudio fueron las dificultades de algunos estudiantes para acceder a Internet y computadoras, la distancia social entre estudiantes y el docente, dificultades de visualización de algunos estudiantes y la escasez de referencias bibliográficas sobre la Teoría de Conceptos Figurativos. En cuanto al uso de GeoGebra, como los estudiantes solo manipularon la construcción terminada, no hubo mayores dificultades, solo casos ocasionales con estudiantes que accedieron a la construcción a través de su teléfono celular.

Según Fischbein (1993), los docentes conocen muchas implicaciones didácticas en base a su experiencia empírica en el aula, sin embargo, no existe una relación formal con una teoría general. Así, este trabajo puede colaborar con el docente, como docente, a la hora de analizar esta teoría, así como sus implicaciones didácticas, tiene la posibilidad de dirigir una mirada más reflexiva al campo de la Geometría y sus matices, así como mejorar el uso de GeoGebra en sus clases, o incluso otro *software* de geometría dinámica.

Finalmente, en una perspectiva futura, esperamos desarrollar más trabajos con esta teoría, ya que este es un estudio inicial, reforzando su importancia, abordando otros temas en geometría y desarrollando actividades en otros niveles escolares, recopilando datos y ampliando su discusión.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos el apoyo financiero otorgado por el Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico - CNPq para el desarrollo de esta investigación en Brasil.

REFERENCIAS

Alves, F. R. V. (2019). Visualizing the Olympic Didactic Situation (ODS): teaching mathematics with support of the GeoGebra software. *Acta Didactica Napocensia*, 12(2), 97-116. doi: 10.24193/adn.12.2.8.

Alves, F. R. V. y Borges Neto, H. (2012). Engenharia Didática para a exploração didática da tecnologia no ensino no caso da regra de L'Hôpital. *Educação Matemática Pesquisa*, 14(2), 337 – 367. Recuperado en 15 octubre, 2020, de: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/9445

Becker, M. (2009). *Uma alternativa para o ensino de Geometria: Visualização Geométrica e representações de sólidos no plano*. Dissertación de Maestria, Universidade Federal do Rio Grande do Sul: Porto Alegre.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 175-203). New York: Academic Press.

Costa, A. P. (2020). Pensamento Geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 9(18), 152-179. Recuperado en 01 mayo, 2021, de: http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/651

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162. Recuperado en 05 noviembre, 2020. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/3482943

Fonseca, M. C. F. R., Lopes, M. P., Barbosa, M. G. G., Gomes, M. L. M. y Dayrell, M. M. M. S. S. (2001). *O ensino de Geometria na Escola Fundamental: Três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais*. Belo Horizonte: Autêntica.

Gutiérrez, A. (1992). *Exploring the links between Van Hiele levels and 3-dimensional Geometry.* Departamento de Didática de las Matemáticas, Universidad de Valencia, Spain.

Hershkowitz, R. (1998). Reasoning in Geometry. In Hershkowitz, R., Duval, R., Bussi, M. G., Boero, P., Leher, R., Romberg, T., Berthelot, R., Sain, M. H., Salin, K. J. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Volume 5 of the series New ICMI Study Series (pp. 29-83).

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2018). Usos del software de geometría dinámica en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 1(2), 21-35. Recuperado en 01 julio, 2021, de https://www.uco.es/ucopress/ojs/index.php/mes/article/view/12834

Jeannotte, D. y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16. doi: 10.1007/s10649-017-9761-8

Kaleff, A. M. M. R. (2003). *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos*. Rio de Janeiro, Niterói: EdUFF.

King, J. y Schattschneider D. (2003). *Geometry turned on! Dynamic software in teaching, learning & research*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Text Analysis: A Guide to Methods, Practice and Using Software*. London: SAGE Publications.

Leivas, J. C. P. y Cury, H. N. (2010). Análise de Erros em Soluções de um Problema de Geometria: uma Investigação com Professores em Formação Continuada.

REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 5(1), 71-83. doi: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2010v5n1p71

Lorenzato, S. (1995). Por que ensinar geometria? *Educação Matemática em Revista*, SBEM, São Paulo, 3(4), 1-64.

Mariotti, A. (1992). Imagini e concetti in geometria. *L'Insegnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrata*, 15(9), 863-885.

Obmep. (2013). Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Prova da OBMEP 2013/Nível 3, 2013. Recuperado en 06 mayo, 2021 de http://www.obmep.org.br/provas.htm.

Pais, L. C. (1996). Intuição, experiência e teoria geométrica. *Revista Zetetiké*, 6. doi: https://doi.org/10.20396/zet.v4i6.8646739.

Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, 1(1). doi: https://doi.org/10.20396/zet.v1i1.8646822.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1993). *A Representação do Espaço na Criança*. Artes Médicas: Porto Alegre.

Prieto González, J. L. (2016). GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. *Revista Electrónica Conocimiento Libre y Licenciamiento* (CLIC), Nro 14, Año 7, 9-23.

Santiago, P. V. S., Alves, F. R. V. y Maia, B. M. P. (2021). Sobre a noção de Situação Didática Olímpica aplicada ao contexto das Olimpíadas Internacionais de Matemática. *Remat – Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, São Paulo, 18, 1-20. doi: https://doi.org/10.37001/remat25269062v18id533.

Van de Walle, J. (2009). *A Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Yin, R. K. (2001). *Estudo de Caso, planejamento e métodos*. São Paulo: Bookman.

Renata Teófilo de Sousa
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil
rtsnaty@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil
fregis@ifce.edu.br

Maria José Araújo Souza
Universidade Estadual Vale do Acaraú, Brasil
mazesobral@yahoo.com.br

Alsina, Á. y Delgado-Rebolledo, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad, 5*(1), 18-37.

ISSN: 2603-9982

¿QUÉ CONOCIMIENTOS NECESITA EL PROFESORADO DE EDUCACIÓN INFANTIL PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS?

Ángel Alsina, Universidad de Girona, España

Rosa Delgado-Rebolledo, Universidad de Concepción, Chile

Resumen

Se concretan los conocimientos para enseñar matemáticas en Educación Infantil a partir de la revisión de: a) las finalidades, las prácticas y la organización de la enseñanza; b) la literatura previa sobre el conocimiento del profesorado de infantil para enseñar matemáticas. Considerando estos antecedentes, se describen y ejemplifican dos tipos de conocimiento: Conocimiento Matemático en Educación Infantil y Conocimiento Didáctico de las Matemáticas en Educación Infantil, junto con sus respectivos subtipos. Se concluye que la concreción de estos conocimientos puede contribuir al desarrollo profesional del profesorado de infantil y, adicionalmente, pueden usarse como herramienta de análisis.

Palabras clave: conocimiento del profesorado; conocimiento para enseñar matemáticas; conocimiento didáctico de las matemáticas; práctica docente; Educación Infantil.

What knowledge do early childhood teachers need to teach mathematics?

Abstract

The knowledge for teaching mathematics in Early Childhood Education is specified on the basis of a review of: a) the aims, practices and organisation of teaching; b) previous literature on early childhood teachers' knowledge for teaching mathematics. Considering this background, two types of knowledge are described and exemplified: Mathematical Knowledge in Early Childhood Education and Didactic Knowledge of Mathematics in Early Childhood Education, together with their respective subtypes. It is concluded that the concreteness of this knowledge can contribute to the professional development of early childhood teachers and, additionally, can be used as a tool for analysis.

Keywords: *teacher knowledge; knowledge for teaching mathematics; didactic knowledge of mathematics; teaching practice; Early Childhood Education.*

Recibido: 27/01/2022; Aceptado: 24/02/2022

INTRODUCCIÓN

Desde los años noventa del siglo XX, la investigación educativa se ha interesado en el análisis del conocimiento que el profesorado manifiesta en sus prácticas de enseñanza, siendo una de las propuestas teóricas más relevantes la desarrollada por Shulman (1986). Desde entonces, el estudio del conocimiento del profesorado para enseñar matemáticas ha dado lugar a una prolífica actividad de investigación, de modo que han surgido distintos modelos de análisis. Entre ellos, destacan el *Knowledge Quartet* (KQ), que considera cuatro categorías que permiten observar, analizar y discutir acerca de situaciones de aula en las que el conocimiento del profesorado se pone en acción (Rowland et al., 2005); el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), que considera un conjunto de conocimientos y habilidades que requiere el profesorado para gestionar las tareas y los problemas recurrentes en la enseñanza de las matemáticas (Ball et al., 2008); el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) de Godino et al. (2017), para analizar, interpretar, caracterizar y categorizar los conocimientos que pone en juego el profesorado al enseñar un determinado contenido matemático; o el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), que asume que todo el conocimiento que es útil para el profesor en el contexto de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es especializado (Carrillo et al., 2018).

La mayoría de estudios desarrollados desde estos distintos modelos se han centrado en el profesorado de matemáticas de primaria y secundaria, mientras que las investigaciones sobre el conocimiento del profesorado de infantil son más bien escasas (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016). En este sentido, Alsina (2019a) señala que uno de los focos en los que se debería centrar la investigación en educación matemática infantil en las próximas décadas consiste, precisamente, en definir el conocimiento y destrezas útiles para enseñar matemáticas del profesorado de esta etapa, considerando que se trata de profesorado generalista.

En este artículo ponemos la atención en este tema de interés, identificando de manera fundamentada el conjunto de conocimientos que requiere el profesorado de Educación Infantil (EI, de ahora en adelante) para enseñar matemáticas, teniendo en cuenta las características específicas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en esta etapa y el conocimiento que el profesorado debería poner en juego en sus prácticas de enseñanza. La concreción de estos conocimientos pretende ser, principalmente, una herramienta de desarrollo profesional del profesorado de EI que describa los distintos conocimientos que se deben movilizar para llevar a cabo una enseñanza eficaz, con el propósito también de facilitar la identificación, el análisis y la reflexión de posibles falencias en la propia práctica que deberían ser subsanadas a través de la formación.

Para llevar a cabo este propósito, el artículo se estructura en tres partes: en la primera parte, se caracteriza la enseñanza de las matemáticas en EI en tres dimensiones (Alsina, 2020a); en la segunda parte, se realiza una revisión de la literatura previa acerca del conocimiento del profesorado de EI para enseñar matemáticas, teniendo en cuenta que las investigaciones que han tratado de identificar este conocimiento son escasas (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016); finalmente, en la tercera parte, considerando los puntos anteriores, se describen y ejemplifican los tipos de conocimiento que debería movilizar el profesorado de EI para llevar a cabo una enseñanza eficaz de las matemáticas en esta etapa educativa.

CARACTERÍSTICAS DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL

En el contexto internacional, se está realizando una importante labor de investigación en Educación Matemática Infantil en el grupo *Early Years Mathematics* (EYM) dentro del *Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME), donde se tratan cuestiones como el papel de los materiales, las diferentes formas de comunicación y representación matemática de los niños o las evidencias de aprendizaje sobre contenidos específicos (Edo, 2016). Asimismo, en las *POEM Conferences on Early Mathematics Learning* (Benz et al., 2018; Carlsen et al., 2020; Kortenkamp et al., 2014; Meaney et al., 2016) se aportan datos sobre la enseñanza y el aprendizaje de los procesos y contenidos matemáticos o la profesionalización de los docentes de la primera infancia, con una amplia variedad de enfoques teóricos y metodológicos que establecen bases para futuras investigaciones en esta área (Alsina, 2002b). A partir de estos resultados, junto con las aportaciones de organismos internacionales que han hecho recomendaciones sobre cómo se deberían trabajar las matemáticas en los primeros niveles escolares y las conclusiones de diversos estudios bibliométricos y metaanálisis, Alsina (2020a) caracteriza la enseñanza de las matemáticas en infantil a partir de tres dimensiones: las finalidades de la enseñanza, las prácticas de enseñanza y la organización del conocimiento a enseñar.

Finalidades de la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil

Concretar finalidades requiere posicionarse. En este sentido, en primer lugar, se asume que la educación matemática infantil tiene unos objetivos propios (Alsina, 2020a; NAEYC & NCTM, 2002; The Australian Association of Mathematics Teachers Inc. & Early Childhood Australia, 2006). Con esto se quiere remarcar que, a diferencia de lo que se ha venido pensando, la finalidad de la enseñanza de las matemáticas tempranas no es preparar al alumnado para la siguiente etapa educativa. En otras palabras, no se trata de una etapa pre-escolar en la que el profesorado forma al alumnado para que accedan a primaria sabiendo, por ejemplo, escribir números, recitando de memoria la serie numérica o indicando el nombre de las principales formas geométricas, por citar algunos estereotipos (Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014). Desde este punto de vista, el primer posicionamiento que se asume y que es acorde con los currículos de EI, es que la enseñanza de las matemáticas en infantil tiene el propósito de promover el desarrollo progresivo de los primeros conocimientos matemáticos, de naturaleza intuitiva, como parte del desarrollo integral de los niños.

El segundo posicionamiento tiene que ver con la forma de desarrollar el conocimiento matemático de los niños. En este sentido, se asumen los planteamientos del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), planteado por Alsina (2018, 2019b, 2020c). Este enfoque se fundamenta en tres pilares: a) la Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje Humano (Vygostsky, 1978), que concibe la educación como un fenómeno social y cultural que se basa en el lenguaje y en la interacción como herramientas fundamentales para promover el aprendizaje; b) el Modelo Realista de Formación del Profesorado (Korthagen, 2001), que considera que el profesorado debería conocer muchas maneras de actuar y ejercitarlas en la práctica, es decir, debería disponer de criterios para saber cuándo, qué y por qué algo es conveniente y reflexionar sobre ello sistemáticamente; y c) y la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991), que impulsa el uso de situaciones de la vida cotidiana o problemas contextualizados como punto de partida para aprender matemáticas. Progresivamente, estas situaciones son matematizadas a través de modelos, mediadores entre lo abstracto y lo concreto, para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.

Prácticas de enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil

La investigación acerca de las formas de facilitar el acceso al conocimiento matemático en las primeras edades ha sido muy productiva. Como señala Alsina (2020a), han surgido múltiples enfoques, que van desde "el modelo europeo al aire libre" hasta la enseñanza clásica con fichas, pasando por otros enfoques que se inspiran y fundamentan en autores clásicos como Bruner, Dienes, Montessori, Piaget, Skemp, Vygotsky, etc. Con base en estas distintas aportaciones, el desarrollo del pensamiento matemático infantil se debería sustentar en actividades concretas, experimentales y adecuadas a las capacidades mentales de los niños, para que observen, experimenten, reflexionen y obtengan conclusiones. Para lograr esta finalidad, el EIEM (2018, 2019a) propone itinerarios de enseñanza, entendiendo por itinerario una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres niveles: 1) informal, en el que se visualizan las ideas matemáticas de manera concreta a través de situaciones de vida cotidianas, materiales manipulativos y juegos; 2) intermedio, en el que se avanza hacia la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático a través de recursos literarios y tecnológicos; y 3) formal, en el que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales para completar de esta forma el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico, a través de recursos gráficos. El EIEM plantea entonces que es necesario fomentar la comprensión más que la mera memorización, la actividad heurística más que la pura ejercitación, o el pensamiento matemático crítico más que la simple repetición.

Más adelante, con el propósito de ofrecer algunas orientaciones para aplicar el EIEM en el aula, Alsina (2020c) plantea cinco recomendaciones: 1) planificar y gestionar la enseñanza de los contenidos a través de los procesos matemáticos, es decir, promover una enseñanza que implique pensar y hacer, más que memorizar definiciones y procedimientos; 2) promover prácticas de enseñanza-aprendizaje que consideren tanto al alumnado como al profesorado, en las que haya espacio tanto para que el alumnado indague y construya su conocimiento, como para que el profesorado explique de forma directa un conocimiento matemático; 3) considerar contextos reales, intermedios y formales, con distinto protagonismo en función del nivel escolar; 4) garantizar el principio de abstracción progresiva, desde lo concreto hacia lo abstracto, de manera que, a lo largo de un itinerario, se considere la visualización, la manipulación, la simbolización y la abstracción; y 5) disponer de criterios objetivos para la selección de los contextos de enseñanza de las matemáticas, a partir de distintas herramientas.

La organización del conocimiento matemático en Educación Infantil

Como se indica en Alsina (2020a), abordar de forma sintética el conjunto de conocimientos matemáticos que contribuyen a desarrollar el pensamiento matemático de los niños menores de 6 años es ampliamente complejo, puesto que son muchos los autores y organismos que desde hace décadas vienen realizando aportaciones que han contribuido a organizar la disciplina.

A nivel internacional, las aportaciones del NCTM (2003), Geist (2014) o Clements y Sarama (2015), han tenido amplia repercusión. El NCTM (2003), por ejemplo, ha explicitado los conocimientos matemáticos que deberían aprender los niños a partir de los 3 años. Esta asociación organiza los conocimientos en diez estándares, que son el reflejo de la cultura matemática que la sociedad necesita: 1) cinco estándares de contenidos (Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad), que describen explícitamente los contenidos que deberían aprender los niños; y 2) cinco estándares de procesos (Resolución de Problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representación), que ponen de relieve las formas de adquisición y uso de los contenidos. Además, Geist (2014) y Clements y Sarama (2015) han realizado una extensa labor de investigación que les ha permitido establecer qué conocimientos matemáticos van desarrollando los niños desde el nacimiento.

En el contexto español, a partir de un estudio longitudinal con más de 700 niños menores de 3 años, Alsina (2015) organiza las matemáticas intuitivas e informales que se aprenden y usan durante la primera infancia en el marco de situaciones de exploración del entorno, la manipulación y experimentación con materiales y el juego. A partir de estos datos, se establecen cuatro categorías de conocimientos vinculados a las cualidades sensoriales, las cantidades discretas y continuas, las posiciones y las formas y los atributos mesurables, con distintos contenidos en cada categoría.

Asimismo, a partir de los datos de diversos estudios (e.g., Alsina, 2006, 2015; Castro y Castro, 2016; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; Muñoz-Catalán y Carrillo, 2018; NCTM, 2003), Alsina (2020a) considera cinco categorías de conocimientos con distintos contenidos en cada categoría: Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad.

PANORAMA SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN INFANTIL PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS

A pesar de que, tal como se indicado, las investigaciones que han tratado de identificar el conocimiento del profesorado de infantil para enseñar matemáticas son escasas (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016), se han reportado algunos estudios sobre el tema. En el trabajo de Lee (2010), por ejemplo, se mide el Conocimiento Pedagógico del Contenido en Matemáticas (PCKM, por su acrónimo en inglés) encontrando que el profesorado de niños menores de 5 años con mayor formación académica y más de 10 años de experiencia obtiene mayores puntajes en PCKM. Considerando estos datos, el autor concluye que es necesario fortalecer tanto la formación inicial del futuro profesorado de infantil como la formación continua del profesorado en servicio sobre cómo enseñar matemáticas al alumnado de esta etapa.

McGray y Chen (2012) también estudian el PCKM del profesorado de infantil (niños entre 4 y 5 años). Las autoras encuentran que este conocimiento en particular requiere comprender los conceptos fundamentales de los contenidos matemáticos y el lenguaje relacionado con las matemáticas, lo cual se combina con la capacidad de observar de cerca cómo juegan y qué piensan los niños. Los resultados, además, sugieren que el profesorado de infantil necesita un tipo de conocimiento que les permita promover la construcción de conexiones iniciales entre conceptos y procedimientos, ya sea en situaciones de juego libre o de instrucción directa, para ayudar al alumnado a ver y comprender las matemáticas en el mundo que los rodea. En línea con las ideas anteriores, Opperman et al. (2016) muestran que el conocimiento del contenido matemático se refleja en el PCKM del profesorado de infantil (niños entre 3 y 6 años) respecto a la identificación de las matemáticas presentes en situaciones de juego.

Con base en estos estudios, Gasteiger et al. (2020) señalan que las mediciones del PCKM se han realizado desde una perspectiva cognitiva de este conocimiento (e.g., Lee, 2010) o desde una perspectiva situada del mismo (e.g., McCray y Chen, 2012). Con el propósito de combinar la ventaja de ambos enfoques, los investigadores proponen un nuevo instrumento para medir el PCKM del profesorado de infantil donde este constructo se conceptualiza considerando conocimientos implícitos del profesorado (Gasteiger y Benz, 2018). En el estudio se reflexiona sobre el *conocimiento de las habilidades matemáticas* de los niños y el *conocimiento de la adaptación de actividades de aprendizaje matemático* como componentes relevantes del conocimiento del profesorado de infantil.

Respecto a estudios que utilizan modelos de conocimiento del profesorado de matemáticas, Mosvold et al. (2011) analizan el conocimiento de una maestra de infantil (niños de 3 años) desde la perspectiva del MKT. Los investigadores identifican situaciones en las cuales la maestra muestra su conocimiento sobre el conteo, particularmente su PCK en cuanto al *conocimiento del contenido y los estudiantes*. Se identifica el conocimiento de la maestra de formas de conteo que utilizan los niños y tareas de enseñanza donde es necesario seleccionar representaciones apropiadas para los niños. Los autores reflexionan sobre los componentes del MKT y concluyen que algunos de ellos parecen ser aplicables al estudio del profesorado de infantil, mientras que otros podrían ser reformulados para responder mejor a las tareas de enseñanza que desarrolla el profesorado de infantil, las cuales difieren considerablemente de las realizadas por los profesores de secundaria.

Adicionalmente, Hundeland et al. (2017) utilizan el KQ con el fin de caracterizar las competencias y el conocimiento de una maestra de niños de 5 años en el contexto de una clase de geometría. En los *fundamentos*, se identifica un conocimiento explícito de los contenidos geométricos cuando la maestra usa tanto la terminología de las figuras geométricas como una variedad de figuras similares y congruentes. Además, la maestra propone una actividad lúdica buscando despertar el interés y la curiosidad del alumnado, lo que se relaciona con un conocimiento didáctico. En las *transformaciones*, se resalta la elección que hace la maestra de ejemplos para introducir nuevas figuras geométricas. En las *conexiones*, se identifica la relación que hace la maestra entre lados paralelos y lados opuestos de igual longitud. Finalmente, la *contingencia* se observa cuando la maestra respondió a las ideas del alumnado, introdujo más figuras geométricas a la actividad y se refirió a cómo clasificar figuras geométricas a pesar de que esto no había sido considerado en la planeación. De acuerdo con los resultados obtenidos, de manera general, el KQ es útil para el propósito de este estudio, a pesar de que algunos códigos del modelo podrían ser modificados para adecuarse mejor al conocimiento del profesorado de infantil.

Desde la perspectiva del modelo MTSK, Muñoz-Catalán et al. (2017), reflexionan sobre el conocimiento deseable del profesorado de infantil en relación con la resta. En el dominio del Conocimiento Matemático (MK), describen la riqueza de elementos asociados a la resta en el *conocimiento de los temas* respecto a propiedades de la resta en los números naturales, significados asociados a la resta, tipos de problemas de estructura aditiva, procedimientos que se pueden utilizar para restar, entre otros. Además, describen el *conocimiento de la estructura de la matemática* a partir de variadas conexiones entre estos elementos de conocimiento, como por ejemplo la relación entre la resta y la división (conexión de complejización) o la relación entre la resta en su perspectiva procedimental y la enumeración (conexión de simplificación). Sumando a lo anterior, en esta propuesta teórica, se considera que, al ser la etapa de infantil generadora de lenguaje, cobra relevancia el conocimiento del profesorado acerca de la precisión en el uso del lenguaje matemático y el papel de los símbolos, ambos componentes del *conocimiento de la práctica matemática*. En el caso del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) resalta el conocimiento de las fases que los niños siguen en su proceso de comprensión del número en el subdominio *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas*.

Posteriormente, Muñoz-Catalán et al. (2019) exploran el conocimiento especializado que sustenta las prácticas de enseñanza de contenidos aritméticos y geométricos en el caso de un maestro y una maestra de infantil. En dicho estudio se identifica el conocimiento de los profesores en los subdominios *conocimiento de los temas* y *conocimiento de la práctica matemática* en el dominio MK, así como el *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* y el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* en el PCK. En ambos maestros se identifica el conocimiento de sistemas de representación y la complementariedad entre ellos, además del conocimiento de la comparación como práctica matemática en este nivel. La comparación es utilizada como parte de una estrategia de enseñanza, lo cual busca promover el desarrollo del pensamiento flexible de los niños considerando su necesidad de partir de representaciones concretas. A su vez, el conocimiento de los sistemas de representación permite tomar decisiones sobre los recursos didácticos a utilizar en la enseñanza de cada tema.

UN PASO MÁS: CONCRETANDO EL CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN INFANTIL PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS

Siguiendo las ideas anteriores, para concretar el conocimiento del profesorado de infantil podríamos pensar en un dominio de conocimiento que tenga en cuenta los contenidos matemáticos que se enseñan en EI, lo cual es común en la mayoría de modelos de conocimiento. A lo anterior, añadiríamos un rasgo distintivo de esta etapa, los conocimientos intuitivos e informales que permitan hacer las conexiones que mencionan Mosvold et al. (2011), así como otras conexiones entre contenidos matemáticos. Lo anterior, a su vez, considera nuestro posicionamiento sobre las finalidades de la enseñanza de las matemáticas en EI, donde las primeras matemáticas que los niños aprenden y usan en el marco de sus experiencias informales son el eslabón imprescindible para el acceso a las matemáticas escolares (Baroody, 1987), de modo que la conexión más importante en los primeros aprendizajes matemáticos es la existente entre las matemáticas intuitivas, informales, que los niños han aprendido a través de sus experiencias, y las que están aprendiendo en la escuela (NCTM, 2003, p. 136). A su vez, organismos como el NCTM (2003) subrayan el papel de los procesos matemáticos para enseñar los distintos contenidos a partir de los 3 años, con el propósito de potenciar habilidades como la resolución de problemas, el razonamiento y la argumentación o bien formas de comunicar y representar planteamientos y resultados. Si bien el conocimiento acerca de los procesos matemáticos no es exclusivo del profesorado de EI, es fundamental considerarlo explícitamente a partir de esta etapa educativa.

Por otra parte, en cuanto a los conocimientos pertenecientes al PCK y PCKM, observamos que los estudios revisados se refieren a conocimientos sobre los juegos y otras actividades que podrían ser interesantes para los niños (Hundeland et al., 2017; McGray y Chen, 2012), el conocimiento de las habilidades matemáticas de los niños (Gasteiger et al., 2020) y el conocimiento de las fases que los niños siguen en su proceso de comprensión del número y su necesidad de partir de representaciones concretas (Muñoz-Catalán et al., 2017). Lo anterior se relaciona con un conocimiento sobre cómo aprenden matemáticas los niños, lo cual se complementa con los resultados que ha aportado la investigación educativa a lo largo de muchos años sobre este tema (e.g., Alsina, 2006; Mialaret, 1984).

En la literatura también se reportan datos relevantes sobre las formas específicas de enseñar matemáticas en EI (e.g., Alsina, 2006; Berdonneau, 2008), lo que hace pensar en la necesidad de definir un conocimiento que se refiera a cómo se enseñan las matemáticas en esta etapa. Si bien un elemento común en los distintos modelos de conocimiento es incluir un componente asociado a la enseñanza, este debería concretarse de acuerdo con las características y necesidades específicas de los niños de Educación Infantil, que son diferentes a las de otros niveles superiores. En este sentido, el EIEM aglutina las distintas formas de enseñar teniendo en cuenta las necesidades reales de los niños de Educación Infantil para aprender matemáticas, otorgando protagonismo a lo concreto y avanzando progresivamente hacia lo abstracto, en contraste con lo que ocurre en otras etapas educativas (Alsina, 2018; 2019b; 2020c). Además, para completar el conjunto de conocimientos del profesorado, es imprescindible considerar también al conocimiento del currículum, en sintonía con los modelos de conocimiento que se han enfocado más en otras etapas educativas. En este sentido, el profesorado de infantil, que como se ha indicado es generalista, debería poseer un conocimiento tanto de la estructura como del contenido del currículo de infantil que, a diferencia del resto de etapas, se organiza en tres áreas (Conocimiento de sí mismo y autonomía personal; Conocimiento del entorno; y Lenguajes: Comunicación y representación), y los contenidos referentes a las matemáticas están integrados dentro de estas áreas.

Con base en estos antecedentes, se concreta el conjunto de conocimientos para enseñar matemáticas en Educación Infantil, con la finalidad de ayudar al profesorado tanto a reconocer cuáles son estos conocimientos como a identificar posibles falencias en el mismo que deberían ser subsanadas para poder ofrecer una enseñanza eficaz. En este artículo, se asume que una enseñanza eficaz de las matemáticas "requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien" (NCTM, 2003). Ello implica, por parte del profesorado: a) conocer y comprender en profundidad los conocimientos matemáticos que enseñan; b) conocer y comprender en profundidad a los alumnos y, en especial, sus necesidades y posibilidades de aprendizaje; c) conocer y comprender en profundidad los recursos y estrategias docentes más adecuadas para llevar a cabo la enseñanza; d) conocer y comprender en profundidad las formas de evaluar los conocimientos más acordes con los recursos y estrategias docentes usadas para llevar a cabo la enseñanza (NCTM, 2003). En síntesis, pues, para una enseñanza eficaz es preciso que el profesorado disponga de un amplio abanico de conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales que permitan alfabetizar a los alumnos, en el sentido que puedan usar los conocimientos que aprenden en la escuela en todos los contextos de la vida cotidiana en los que dichos conocimientos son necesarios.

Así, y en sintonía con los principales modelos de conocimiento del profesorado para enseñar matemáticas, para el profesorado de infantil inicialmente se consideran dos tipos de conocimientos interrelacionados: 1) Conocimiento Matemático en Educación Infantil (CM-EI); y 2) Conocimiento Didáctico de las Matemáticas en Educación Infantil (CDM-EI). Cada tipo está compuesto, a su vez, por subtipos de conocimiento, como se muestra en la Figura 1.

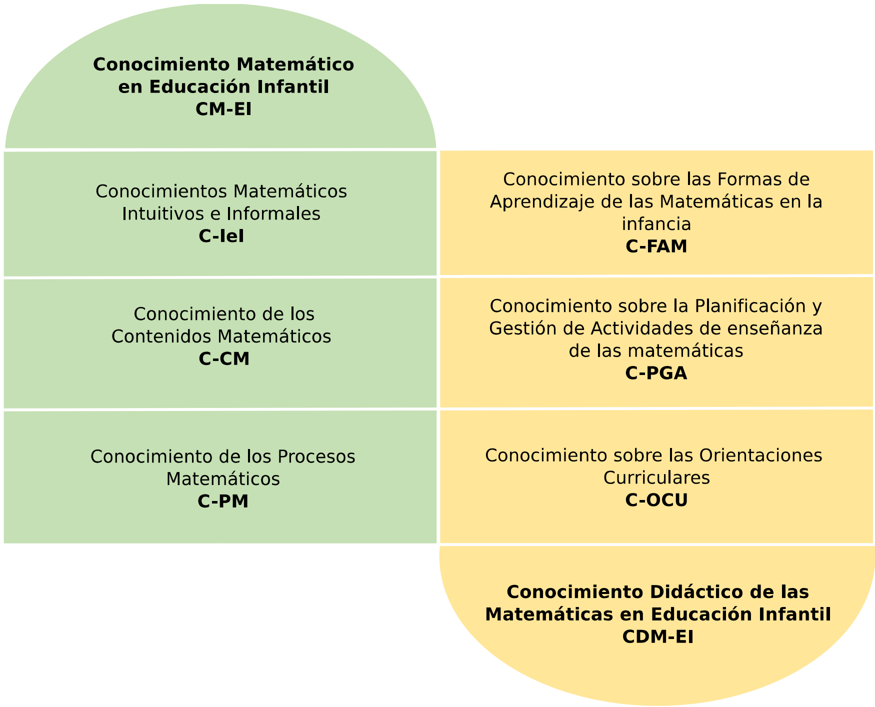


Figura 1. Tipos de Conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil. Fuente: elaboración propia.

El Conocimiento Matemático en Educación Infantil

El reconocimiento de que el profesorado de infantil requiere un conocimiento matemático específico y estructurado que les permita promover el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas de los niños nos lleva a describir un tipo de Conocimiento Matemático en Educación Infantil (CM-EI) que dé cuenta de la naturaleza del conocimiento matemático infantil. Este tipo de conocimiento está formado por tres subtipos que engloban los conocimientos intuitivos e informales, los contenidos matemáticos que deberían aprender los niños y los procesos matemáticos, que ponen de relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos.

Conocimientos matemáticos Intuitivos e Informales (C-IeI)

El acceso a las matemáticas escolares requiere una base sólida de conocimientos matemáticos intuitivos e informales: los conocimientos matemáticos intuitivos se refieren a un tipo de conocimiento autoevidente, basado en la certeza intrínseca, más global, metafórico, no analítico (Fischbein, 1987). Adicionalmente, los conocimientos matemáticos informales tratan sobre las nociones y procesos aprendidos en la dinámica diaria no escolar, los cuales se desarrollan a partir de las interacciones con el medio físico y social, donde se presentan escenarios como los juegos que generan aprendizajes de una manera natural y espontánea (Alsina, 2015; Baroody, 1987; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; Ginsburg y Baroody, 2007). Estos conocimientos informales son el eslabón necesario para el acceso a la matemática formal, que se refiere a las habilidades y conceptos que se aprenden en las escuelas, y suele caracterizarse por una matemática más simbólica y escrita (Baroody, 2000). De acuerdo con Ginsburg et al. (1998), estas formas de aprendizaje se relacionan entre sí para ir dando un sentido al desarrollo de los conocimientos matemáticos.

Desde este punto de vista, es altamente recomendable que el profesorado de infantil tenga un amplio conocimiento de las matemáticas intuitivas e informales que los niños de la primera infancia usan en situaciones de exploración del entorno, manipulación y juego, además del papel que éstas juegan en su desarrollo. Siguiendo la categorización desarrollada por Alsina (2015), el conocimiento del profesorado de infantil de las cualidades sensoriales, las cantidades discretas y continuas, las posiciones y las formas y los atributos mesurables forman parte del C-IeI.

A continuación, se muestran ejemplos de situaciones de manipulación en las que se pone de manifiesto este conocimiento (Figura 2): durante el recreo, un alumno juega con las palas siguiendo un patrón de repetición AB según el color: una roja, una azul, …; otro alumno, juega con piedras y las ordena por el tamaño, de mayor a menor. En estas dos situaciones, el C-IeI permite que el maestro se dé cuenta, en primer lugar, de que en estas acciones espontáneas de los niños emergen conocimientos matemáticos vinculados a las relaciones de orden y a los patrones; en segundo lugar, a través del diálogo, el maestro indaga en la intencionalidad de los alumnos para observar si realmente hay consciencia del patrón y de la relación de orden respectivamente y, finalmente, también promueve que haya una comprensión e interiorización de la idea matemática implícita en la acción a través del planteamiento de preguntas.

Figura 2. Situaciones de manipulación en las que emergen matemáticas informales. Fuente: Alsina (2015)

Conocimiento de los contenidos matemáticos (C-CM)

El profesorado de Educación Infantil debe tener un conocimiento de las matemáticas que puede movilizar un niño de esta etapa en los distintos niveles, asumiendo que debería conocerlas de una manera profunda y diferente a como debe saberlo un alumno. En otras palabras, el hecho de que un alumno de infantil haga una relación de orden, como se muestra en la segunda imagen de la Figura 2, no significa que el maestro sólo deba saber ordenar elementos o que en las ordenaciones siempre hay un mínimo, un máximo y una gradación, sino que es imprescindible que conozca las propiedades matemáticas de una relación de orden: antireflexiva, antisimétrica y transitiva (Alsina, 2006).

Tal como se ha indicado en la revisión de la literatura sobre la organización del conocimiento matemático en infantil, a partir de una síntesis de las aportaciones de diversos autores y organismos internacionales (e.g., Alsina, 2006, 2015; Castro y Castro, 2016; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; Muñoz-Catalán y Carrillo, 2018; NCTM, 2003), Alsina (2020a) señala cinco categorías de contenidos matemáticos propios de la etapa de Educación Infantil: Números y operaciones, Álgebra Temprana, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad, y describe el conocimiento matemático que el profesorado de infantil debería conocer acerca de estos contenidos. Adicionalmente, incluimos también dentro del C-CM el conocimiento de relaciones entre temas matemáticos ubicados en el mismo bloque de contenidos, así como relaciones entre temas pertenecientes a diferentes bloques de contenidos.

En el siguiente episodio, tomado de Alsina y Delgado (2021), se transcribe una situación de medición de la temperatura del agua de dos vasos (uno con agua de nevera y otro con agua de lluvia), en la que la maestra (Sara) hace uso de este conocimiento:

Sara: ¿Ya mediste alguno?
E2: Si
Sara: muy bien, me dices entonces lo que registrasteis
E2: Si profe, el de la nevera 1 y 0, el de la lluvia un 2
Sara: ¿Sí?, ¿estáis seguros?
E3: Si 1 y 0 es 10 el frío, y el 2 templado
Sara: 10 ¿es más o menos que 2?
E3: Másssssssssss
Sara: ¿Y entonces?, ¿cómo es [templado] un número más pequeño?

Este episodio continúa cuando el grupo que decide repetir la medición, obtiene como resultado 20 grados y concluye que el registro anterior era errado pues el 20 es más grande que el 10. Cuando Sara nota que los alumnos no han registrado correctamente la temperatura del agua de lluvia, los conduce hacía la comparación numérica para darle otro sentido a la situación, de este modo la maestra promueve la construcción de conocimiento matemático respecto a la relación “mayor que” y “menor que”. El conocimiento de Sara sobre la comparación como un contenido matemático en Educación Infantil forma parte del C-CM.

Conocimiento de los procesos matemáticos (C-PM)

Como ha puesto de manifiesto la revisión de la literatura acerca del conocimiento matemático infantil, junto con el conocimiento de los contenidos existe un conocimiento de los procesos matemáticos (habilidades o dimensiones) que ponen de relieve las formas de adquisición y uso de los contenidos. Algunos de estos procesos matemáticos son resolver problemas, modelizar, razonar, argumentar, comunicar, y representar. En esta línea, el conocimiento del profesorado de infantil acerca de qué cuenta como un problema en este nivel; qué estrategias y heurísticas se pueden utilizar para resolver un problema; cómo, porqué y para qué se argumenta en EI; o cómo se utilizan los símbolos y el lenguaje para comunicar ideas matemáticas son elementos que forman parte del subdominio de C-PM.

A modo de ejemplo, presentamos una situación tomada de Cornejo-Morales et al. (2021) en la cual se transcribe un episodio en el que una maestra de EI (P) trata de introducir el número 0, y se pone de manifiesto su conocimiento acerca de la argumentación en el aula de matemáticas de EI. Además de P, en dicho episodio intervienen, principalmente, dos alumnas (E1 y E2):

P: ¿Dónde está el cero aquí en la sala? (se acerca a la cinta)
E1: En los números.
E2: Ahí (indica con el índice la cinta)
P: ¿Aquí? (indica la cinta)
E2: Sí.
P: Muy bien E2.
P: El cero, en su cuadrito, ¿tiene algo? (se refiere al cuadro bajo el número)
Es: (no hay respuesta)
E1: Sí.
Es: Sí.
No. (variadas respuestas)
P: El número cero, ¿tiene algo en los cuadritos?

Es: No (a coro)
P: ¿Y el número 1? ¿en los cuadritos tiene algo?
Es: Sí (a coro)
P: ¿Qué tiene?
E1: Un círculo.
P: Un círculo, ¿y el cero tiene algo?
Es: No (a coro)
E1: Nada.
P: Nada, ¿por qué tendrá nada?
E1: Porque se cuenta a partir del uno.
P: El cero, ¿qué representaría?
Es: (no hay respuesta)
P: Nada, porque no hay nada. Ahora vamos a ver un vídeo…

Partiendo del modelo de la Situación Argumentativa (SA), que considera cinco elementos: 1) argumento (¿qué se argumenta? y ¿por qué?); 2) interacción (¿quiénes argumentan?); 3) función (¿para qué se argumenta?); 4) carácter (¿cómo se argumenta?); y 5) matemática (¿sobre qué se argumenta?), los autores del estudio ponen de manifiesto que, para hacer emerger conocimientos acerca del conteo, el antecesor de un número o de la relación número-cantidad, la maestra moviliza diversos conocimientos acerca de la argumentación en matemáticas en EI que se ilustran en la Figura 3:

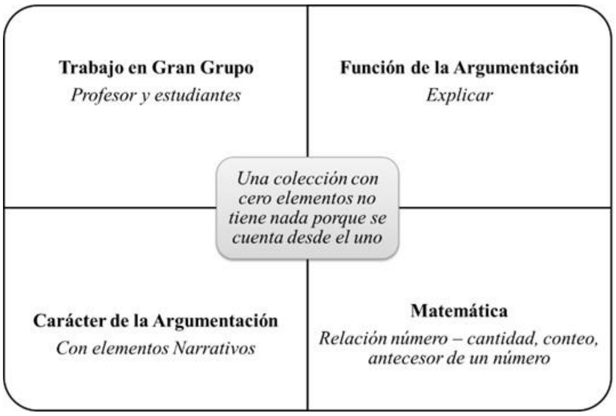


Figura 3. Componentes de la SA. Fuente: Cornejo-Morales et al. (2021)

De forma muy sintética, en el centro de la figura se muestra el argumento y en los cuatro cuadrantes los conocimientos de la maestra alrededor de la argumentación, especialmente la función y el carácter.

1.1. El Conocimiento Didáctico de las Matemáticas en Educación Infantil

Todos los modelos de conocimiento del profesorado de matemáticas describen, de una forma u otra, el conjunto de conocimientos psicopedagógicos y didácticos sobre cómo se aprenden y cómo se enseñan las matemáticas (Ball et al., 2008; Carrillo et al.; 2018; Godino et al., 2017; Rowland et al., 2005). En nuestro caso, especificamos estos conocimientos para el caso concreto de EI, ya que existen rasgos distintivos de la enseñanza y el aprendizaje en esta etapa. Desde este prisma, se consideran tres subtipos de conocimientos que abordan cuestiones que deberían formar parte del profesorado de infantil para enseñar matemáticas respondiendo a cómo se adquiere el conocimiento matemático en infantil y cómo se enseña.

Conocimiento sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la infancia (C-FAM)

Tal como indican los antecedentes descritos en las secciones anteriores, los niños de EI empiezan a desarrollar su pensamiento matemático a partir de la visualización de las ideas matemáticas de manera concreta, las situaciones reales y el uso de manipulativos, principalmente. En la Figura 4, por ejemplo, vemos como mediante la manipulación de objetos, los niños de la Escuela Infantil empiezan a clasificar elementos por un criterio de color o bien comparan la altura de diversos montones de cápsulas de café:

Figura 4. Aprendizaje a través de la manipulación de objetos. Fuente: Alsina (2015)

Luego, diversos autores señalan que los niños son capaces de empezar a representar mentalmente el conocimiento y avanzar hacia la esquematización y formalización, usando otros recursos que promueven este desarrollo. En la Figura 5, por ejemplo, se observa cómo unos niños de infantil han interiorizado un patrón y programan un robot para que lo ejecute y pare en cada una de las flores:

Figura 5. Ejecución de un patrón representando mentalmente a través de un robot. Fuente: Alsina y Acosta (2018)

El conocimiento de esta forma general de aprendizaje matemático en la infancia y otras formas en que los niños menores de 6 años se enfrentan al aprendizaje de contenidos matemáticos particulares se incluyen en el C-FAM.

Conocimiento sobre la planificación y gestión de actividades de enseñanza de las matemáticas (C-PGA)

Este subtipo de conocimiento aglutina dos características esenciales de las prácticas de enseñanza: por un lado, los conocimientos sobre el diseño de itinerarios o secuencias de enseñanza a través de diversos recursos para promover el desarrollo del pensamiento matemático en EI y, por otro, qué acciones lleva a cabo el profesorado en el aula para fomentar dicho desarrollo, lo cual tiene que ver con la planificación y gestión respectivamente.

Respecto a la planificación de itinerarios de enseñanza, se consideran los niveles del EIEM y los recursos didácticos y las estrategias docentes incluidos en cada nivel (Figura 6):

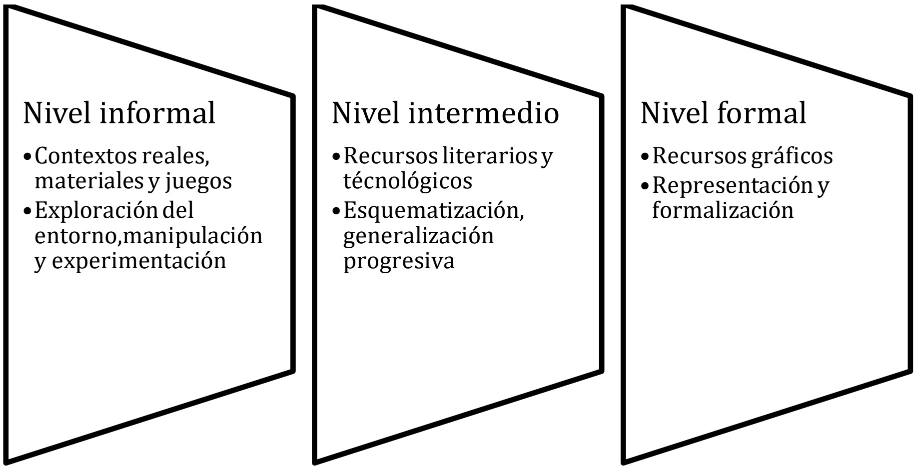


Figura 6. Niveles del EIEM. Fuente: Alsina (2018; 2019b)

Para la gestión, se considera la enseñanza de las matemáticas a través de los procesos, es decir, una enseñanza basada en prácticas productivas (Alsina, 2020d): pensar, argumentar, comunicar, conectar y representar. En la Figura 7 se muestran algunas orientaciones clave en este sentido:

Resolución de problemas	Razonamiento y prueba/ Argumentación	Comunicación	Conexiones	Representación
¿Qué situación problemática/reto voy a plantear a los alumnos? ¿Cuál es la incógnita/cuáles son los datos? ¿Conoces algún problema vinculado con éste? ¿Qué pasos vas a seguir? …/…	¿Qué buenas preguntas voy a plantear para que los alumnos argumenten sus ideas matemáticas y sus acciones?	¿Cómo voy a fomentar la interacción? (en parejas, en pequeño grupo, etc.) ¿Qué vocabulario específico deben aprender?	¿Con qué bloques de contenidos matemáticos se puede relacionar la actividad? ¿Desde qué disciplina voy a plantear el reto?	¿Qué tipo de representación deben hacer? Verbal, gráfica, simbólica ...

Figura 7. Acciones del profesorado para promover una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. Fuente: Alsina (2020d)

Conocimiento sobre las orientaciones curriculares (C-OCU)

Los conocimientos acerca del currículo, tanto en lo que respecta a las bases psicopedagógicas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, la organización de la EI por áreas en lugar de asignaturas y la evaluación (inicial y formativa, principalmente) como elemento indisociable del proceso de enseñanza-aprendizaje, hacen parte del C-OCU.

Desde esta perspectiva, la principal diferencia respecto a las otras etapas radica en el hecho de que en el currículo de EI las matemáticas no tienen una sección específica, sino que forman parte de áreas más globales como el conocimiento de sí mismo y autonomía, del entorno o bien el lenguaje como herramienta de comunicación y representación. En este sentido, el profesorado debe conocer las matemáticas que forman parte de cada una de estas áreas. En el caso español, por ejemplo, (Alsina, 2013) ha realizado un análisis en esta dirección. A modo de ejemplo, en la Figura 8 se muestra la relación de contenidos del currículo español vigente referentes a los Números y Operaciones.

Área 1. Conocimiento de sí mismo y autonomía personal	- Exploración y reconocimiento del propio cuerpo. Identificación, valoración y aceptación progresiva de las características propias.
Área 2. Conocimiento del entorno	- Cuantificación no numérica de colecciones (muchos, pocos). Comparación cuantitativa entre colecciones de objetos. Relaciones de igualdad y de desigualdad (igual que, más que, menos que). - Estimación cuantitativa exacta de colecciones y uso de números cardinales referidos a cantidades manejables. - Utilización oral de la serie numérica para contar. - Observación y toma de conciencia del valor funcional de los números y de su utilidad en la vida cotidiana.
Área 3. Lenguajes: comunicación y representación	- Diferenciación entre las formas escritas y otras formas de expresión gráfica. - Iniciación en el uso de la escritura para cumplir finalidades reales. Interés y disposición para comunicarse por escrito y por el uso de algunas convenciones del sistema de la lengua escrita como linealidad, orientación y organización del espacio, y gusto por producir mensajes con trazos cada vez más precisos y legibles.

Figura 8. Contenidos de Números y Operaciones para el 2º ciclo de Educación Infantil. Fuente: Orden ECI/3960/2007

De forma sintética, se observa una visión del aprendizaje de los contenidos de numeración que tiene en cuenta las necesidades de los niños de las primeras edades para aprender: observar los números del entorno y comprender su utilidad; realizar acciones con cantidades para favorecer su comprensión e interiorización; etc. En el documento también se hace hincapié en la representación de las cantidades, aunque se obvian algunas fases imprescindibles. Además, se omiten las operaciones aritméticas elementales de suma y resta.

En síntesis, pues, el C-OCU considera el conocimiento de los estándares de contenidos matemáticos que deberían aprender los niños desde las distintas áreas que propone el currículo desde una perspectiva crítica, teniendo en cuenta lo propuesto por otros autores y organismos nacionales e internacionales.

CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se han descrito los principales conocimientos para enseñar Matemáticas en Educación Infantil. La identificación de estos conocimientos surge como respuesta a la necesidad de disponer de una herramienta funcional que contribuya al desarrollo profesional del profesorado permitiendo investigar la práctica y, a su vez, mejorarla.

Por un lado, los estudios sobre las características de la enseñanza de las matemáticas en infantil han mostrado el escenario específico de esta etapa escolar a partir de las dimensiones planteadas por Alsina (2020a): las finalidades de la enseñanza, haciendo especial hincapié en el papel de las matemáticas intuitivas e informales en la primera infancia como eslabón imprescindible para el acceso a las matemáticas más formales; las prácticas de enseñanza en el contexto del EIEM; y, finalmente, la organización de la enseñanza de los contenidos de Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad.

Por otro lado, a partir de las escasas investigaciones sobre el conocimiento del profesorado de infantil para enseñar matemáticas que se han realizado haciendo uso modelos de conocimiento, se ha evidenciado que el conocimiento del contenido matemático y los conocimientos sobre cómo enseñar matemáticas en este nivel y la forma en que aprenden los niños se presentan como aspectos relevantes del conocimiento del profesorado de infantil.

Con base en estos datos, se han descrito los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas de forma eficaz en EI, organizados en dos grandes tipos: 1) Conocimiento Matemático en Educación Infantil (CM-EI); y 2) Conocimiento Didáctico de las Matemáticas en Educación Infantil (CDM-EI). El CM-EI, como se ha indicado, se refiere al conocimiento de las matemáticas específico y estructurado que necesita el profesorado de infantil para promover el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas de los niños, e incluye tres subtipos: Conocimientos matemáticos intuitivos e informales (C-IeI); Conocimiento de los contenidos matemáticos (C-CM) y Conocimiento de los procesos matemáticos (C-PM). Por su parte, el CDM-EI contiene los conocimientos psicopedagógicos y didácticos sobre cómo aprenden los niños y cómo se enseñan las matemáticas en infantil, y considera tres subtipos: Conocimiento sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la infancia (C-FAM); Conocimiento sobre la planificación y gestión de actividades de enseñanza de las matemáticas (C-PGA); y Conocimiento sobre las orientaciones curriculares (C-OCU).

Aunque se han presentado los conocimientos organizados en tipos y subtipos, estos elementos no están aislados, por lo cual el conocimiento que requiere el profesorado de infantil para enseñar matemáticas es un conocimiento con un carácter dinámico cuyos componentes se nutren entre sí. Además, este conocimiento se desarrolla tanto en contextos de formación como en la práctica de aula del profesorado. En línea con lo anterior, conocer los distintos tipos de conocimientos puede ser una herramienta instruccional que oriente al profesorado de EI acerca del conjunto de conocimientos que deben poner en práctica para enseñar matemáticas a niños menores de 6 años y, adicionalmente, puede ser una herramienta de análisis al servicio de la investigación en Educación Matemática Infantil. De este modo, en el futuro será necesario realizar nuevas investigaciones que permitan validar empíricamente estos tipos de conocimientos descritos, mejorar y/o refinar su descripción, utilizarlo en contextos de formación inicial y continua del profesorado y promover su difusión en el profesorado y futuro profesorado de esta etapa educativa. En esta línea, proponemos una formación en la cual el profesorado de infantil conozca diferentes formas de actuar y disponga de criterios para el diseño y la implementación de actividades y tareas de enseñanza, esto es, saber cuándo, qué y por qué algo es conveniente de ser utilizado para la enseñanza de las matemáticas. Desde esta postura, el profesorado es el responsable de tomar decisiones acertadas durante la práctica docente, por ejemplo, cuándo es necesario introducir un conocimiento matemático y cuándo es imprescindible que el alumnado indague y construya su conocimiento, antes de que este sea expuesto por el profesor (Korthagen, 2001).

REFERENCIAS

Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Editorial Octaedro-Eumo.

Alsina, Á. (2013). Early Childhood Mathematics Education: Research, Curriculum, and Educational Practice. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 100-153.

Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. Elementos para empezar bien.* Narcea, S.A. de Ediciones.

Alsina, Á. (2018). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio. Itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros, 376*, 13-20.

Alsina, Á. (2019a). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 100,* 85-108.

Alsina, Á. (2019b). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Barcelona: Editorial Graó.

Alsina, Á. (2020a). Revisando la educación matemática infantil: una contribución al Libro Blanco de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 9*(2), 1-20.

Alsina, Á. (2020b). La Matemática y su didáctica en la formación de maestros de Educación Infantil en España: crónica de una ausencia anunciada. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 23*(2), 373-387.

Alsina, Á. (2020c). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática, 3*(2), 127-159.

Alsina, Á. (2020d). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar, 28,* 1-13.

Alsina, Á. y Acosta, Y. (2018). Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional. Una experiencia sobre patrones con robots educativos programables. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 52,* 218-235.

Alsina, Á. y Delgado, R. (2021). Identificando los conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil: un primer paso para el desarrollo profesional. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, 6*(2), 1-23.

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baroody, A.J. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers.* Teachers College Press.

Baroody, A. J. (2000). *El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Visor.

Benz, C., Steinweg, A.S., Gasteiger, H., Schöner, P., Vollmuth, H., y Zöllner, J. (2018).

Mathematics Education in the Early Years: Results from the POEM3 Conference. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-78220-1

Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas activas (2-6 años).* Graó.

Carlsen, M., Erfjord, M., y Hundeland, P.S. (Eds.) (2020). *Mathematics Education in the Early Years. Results from the POEM4 Conference, 2018.* Springer. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01146-w

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán; Mª.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*, 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro, E. y Castro, E. (Eds.) (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil.* Pirámide.

Charalambous, C. y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on priority mathematics education: Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching, and learning. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 19–59). Routledge.

Clements, H.D. y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje.* Learning Tools LLC.

Cornejo-Morales, C., Goizueta, M., y Alsina, Á. (2021). La Situación Argumentativa: un modelo para analizar la argumentación en educación matemática infantil. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *15*(3), 159-185.

Edo, M. (2016). Emergencia de la Investigación en Educación Matemática Infantil. Juego y Matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 53-66). SEIEM.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Holland Reidel Pub.

Freudenthal, H. (1991). *Revising mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Gasteiger, H., Bruns, J., Benz, C., Brunner, E., y Sprenger, P. (2020). Mathematical pedagogical content knowledge of early childhood teachers: a standardized situation-related measurement approach. *ZDM*, *52*, 193-205. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01103-2

Gasteiger, H. y Benz, C. (2018). Enhancing and analyzing kindergarten teachers' professional knowledge for early mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *51*, 109-117.

Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8.* Pearson.

Ginsburg, H. P., y Baroody, A. J. (2007). *Tema-3: Test de Competencia Matemática Básica*. TEA Ediciones.

Ginsburg, H. P., Klein, A., y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. En I. E. Siegel & K. A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. 4. Children Psychology in practice. 5th edition* (pp. 401-476). Wiley.

Godino, J.D. y Burgos, M. (2020). Interweaving transmission and inquiry in mathematics and sciences instruction. En K. O. Villalba-Condori, A. Adúriz-Bravo, J. Lavonen, L.-H. Wong y T.-H. Wang (Eds.), *CISETC 2019, CCIS 1191* (pp. 6–21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-45344-2_2

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90-113. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Hundeland, P.S., Erfjord, I., y Carlsen, M. (2017). A kindergarten teacher's revealed knowledge in orchestration of mathematical activities. En T. Dooley, y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the CERME 10*, (pp. 1853 – 1860). DCU Institute of Education and ERME.

Kortenkamp, U., Brandt, B., Benz, C., Krummheuer, G., Ladel, S., y Vogel, R. (2014). *Early Mathematics Learning: Selected Papers of the POEM 2012 Conference*. Springer.

Korthagen, F. A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education.* Lawrence Erlbaum Associates.

Lee, J. (2010). Exploring kindergarten teachers' pedagogical content knowledge of mathematics. *International Journal of Early Childhood*, *42*, 27-41. https://doi.org/10.1007/s13158-010-0003-9

McCray, J. y Chen, J.Q. (2012). Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: Construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education*, *26*, 291-307. https://doi.org/10.1080/02568543.2012.685123

Meaney, T., Helenius, O., Johansson, M.L., Lange, T. y Wernberg, A. (2016). *Mathematics Education in the Early Years: Results from the POEM2 Conference*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4

Mialaret, G. (1984). *Las Matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseñan.* Visor.

Mosvold, R., Bjuland, R., Fauskanger, J., y Jakobsen A. (2011). Similar but different - investigating the use of MKT in a Norwegian kindergarten setting. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the CERME 7,* (pp. 1802–1811). University of Rzeszów.

Muñoz-Catalán, C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A.M., Aguilar, A. y Ribeiro, M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional (pp. 63–84). Ediciones Universidad Salamanca.

Muñoz-Catalán, M. C., Liñan-García, M., y Ribeiro, M. (2017). Conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa*, *24*(esp.), 4-19. http://dx.doi.org/10.18764/2178-2229.v24nespecialp4-19

Múñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (Eds.) (2018). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Infantil* (pp. 173-211). Editorial Paraninfo.

National Association for the Education of Young Children and National Council for Teachers of Mathematics [NAEYC y NCTM] (2002). *Early childhood mathematics: Promoting good beginnings. A joint position statement*.

http://www.naeyc.org/files/naeyc/file/positions/psmath.pdf.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* National Council of Teachers of Mathematics (traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES).

Oppermann, E., Anders, Y., y Hachfeld, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education*, *58*, 174-184. https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.05.004

Reeuvijk, M.V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *12*, 9-16.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255–281. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

The Australian Association of Mathematics Teachers Inc. & Early Childhood Australia (2006). *Position paper on early childhood mathematics*. AAMT & ECA.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes.* Harvard University Press.

Ángel Alsina
Universidad de Girona, España
angel.alsina@udg.edu

Rosa Delgado-Rebolledo
Universidad de Concepción, Chile
rosadelgado@udec.cl

Vega-Castro, D. (2022). Caracterización de funciones lineales inversas. Un estudio de casos basado en una experiencia de aprendizaje. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *5*(1), 38-57

ISSN: 2603-9982

CARACTERIZACIÓN DE FUNCIONES LINEALES INVERSAS. UN ESTUDIO DE CASOS BASADO EN UNA EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE

Danellys Vega-Castro, Universidad de Panamá, Panamá

Resumen

Este es un estudio exploratorio con enfoque metodológico, centrado en la caracterización de las funciones lineales inversas, como funciones biunívocas e invertibles. El objetivo propuesto consistió en identificar algún tipo de dificultad estructural en estudiantes de primer ingreso universitario al trabajar con propiedades de una función lineal inversa con estructura algebraica distinta a la estructura de funciones propuestas en los libros de texto asignados en la carrera. Los resultados de esta experiencia condujeron a la generalización de patrones algebraicos y geométricos, que permitieron establecer características subyacentes en las funciones lineales inversas. A su vez conllevó a diseñar una teoría metodológica basada en el manejo didáctico de contenidos matemáticos.

Palabras clave: *función lineal inversa; estructuras; patrones; generalización; didáctica de contenidos*

Characterization of inverse linear functions. A case study based on a learning experience

Abstract

This is an exploratory study with a methodological approach, focused on the characterization of inverse linear functions as biunivocal and invertible functions. The proposed objective consisted of identifying some type of structural difficulty in first-year undergraduate students when working with properties of an inverse linear function with an algebraic structure different from the structure of functions proposed in the textbooks assigned in the course. The results of this experience led to the generalization of algebraic and geometric patterns, which allowed establishing underlying characteristics of inverse linear functions. It also led to the design of a methodological theory based on the didactic management of mathematical contents.

Keywords: *inverse linear function; structures; patterns; generalization; content didactics.*

Recibido: 11/02/2022; Aceptado: 29/03/2022

INTRODUCCIÓN

Muchos investigadores se han preocupado en estudiar las dificultades que confrontan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. A través de sus investigaciones han proporcionado aportes para mejorar el proceso de enseñanza (por ej. Arcavi, 2006; Hoch y Dreyfus, 2006; Kieran, 2007; Rico-Romero y Lupiáñez-Gómez, 2008; Radford, 2010; Molina, 2010; Castro, 2012; Vega-Castro, Molina y Castro, 2012; Socas, Hernández y Palarea, 2014). En este trabajo centramos nuestra atención en un tópico específico que hace referencia a las dificultades de los estudiantes al trabajar con funciones lineales inversas. El objetivo de este estudio consistió en identificar dificultades estructurales en estudiantes de primer ingreso universitario al trabajar las propiedades de una función lineal inversa con estructura algebraica distinta a la estructura de funciones propuestas en libros de texto de la carrera.

Dubinsky y Harel (1992) expresan que las funciones representan el concepto matemático más importante estudiado desde el jardín de infancia hasta niveles superiores, mientras que Bernal (2020) expresa que es un contenido relacionado con el último grado de Educación Secundaria y el primero de Universidad, que provoca opiniones encontradas entre los profesores de Colegios, quienes indican que no se cuenta con el tiempo necesario para profundizarlo. Por otro lado, Welder (2006) indica que el concepto de función dificulta su comprensión a muchos estudiantes y que la notación formal que es un compendio de informaciones, tiene poco significado incluso para algunos estudiantes avanzados. Al respecto, Puig y Monzó (2013), desarrollan un modelo de enseñanza de la familia de funciones con el objetivo de que los estudiantes puedan dotar de sentido al uso de las transformaciones de las expresiones algebraicas, indicando en el estudio que, en la enseñanza tradicional a menudo, los estudiantes aprenden estas transformaciones de forma mecánica y terminan ejecutándolas sin sentido.

Profundizando un poco más en el tópico de funciones, dado nuestro interés como tema de estudio, la literatura conduce a indagar en estudios realizados por Even (1992) quien centra sus investigaciones en las funciones inversas e indica que los estudiantes presentan una concepción ingenua de la esencia del concepto de función inversa ante la falta de una adecuada relación entre conocimiento conceptual y procedimental e indica que los estudiantes muestran dificultades para distinguir entre una función exponencial y una función potencia. Wilson et al. (2011) señalan que los estudiantes entienden mejor el concepto de función inversa cuando se presenta en un contexto familiar del mundo real. Por otro lado, Paoletti et al. (2017) luego de realizar una caracterización de los significados de función inversa emitidos por 25 profesores en formación, comentan el señalamiento realizado por algunos investigadores de que profesores y estudiantes no perciben el sentido que conllevan las funciones inversas, por lo que requieren una mayor profundización del tema.

En esta misma línea, Okur (2013) trabaja con una muestra de 137 estudiantes de primer grado universitario matriculados en el programa de enseñanza de las matemáticas elementales en la Universidad de Anatolia Oriental en Turquía. Los resultados informan que aproximadamente un 60 por ciento de los estudiantes experimentaron dificultades para demostrar la suryección de una función al determinar la inversa de una función dada. Y en una escuela secundaria integral urbana en California, Nolasco (2018), realiza un estudio con 80 estudiantes, examina el por qué tienen dificultades con las funciones inversas y qué hacer para apoyar este aprendizaje. Este autor sugiere a docentes y educadores reconocer que la enseñanza conceptual proyecta mejores resultados que la instrucción memorística. Estos aportes sugieren que como educadores se requiere tratar de impregnar de sentido los conceptos enseñados, específicamente allí donde hay dificultades.

Breen et al. (2015) analizan los datos de dos sistemas educativos diferentes, Irlanda y Suecia, relacionados al concepto de función inversa. Las tareas planteadas en ambos estudios abordaban el mismo contenido, pero diferían en varios aspectos. A pesar de ello, las respuestas revelaron componentes similares de las imágenes conceptuales evocadas tales como las nociones de reflexión, inversión e inyectividad. Observaron que muy pocos alumnos de ambos estudios dieron una explicación completa o una definición formal de una función inversa en respuesta a las tareas asignadas. En esta línea, Attorps et al. (2013) realizan un estudio con un grupo de 17 estudiantes de ingeniería sobre funciones y funciones inversas con la ayuda de GeoGebra, donde plantean como contribuye el uso de la tecnología como herramienta pedagógica a la comprensión del concepto de función inversa. El experimento reveló que las imágenes conceptuales de los estudiantes en el postest estaban más desarrolladas en comparación con los resultados del pretest. De acuerdo al estudio de los autores la enseñanza de las funciones y funciones inversas sin el uso de la tecnología, induce muchas veces a resultados no satisfactorios y conlleva a dificultades en el trabajo de los estudiantes.

Atendiendo los aportes presentados en las distintas investigaciones vemos que existe una diversidad de dificultades. Según Vincent, Pierce y Bardini (2017) algunas dificultades confrontadas por los estudiantes pueden residir, no en conceptos nuevos, sino en fundamentos poco sólidos y en comprensiones estructurales limitadas e inflexibles de las matemáticas establecidas con anterioridad en su experiencia de las matemáticas. Rico (2003) expresa que las dificultades presentadas por los estudiantes deben ser consideradas como interrogantes, a las cuales como docentes de matemáticas se requiere la búsqueda de una respuesta. Indica que las dificultades son estímulos para diseñar estrategias de superación, retos para reflexionar y comprender las distintas variables que intervienen en aquellos procesos de enseñanza cuyo control parece que se nos escapa. Una alternativa para reducir las dificultades presentadas por los estudiantes consiste en cambiar la forma en la cual se presenta el Álgebra en libros de texto y *páginas web*[i], el cual es un factor determinante del currículo para una mayoría de profesores, quienes tienen la tendencia a enseñar álgebra estrictamente como está en los textos (Kieran, 1992). En este sentido, una enseñanza de la Matemática basada en la reproducción de modelos dados por el profesor o presentados en los libros de texto y páginas web, induce a que los estudiantes aprendan repitiendo conceptos y proposiciones hasta memorizarlos, asimilando fórmulas y algoritmos a partir de ejercicios rutinarios, careciendo de estímulos de reconocimiento, creación e invención de nuevas estructuras. En esta misma línea, Vega-Castro, Molina y Castro (2012) señalan que para atenuar las dificultades en los estudiantes son necesarios trabajos que informen acerca de cómo promover el sentido estructural en la educación obligatoria. Indican que se requiere que los profesores consideren tipos de contextos y tareas, donde las expresiones se consideren como objetos, analizando sus estructuras, con el propósito de evitar la influencia de la fluidez de los estudiantes en la ejecución de operaciones con expresiones algebraicas.

Considerando los señalamientos metodológicos establecidos por Rico (2003), Kieran (1992) y Vega-Castro, Molina y Castro (2012), y persiguiendo los intereses de este estudio, la literatura expresa a través de Castro, Rico y Castro (1995) que una estrategia importante en la resolución de problemas matemáticos es la creación y el reconocimiento de patrones, examinando casos especiales, organizando a continuación los datos sistemáticamente, determinando un patrón y usándolo para obtener la respuesta. Señalan como ejemplo el caso de hacer generalizaciones con expresiones algebraicas que implican patrones de tipo lineal o cuadrático, trabajo éste que debe ser parte integrante del currículo de matemáticas. En esta vía, Radford (2010) propone la siguiente definición:

> Generalizar un patrón algebraicamente se basa en la capacidad de captar algo en común observado en algunos elementos de una secuencia S, siendo conscientes de que esta similitud se aplica a todos los términos de S y ser capaz de usarlo para proporcionar una expresión directa cualquiera que sea su término de S. Expresado en otra forma, la generalización algebraica de un patrón se basa en el darse cuenta de algo en común que luego es generalizado a todos los términos de la secuencia y que sirve como una orden para construir expresiones de elementos de la secuencia que quedan fuera del campo de percepción. (p. 42)

Preocupados por los resultados presentados por el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE (PISA) y conocedores de las dificultades de nuestros estudiantes al trabajar con estructuras algebraicas se tomó como fundamento de motivación las consideraciones, aportes y señalamientos presentados por investigadores matemáticos que hacen referencia al estudio de nuestro interés. Estos aportes condujeron a una experiencia de aprendizaje que consideramos ayudará a mejorar nuestro sistema de enseñanza. La experiencia de aprendizaje fue desarrollada dentro del tópico funciones lineales inversas en un curso de matemáticas para ingeniería informática.

Generalidades de las Funciones Lineales Inversas (*FLI*)

En la actualidad el concepto de función es de suma importancia en el ámbito de las matemáticas y suele ser muy utilizado para representar e interpretar modelos matemáticos en la resolución de problemas de la vida real. Esta sección del trabajo se centra en describir características específicas de las funciones lineales de la forma $f(x) = mx + b$ y sus inversas. Con respecto a los parámetros (pendiente m y ordenada al origen b) que intervienen en la estructura de la función lineal dada, se presenta la restricción que el valor de estos parámetros debe ser distinto de cero, considerando que para $m = 0$, la función toma la forma $f(x) = b$, dando lugar a una función constante, cuya gráfica es una recta paralela al eje x, que no cumple la propiedad de una ***FLI***. En este tópico encontramos también la función identidad, función lineal de la forma $y = x$, con $m = 1$ y $b = 0$, función que tiene la propiedad de bisecar el primer y tercer cuadrante de R-cuadrado en ángulos exactamente iguales y que ejerce notable influencia en el trazado de la gráfica para las funciones inversas.

En relación a la definición de este concepto son muchas las coincidencias en libros de texto por diversos autores. Por ejemplo, en la literatura presentada por Pestana et al. (2007) señala que: "Una función es una regla cualquiera que hace corresponder un número real y sólo uno a cada número de un cierto conjunto, es decir, $f(x)$ es el valor de la función f en el punto x" (p.127). Según Swokowski y Cole (2012), para definir la función inversa de una función es esencial que la función sea biunívoca, la cual definen como sigue:

> Una función f con dominio D y rango R es una función biunívoca si cualquiera de las dos condiciones equivalentes se satisface:
>
> 1. Siempre que $a \neq b$ en D, entonces $f(a) \neq f(b)$ en R.
> 2. Siempre que $f(a) = f(b)$ en R, entonces $a = b$ en D. (p.294)

Estos autores señalan la existencia de la prueba gráfica de la recta horizontal: "Una función f es biunívoca si y sólo si toda recta horizontal cruza la gráfica de f a lo más en un punto" (p. 294). Posteriormente, plantean el siguiente teorema que atiende parte específica de este trabajo: “Las funciones crecientes o decrecientes son biunívocas

1. Una función que es creciente en todo su dominio es biunívoca.
2. Una función que es decreciente en todo su dominio es biunívoca” (p.295).

Swokowski y Cole (2012) definen una función inversa de la siguiente forma:

> Sea f una función biunívoca con dominio D y rango R. Una función g con dominio R y rango D es la función inversa de f, siempre que la condición siguiente sea verdadera para toda x en D y toda y en R: $y = f(x)$ si y sólo si $x = g(y)$. (p.296)

En referencia a las funciones inversas otras definiciones encontradas son las siguientes: “La función inversa de una cierta f dada es (si es que existe) otra función llamada f^{-1}, tal que $(f \circ f^{-1})(x) = x = (f^{-1} \circ f)(x)$ cuando estas composiciones tienen sentido” (Pestana et al., 2007, p.134). Otra definición la encontramos en Aguilar et al. (2016) quienes definen las funciones inversas como sigue: “Sea f una función inyectiva con dominio A y contradominio B; la función g que satisface $f(g(x)) = x$, se llama función inversa de f y se denota $f^{-1}(x)$ con dominio B y contradominio A” (p.45). Posterior a esta definición Aguilar et al. (2016) señalan las siguientes propiedades:

> Si f es una función con inversa f^{-1}, entonces:
>
> 1. El dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de f.
> 2. $(f \circ f^{-1})(x) = x, \ (f^{-1} \circ f)(x) = x$
> 3. f^{-1} es invertible y su inversa es f
> 4. Si f es una función real entonces la gráfica de f^{-1}es el reflejo de f sobre la función $y = x$. (Aguilar et al., 2016, p. 46)

Considerando que este trabajo está enfocado en las ***FLI*** identificadas como funciones invertibles, y dado que en el estudio sale a relucir la terminología reversible, indagamos en el Diccionario de la Real Academia Española (s.f.) para clarificar estos términos. Señala que el término invertible presenta como significado que se puede invertir, cambiar, sustituyendo por su contrario, la posición, el orden o el sentido de las cosas. Mientras que el término reversible proviene del latín reversus, el cual significa que puede volver a un estado o condición anterior, refiere a los pasos que se siguieron en un sentido y como serían en el orden inverso, por ejemplo, entrar y salir de una ciudad realizando el mismo recorrido en ambos sentidos.

MÉTODO

Este es un estudio exploratorio basado en una experiencia de aprendizaje. El estudio se realizó con un grupo de 17 estudiantes de primer nivel universitario de la Universidad de Panamá, en la asignatura de Matemáticas del periodo correspondiente al primer semestre de 2019. Se asignó una tarea en un instrumento de Evaluación individual cuya pretensión estuvo basada en detectar alguna situación de dificultad en los estudiantes de la carrera al trabajar las propiedades de las funciones lineales inversas empleando una estructura algebraica distinta a las estructuras estudiadas en clases. En el estudio se presentaron respuestas no satisfactorias en 15 de los 17 estudiantes. No obstante, el trabajo realizado por dos estudiantes, Tomás y Santiago[ii], induce a la labor de investigación, realizando un análisis profundo de la dificultad encontrada y que condujo a emplear como técnica un caso de estudio intrínseco (Stake, 1998). A su vez, dadas las cualidades de la resolución presentada por ambos estudiantes conllevó a establecer una teoría metodológica para la enseñanza del tópico en mención.

Diseño

El diseño de esta experiencia estuvo orientado por tres señalamientos metodológicos y el uso de los descriptores del sentido estructural propuestos por Vega-Castro (2013, pp.88-90). Los señalamientos metodológicos considerados fueron tres. Primero: Considerar dificultades mostradas por estudiantes como interrogantes a resolver, propuesto por Rico (2003). Segundo: El señalamiento presentado por Kieran (1992), acerca del currículo en matemáticas, indicando que el primer paso para cambiar la forma de enseñar álgebra es cambiar la forma en que se presenta el álgebra en los textos. Tercero: la invitación de Vega-Castro, Molina y Castro (2012) a atenuar las dificultades de los estudiantes considerando tipos de contextos y tareas, que requieran la consideración de expresiones como objetos, analizando la implicación que conllevan sus estructuras.

Desarrollo del diseño

El diseño consistió en añadir a un problema 4, de un Instrumento de Evaluación Individual, una tarea con la estructura de un patrón algebraico modificado, el cual contenía la estructura de una función lineal algebraica no común a las propuestas en los libros de texto sugeridos en la asignatura de la carrera cursada por el grupo de estudiantes.

En clases los estudiantes habían trabajado el tema de relaciones y funciones, y dentro de este último, habían estudiado la definición, la composición, tipos especiales de funciones (biyectivas o biunívocas) y la verificación de la inversa de diversos tipos de funciones (lineales, cuadráticas, cúbicas, y otros). Para la construcción de las gráficas de las funciones lineales y sus inversas, trabajaron primeramente en sus cuadernos de apuntes. Posteriormente, se realizaba el mismo trabajo con ayuda del software GeoGebra. Sin embargo, el día de la aplicación del Instrumento de Evaluación se solicitó a los estudiantes realizar la construcción de las gráficas a mano alzada. Primeramente, se realizó una breve búsqueda de problemas propuestos (Kieran, 1992) y se detectó dos tipos de patrones algebraicos de función lineal y su función inversa (ver Tabla 1). El primer ejemplo de la Tabla 1 conlleva un tipo de patrón algebraico para la función lineal, donde la estructura de la función algebraica es de la forma $f(x) = mx + b,$ y el segundo ejemplo conlleva un segundo tipo de patrón algebraico con estructura de la forma $f(x) = x + b$.

Tabla 1. *Tipos de ejemplos propuestos en libros de texto de la asignatura*

Ejemplo	*Función lineal*	*Función Inversa*
1	$f(x) = 3x - 5$	$f^{-1}(x) = (x + 5)/3$
2	$f(x) = x - 4$	$f^{-1}(x) = x + 4$

En función de los patrones encontrados y buscando indagar en el proceso de enseñanza basado en el manejo didáctico de estructuras dentro del proyecto de Sentido Estructural en el cual se desarrolla el estudio, se consideró observar detenidamente los descriptores del sentido estructural planteados por Vega-Castro (2013, pp. 88-90). A raíz de esta observación, surge la interrogante: ¿Qué sucedería si se realiza una modificación a la estructura de la función lineal del segundo ejemplo, esto es, si se invierte el orden y forma de la estructura de la función originalmente dada? En este caso, sucedería que el valor del coeficiente de x como pendiente de la recta pasaría a ser negativo y el valor de la ordenada al origen pasaría a ser positivo. Se optó por invertir el orden en los términos de la estructura y cambiar el valor de la ordenada al origen, quedando el segundo patrón algebraico expresado como $f(x) = 3 - x$. A partir de esta estructura, el problema que permitiría analizar el desempeño de los estudiantes con respecto a las $\boldsymbol{FLI}$ fue redactado mediante cuatro ítems de la siguiente forma:

Dada la función lineal $f(x) = 3 - x$.

1. Dibuje la gráfica
2. Analice si la función es biyectiva. Justifique su respuesta.
3. Pruebe analíticamente que $f(x)$ es invertible
4. Construya la gráfica para $f^{-1}(x)$.

Considerando que dentro del proceso de enseñanza se busca presentar pequeños retos a los estudiantes, en este sentido, realizar una modificación a la función propuesta en el libro de texto a través de la inversión de la estructura de la función algebraica dada, es de considerar, ayudaría a observar la presencia de alguna dificultad en el trabajo de los estudiantes.

Análisis preliminar de las experiencias

En esta sección presentamos el análisis del desempeño de Tomás, al verificar el trazado de la gráfica para la ***FLI*** propuesta. Durante el desarrollo del Instrumento de Evaluación, sólo Tomás, interroga a la Investigadora. En ningún momento estuvo satisfecho de los resultados obtenidos al trazar la gráfica. En lo siguiente, se detalla las interrogantes de Tomás desde su mesa de trabajo en el aula de clases:

-. Tomás: Profesora, no me sale la construcción de la gráfica del problema 4. ¿Es posible que haya algún error en el problema?

-. Profesora: No, el problema 4 no tiene errores.

Tomás no conforme con las respuestas de la Profesora, se levanta y camina hasta el escritorio e indaga a la Profesora.

-. Tomás: Profesora, podría indicarme donde tengo el error, las gráficas me coinciden una sobre la otra.

La Profesora observa rápidamente la resolución planteada por Tomás.

-. Profesora: Tomás, construya las gráficas de las funciones en un sólo plano.

RESULTADOS

En esta sección, se presenta el trabajo realizado por Tomás y Santiago para probar que efectivamente la función lineal $f(x) = 3 - x$ es inversa.

Enunciado 1. *Dibuje la gráfica de* $f(x) = 3 - x$

Resolución de Tomás: Primeramente, en la Figura 1, a la izquierda, se observa la tabla de valores para la función $f(x)$ y a la derecha, la construcción de la gráfica de la función lineal que confecciona. Tomás coloca los pares ordenados $(-2, 5)$, $(-1, 4)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$ y $(2, 1)$ en el plano dibujado, no enumera las coordenadas del plano cartesiano, ni coloca el sentido a la recta trazada. Aunque se sobreentiende que la recta desciende a la derecha de acuerdo a los valores de los pares ordenados de la Tabla de valores.

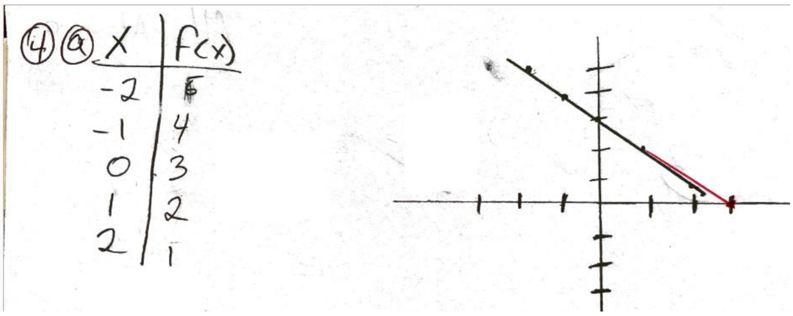


Figura 1. Tabla de valores y gráfica de f(x) construida por Tomás.

Resolución de Santiago: Santiago presenta en un mismo plano las gráficas para $f(x)$ y $f^{-1}(x)$. Construye la tabla de valores ubicada a izquierda de la Figura 2. Posteriormente, coloca correctamente los pares ordenados $(-2,5)$, $(-1,4), (0,3)$, $(1,2)$ y $(2,1)$ correspondientes a la gráfica de $f(x)$ en la parte superior del plano.

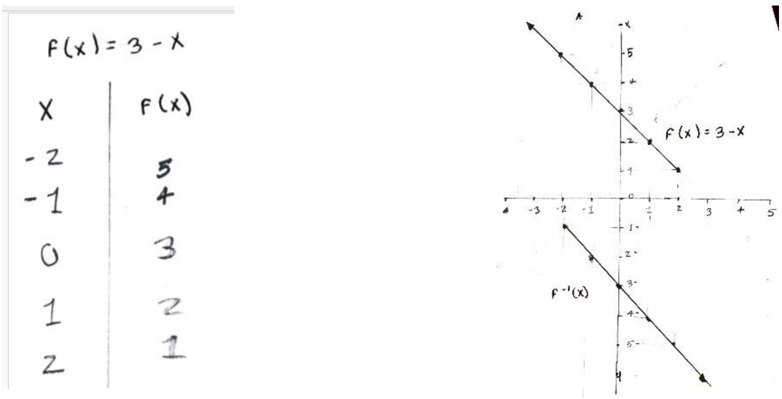


Figura 2. Gráfica de la función $f(x)$ *y* $f^{-1}(x)$ construida por Santiago

Enunciado 2. *Analice si la función es biyectiva. Justifique su respuesta*

Resolución de Tomás: En la Figura 3 se muestra la justificación que presenta Tomás luego de analizar conceptualmente la biyectividad de la función.

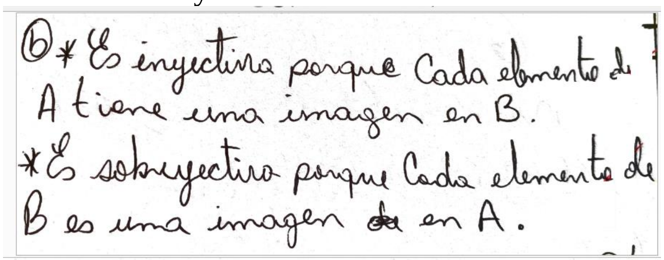


Figura 3. Justificación de biyectividad presentada por Tomás.

Resolución de Santiago: Por su parte Santiago, muestra en la Figura 4 el análisis y la justificación de la biyectividad del problema construyendo un diagrama de conjuntos.

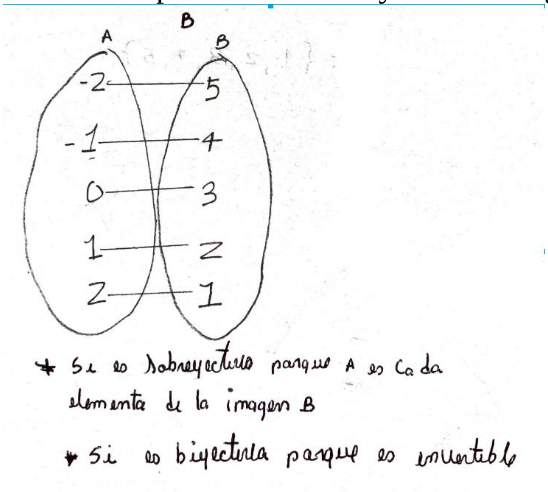


Figura 4. Justificación de biyectividad presentada por Santiago.

Enunciado 3. *Pruebe analíticamente que* $f(x)$ *es invertible*

Resolución de Tomás: En la Figura 5, se muestra la respuesta de Tomás al enunciado 3. En el desarrollo ubicado a la izquierda, Tomás despeja el valor de y para obtener x en función de y, derivando así de la expresión $f(x) = 3 - x$, la expresión $x = 3 - y$, que conlleva a $f^{-1}(x) = 3 - x$. Posteriormente, la imagen de la derecha en la Figura 4 muestra de acuerdo a los cálculos analíticos, que Tomás prueba la propiedad señalada por Pestana et al. (2007) y por Aguilar et al. (2016).

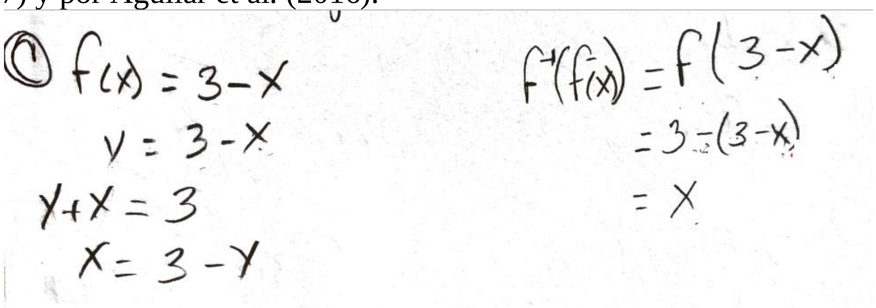


Figura 5. Prueba de que $f(x)$ es invertible realizada por Tomás.

Podemos observar que Tomás escribe $f^{-1}(f(x)) = f(3 - x)$ y que la escritura correcta es $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3 - x)$, pero este error no impide que Tomás verifique la inversa de la función. Aunque se sugiere para próximos estudios solicitar se pruebe el sentido inverso $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, donde $f\left(f^{-1}(x)\right) = 3 - f^{-1}(x)$, luego $f\left(f^{-1}(x)\right) = 3 - (3 - x) = x$.

Resolución de Santiago: Se muestra a continuación la forma de obtener la inversa de la función realizada por Santiago. Obsérvese la Figura 6.

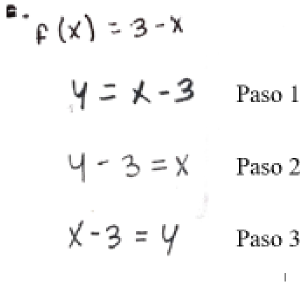


Figura 6. Prueba de que $f(x)$ es invertible realizada por Santiago.

Se observa en la Figura 6 que Santiago al probar analíticamente que $f(x)$ es invertible y resolver para x como función de y, sustituye $f(x)$ por y, asume intercambiar la expresión $3 - x$ de la función lineal dada por la expresión $x - 3$ como se muestra en el paso (1). Posteriormente, en el paso (2) traslada el -3 del miembro derecho al miembro izquierdo conservando el mismo signo a este término, luego de realizada la trasposición, finalmente concluye que $y = x - 3$.

Enunciado 4. *Construya la gráfica para* $f^{-1}(x) = 3 - x$

Resolución de Tomás: Tomás construye correctamente para $f^{-1}(x) = 3 - x$ una tabla de valores y luego coloca los pares ordenados $(5, -2)$, $(4, -1)$, $(3, 0)$, $(2, 1)$ y $(1, 2)$ (ver Figura 7). A partir de estos datos se observa a la derecha de la Figura 7 la construcción de la gráfica de la función lineal inversa. De acuerdo a las tablas de valores construidas por Tomás, indica que el dominio de $f^{-1}(x)$ es el rango de $f(x)$ y que el rango de $f^{-1}(x)$ es el dominio de $f(x)$.

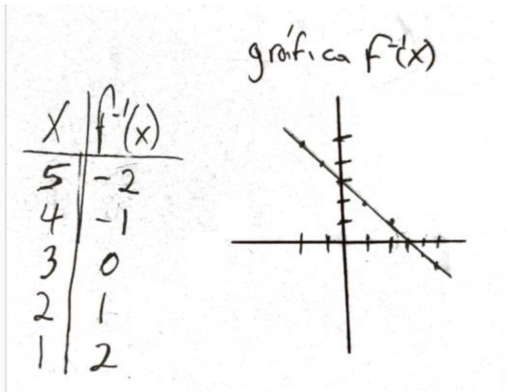


Figura 7. Tabla de valores y gráfica de $f^{-1}(x)$ construida por Tomás

Al contrastar las gráficas de la Figura 1 y Figura 7 elaboradas por Tomás, se observa que las líneas de las gráficas correspondientes a $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ pasan por los mismos puntos. Cortan en ambas los ejes coordenados en los puntos (3,0) y (0,3). No obstante, este recorrido se realiza en sentidos distintos. Tomás al no colocar el sentido que conlleva cada línea, le impide observar la reversibilidad de las mismas. En este caso surge la conjetura de que esta sea la situación por la cual Tomás no se sentía conforme con los resultados obtenidos al construir la gráfica, dado que en las prácticas realizadas en clases en ningún momento se les presentó una estructura gráfica con esta forma. Se considera que la forma como se redactó la indicación para la construcción de las gráficas del problema propuesto (enunciados 1 y 4) fueron una limitante para Tomás quien construyó las gráficas de las funciones en plano separados. Además, en ningún momento se les sugirió colocar el sentido del recorrido de las líneas.

Resolución de Santiago: Santiago no construye la tabla de valores para $f^{-1}(x)$, pero de acuerdo a la gráfica que se presenta en la Figura 2, muestra haber considerado los pares ordenados $(-2,-1)$, $(-1,-2),(0,-3),(1,-4)$, $(2,-5)$. Es decir, muestra haber considerado como dominio de $f^{-1}(x)$ el dominio de $f(x)$ y como rango de $f^{-1}(x)$ ha invertido el orden del rango de $f(x)$ cambiando los signos. Se puede observar que coloca el sentido de las líneas correspondientes a la gráfica de las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en dirección contraria. Luego, se observa que las líneas son paralelas, lo cual muestra que Santiago presenta una confusión con el patrón geométrico de la función presentada en el instrumento de evaluación.

ANÁLISIS DE LA DIFICULTAD ENCONTRADA

Iniciamos aquí el proceso de manejo didáctico del contenido matemático en estudio como búsqueda de respuesta a la dificultad presentada por ambos estudiantes.
Primer señalamiento metodológico: Considerar las dificultades mostradas por el estudiante como interrogantes a resolver de acuerdo a señalamiento realizado por Rico (2003). Estas dificultades condujeron a indagar un poco más y buscar una posible solución al problema

1. *Dificultad de Tomás*: se procedió a analizar el diálogo que surgió con el estudiante Tomás, donde se percibe la presencia de una dificultad en su comprensión respecto a la estructura gráfica de la función. Tomás muestra inseguridad al trazar la estructura gráfica de la imagen inversa correspondiente a la función inicialmente dada.

2. *Dificultad de Santiago:* Asume que la estructura gráfica de la ***FLI*** al actuar como reflejo de la función lineal dada inicialmente, debe manifestarse como una recta paralela a $f(x)$, considerando que las estructuras gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son imágenes reflejo una de la otra con respecto a la función $y=x$, según señala Aguilar et al. (2016) en la cuarta propiedad propuesta.

Ante la inseguridad y dificultad presentadas por Tomás y Santiago, cabe señalar la importancia del uso de la tecnología como herramienta pedagógica para la comprensión del concepto de función inversa (Attorps et al., 2013).

Segundo señalamiento metodológico*:* Cambiar la forma en la cual se presenta el Álgebra en los textos y páginas web, según señalamiento hecho por Kieran (1992).
Se procedió a realizar una revisión de problemas propuestos que atienden a las ***FLI*** en libros de texto y páginas web, con el objetivo de extraer información adicional acerca de las diversas ejemplificaciones utilizadas para el tema en estudio, y su relación con las dificultades encontradas al proponer cambios en la nueva tarea asignada a los estudiantes. De esta revisión se observa en la Tabla 2 que, en su mayoría los ejemplos presentados en los libros de texto y páginas web revisados y que atienden a las ***FLI***, poseen un patrón estructural algebraico muy similar, que presenta la forma $f(x)=mx+b$ y otros ejemplos propuestos y desarrollados cuyo patrón algebraico posee la forma $f(x)=x+b$. Observemos otros ejemplos añadidos a los ya presentados en la Tabla 1.

Tabla 2. *Otros ejemplos propuestos en libros de texto y páginas web*

Función lineal	*Función Inversa*
$f(x) = 4x - 3$	$f^{-1}(x) = (x + 3)/4$
$f(x) = -2x + 3$	$f^{-1}(x) = (3 - x)/2$
$f(x) = x + 4$	$f^{-1}(x) = x - 4$

Tercer señalamiento metodológico: Considerar el análisis de estructuras algebraicas para promover el sentido estructural según señalamiento propuesto por Vega-Castro, Molina y Castro (2012).
El objetivo de intentar promover el sentido estructural conduce al análisis de las estructuras de las expresiones considerándolas como objetos. Este objetivo a su vez conlleva a atenuar las dificultades mostradas por los estudiantes, para lo cual se proponen cuatro estrategias.

Estrategia 1. *Analizar similitudes y diferencias de ejemplos encontrados en libros de texto y páginas web para la búsqueda de un patrón algebraico que caracterice las estructuras de las expresiones dadas.*

Luego de analizar similitudes y diferencias en los ejemplos presentados en la Tabla 1 y Tabla 2, incluyendo el ejemplo de la tarea con la función $f(x) = 3 - x$, propuesta a los estudiantes en el instrumento de evaluación individual, se observan tres casos de patrones algebraicos subyacentes en la estructura de una función lineal de la forma $f(x) = mx + b$. En la Tabla 3 se muestra cada patrón generalizado y sus respectivos ejemplos con diversos valores reales para la ordenada al origen.

Tabla 3. *Casos de patrones algebraicos que caracterizan las* ***FLI***

Caso 1. $f(x) = mx + b$	**Caso 2**. $f(x) = x + b$	**Caso 3.** $f(x) = -x + b$
$f(x) = 2x - 3$	$f(x) = x - 3$	$f(x) = -x + 3$
$f(x) = 3x + {}^{1}\!/_{2}$	$f(x) = x + {}^{1}\!/_{2}$	$f(x) = -x - {}^{1}\!/_{2}$
$f(x) = 5x - \sqrt{3}$	$f(x) = x - \sqrt{3}$	$f(x) = -x + \sqrt{3}$

Estrategia 2*. Analizar estructuralmente el contenido de los casos de patrones algebraicos obtenidos, de forma que permita identificar y describir características del tema en consideración (considerar señalamiento de Castro, Rico y Castro, 1995 y definición propuesta por Radford, 2010).*

Al analizar los casos de patrones algebraicos de la Tabla 3 se pudo estructurar las respectivas restricciones para la forma generalizada de cada caso de ***FLI*** encontrada:

- En los tres casos es posible asignar cualquier valor real a la ordenada al origen. Este valor no influye en el comportamiento de la forma adquirida por la gráfica que corresponde a cada caso.
- Se requiere que tanto el valor de la pendiente *m*, como el valor de la ordenada al origen *b*, sean distintos de cero en los tres casos.
- El comportamiento de la gráfica de la ***FLI*** varía en función del valor del parámetro m como pendiente de cualquier función lineal dada. Es decir, la pendiente m

en el Caso 2 es estrictamente igual a 1, mientras que la pendiente m en el Caso 3 es estrictamente igual a -1. Observemos:

Caso 1. Que la pendiente m sea un número real distinto de $\{-1, 0, 1\}$.

Caso 2. Que la pendiente sea estrictamente $m = 1$

Caso 3. Que la pendiente sea estrictamente $m = -1$

Estrategia 3*. Establecer características algebraicas y geométricas.*

a. Caracterización Algebraica

Este análisis conlleva a describir características en cada patrón algebraico generalizado. En la Tabla 4 se presenta la caracterización algebraica de las ***FLI*** a través de las cualidades de las estructuras que presentan cada uno de los patrones algebraicos encontrados dentro de cada caso. Cabe señalar que para el Caso 1, en el cual $f(x) = mx \pm b$ y donde m es un número racional de la forma $m = \frac{a}{c}, c \neq 0$, luego:

a.1. Para $c = 1$, el patrón algebraico de la ***FLI*** queda expresado de la forma $f^{-1}(x) = \frac{x \mp b}{a}$.

a.2. Para $c \neq 1$, el patrón algebraico de la ***FLI*** queda expresado de la forma $f^{-1}(x) = \frac{c(x \mp b)}{a}$.

Tabla 4. *Caracterización algebraica de las* ***FLI***

Características / Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Patrón algebraico de la función lineal dada	$f(x) = mx \pm b$	$f(x) = x \pm b$	$f(x) = -x \pm b$
Patrón algebraico de la ***FLI***	$f^{-1}(x) = \frac{x \mp b}{a}$ $f^{-1}(x) = \frac{c(x \mp b)}{a}$	$f^{-1}(x) = x \mp b$	$f^{-1}(x) = -x \pm b$
Condición de la estructura de la función en todos los casos para $m \neq 0, b \neq 0$	La pendiente m puede ser cualquier valor real, excepto $\{-1, 0,1\}$	La pendiente es estrictamente $m = 1$	La pendiente es estrictamente $m = -1$
Signo de la ordenada al origen en las ***FLI***	Presenta variación	Presenta variación	No presenta variación

b. Caracterización Geométrica

b.1. Caracterización geométrica de las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ para el Caso 1

A raíz de los tres casos de generalización algebraica obtenida, en esta sección se describen las características del comportamiento geométrico de una función modelo para el Caso 1, la función es $f(x) = 3x - 2$ y su inversa $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$, estableciendo de esta forma un patrón geométrico para el Caso 1 (ver Figura 8).

Características del comportamiento

- Se interceptan en un punto y son inversas entre sí,

- Son cortadas por la función $y = x$, formando ángulos simétricos respecto de la función identidad,
- Ambas son crecientes o decrecientes a la vez, es decir, ambas son rectas que se elevan a la derecha o ambas descienden a la derecha.

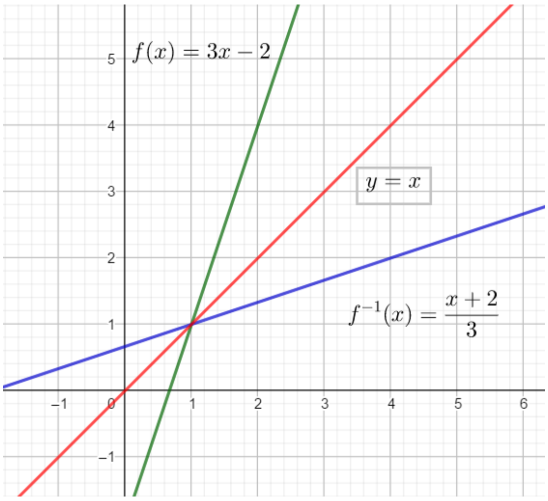


Figura 8. Patrón geométrico del Caso 1.

b.2. Caracterización geométrica de las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ para el Caso 2

Para el Caso 2, se utilizan como función modelo $f(x) = x + 3$ y su inversa $f^{-1}(x) = x - 3$, y se describen las características del comportamiento geométrico estableciendo de esta forma un patrón geométrico para el Caso 2 (ver Figura 9).

Características del comportamiento
- No se interceptan, son paralelas y son inversas entre sí.
- No son cortadas por la función $y = x$, en ningún punto, se muestran como reflexiones a distinto lado y son paralelas a la función identidad,
- Ambas son crecientes, es decir, son rectas que se elevan a la derecha.

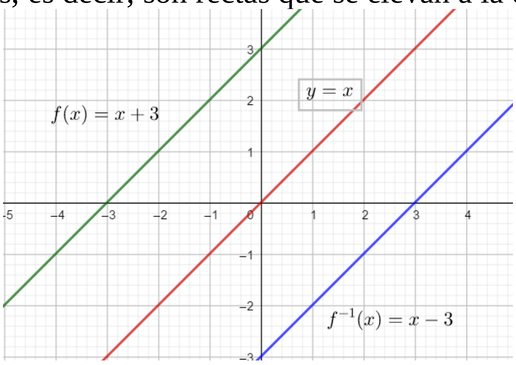


Figura 9. Patrón geométrico del Caso 2.

b.3 Caracterización geométrica de las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ para el Caso 3

Para el Caso 3, se utiliza como función modelo la función aplicada a los estudiantes en el instrumento de evaluación individual, $f(x) = 3 - x$ y su inversa $f^{-1}(x) = 3 - x$. Se describen las características del comportamiento geométrico, estableciendo de esta forma un patrón geométrico para el Caso 3 (ver Figura 10).
Características del comportamiento

- No se interceptan, son reversibles, se superponen una sobre otra en dirección contraria, y son inversas entre sí.
- Ambas líneas son cortadas perpendicularmente en un mismo punto por la función identidad.
- Mientras la función $f(x)$ desciende a la derecha, $f^{-1}(x) = g(x)$ asciende a la izquierda.

a. Trazado de la gráfica $f(x)$ b. Trazado de la gráfica $f^{-1}(x)$

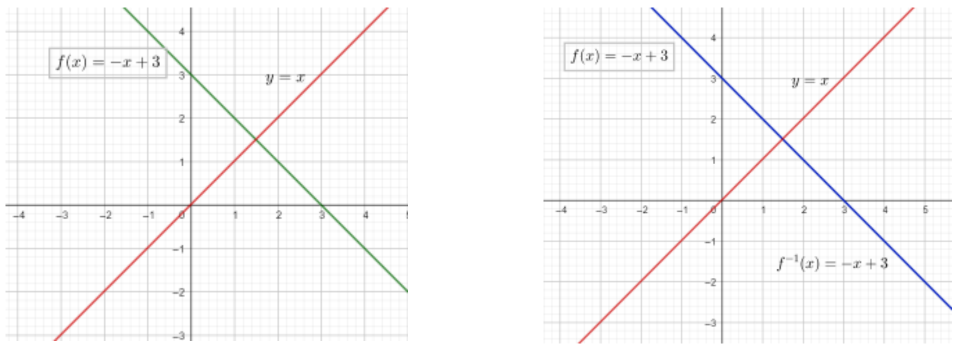


Figura 10. Patrón geométrico del Caso 3.

Estrategia 4*. Impregnar de sentido la dificultad encontrada*

Esta estrategia se presenta con el interés de ayudar al estudiante a la fijación del aprendizaje de este tópico, para lo cual considerando que el tema de las funciones lineales inversas está íntimamente ligado a la fenomenología de la reflexión de la luz y buscando impregnar de sentido la dificultad encontrada, se han establecido similitudes y diferencias entre la estructura gráfica de las ***FLI*** (en el Caso 1 y el Caso 3) y la estructura gráfica correspondiente a este fenómeno de las ciencias físicas. De forma que permita al estudiante familiarizar las estructuras algebraicas y gráficas de las funciones en estudio con situaciones de la vida real para la fijación del conocimiento.

a. Contrastando la estructura gráfica presentada en el Patrón Geométrico del Caso 1 (ver Figura 8) con la estructura gráfica de un rayo de luz incidente en forma oblicua en un determinado plano (ver Figura 11), podemos observar similitudes y diferencias.

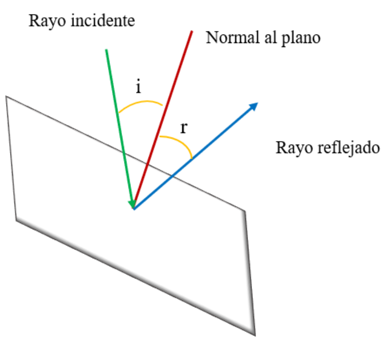


Figura 11. Incidencia y reflexión de la luz en una superficie. Fuente: Elaboración propia.

Similitudes. De acuerdo a las leyes de la reflexión de la luz al incidir oblicuamente un rayo luminoso sobre una superficie, el rayo incidente, el rayo reflejado y la normal se encuentran en el mismo plano, además el ángulo de incidencia con la normal es igual al ángulo de reflexión. De igual forma en las $\boldsymbol{FLI}$ el ángulo formado por la función $f(x)$ con la función identidad es igual al ángulo formado por $f^{-1}(x)$ con la función identidad. De esta forma la función $y = x$ en las $\boldsymbol{FLI}$, ejerce las veces de la normal al plano o superficie en la reflexión de la luz, forma ángulos simétricos entre ambas funciones.

Diferencias. Se aprecia que el rayo reflejado en el plano (ver Figura 11) no muestra el mismo sentido que el rayo incidente, mientras que las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$, siguiendo las tablas de valores, muestran el mismo sentido, ambas son rectas que se elevan a la derecha o ambas son rectas que descienden a la derecha.

b. Contrastando la estructura gráfica presentada en el Patrón Geométrico del Caso 3 (ver Figura 10) con la estructura gráfica de un rayo de luz incidente en forma rectilínea en un determinado plano (ver Figura 12), podemos observar similitudes y diferencias.

Similitudes. La función $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ utilizan la misma trayectoria de ida y vuelta, son reversibles. De igual forma el rayo incidente y el rayo reflejado utilizan la misma trayectoria de ida y vuelta, dando lugar a la reversibilidad de la trayectoria óptica, el rayo de luz regresa por el mismo camino.

Diferencias. Se aprecia que el rayo incidente y el rayo reflejado son paralelos a la normal al plano (ver Figura 12), mientras que las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ ambas son rectas perpendiculares a la función $y = x$ o función identidad.

a. Rayo incidente en una superficie   b. Rayo reflejado en una superficie

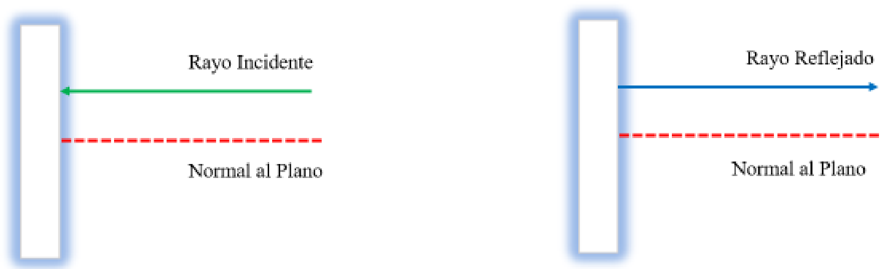


Figura 12. Similitudes y diferencias con el Patrón geométrico del Caso 3.
Fuente: Elaboración propia.

DISCUSIÓN

En este trabajo el objetivo propuesto consistió en identificar dificultades estructurales en estudiantes al verificar propiedades de las funciones lineales inversas mediante estructura de una función lineal algebraica no trabajada en clases. El desarrollo de este objetivo condujo a la generalización de patrones algebraicos y geométricos, que conllevaron a establecer características subyacentes en las funciones lineales inversas y al posterior diseño de una propuesta metodológica para el manejo didáctico de contenidos matemáticos dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de las $\boldsymbol{FLI}$. Con la caracterización algebraica establecida en la Tabla 4 y las características del comportamiento geométrico deducidos de las Figuras 8, 9 y 10, el estudiante podrá identificar a través de la estructura algebraica de cualquier función lineal dada, el tipo de patrón algebraico y geométrico al cual corresponde una determinada función. Este trabajo se propone como estudio de manejo didáctico de contenidos matemáticos para futuros formadores de matemáticas, de forma que les permita aplicar los señalamientos y estrategias propuestos por los investigadores, aquí citados, a la orientación del desarrollo de sentido estructural en sus estudiantes. Por tanto, se ha desarrollado como propuesta de aprendizaje la siguiente metodología:

Primer señalamiento metodológico. Considerar las dificultades mostradas por los estudiantes como interrogantes a resolver (Rico, 2003).

Segundo señalamiento metodológico. Realizar revisiones de problemas propuestos en libros de texto y páginas web, para innovar la forma en que se presenta el Álgebra (Kieran, 1992).

Tercer señalamiento metodológico. Considerar el análisis de estructuras algebraicas para promover el sentido estructural (Vega-Castro, Molina y Castro, 2012). En este señalamiento metodológico se propone:

Estrategia 1*. Analizar similitudes y diferencias de ejemplos encontrados en libros de texto y páginas web para la búsqueda de un patrón algebraico que caracterice las estructuras de las expresiones dadas.*

Estrategia 2*. Analizar estructuralmente el contenido de los patrones algebraicos obtenidos de forma que permita identificar y describir características del tema en consideración (considerar señalamiento de Castro, Rico y Castro, 1995 y definición propuesta por Radford, 2010).*

Estrategia 3*. Establecer características en patrones algebraicos y geométricos.*

Estrategia 4*. Impregnar de sentido las dificultades encontradas para la fijación del tema en estudio.*

CONCLUSIONES

El tópico de las ***FLI*** es un tipo de enseñanza que se puede utilizar para que el estudiante fije su aprendizaje mediante la aplicación de relaciones y conexiones entre las características presentadas por estructuras algebraicas dadas, generando y fortaleciendo el reconocimiento de patrones. De esta forma, atendiendo la estructura generalizada $f(x) = mx + b$ conocida en el estudio de las funciones lineales, observamos que los gráficos de las ***FLI*** correspondientes a las funciones con estructuras algebraicas $f(x) = x - b$ y $f(x) = b - x$ presentan distinto comportamiento gráfico a las ***FLI*** que corresponden a la estructura de la forma $f(x) = mx + b$**.** Analizando los casos presentados, el gráfico del Caso 3 presenta un comportamiento diferente a los estudiados en clases y que el estudio de las ***FLI*** puede ser clasificado de acuerdo a una estructura algebraica generalizada tal como se presenta en la Tabla 4 y Figuras 9, 10 y 11.

Al considerar similitudes y diferencias, en la estructura algebraica de la función lineal en estudio, ha conllevado como aporte de investigación, a establecer patrones de estructura algebraica y geométrica subyacentes en las ***FLI***. De forma que, dada la clasificación, los estudiantes puedan identificar de acuerdo a la expresión de la función algebraica el tipo de estructura gráfica, sin necesidad de construirla.

En este trabajo se ha indagado en señalamientos y estrategias aportados por diversos investigadores con el interés de desarrollar una propuesta de Sentido Estructural que conlleve a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de estudiantes panameños dados los resultados de PISA/OCDE. Los señalamientos aportados por diversos investigadores condujeron a la realización de un trabajo con estructuras algebraicas que dio lugar a una experiencia de aprendizaje dadas las dificultades en dos estudiantes que presentaron un alto nivel de desempeño y que motivó al desarrollo de un estudio de casos.

Esta propuesta teórica se considera de utilidad como fundamento metodológico en la formación de estudiantes, futuros docentes de matemática, dado que contiene el desarrollo de estrategias modelo para la creación y el reconocimiento de patrones de acuerdo a los aportes de Castro, Rico y Castro (1995), y desarrollo de estrategias modelo para la generalización algebraica de patrones señaladas por Radford (2010). Se plantea como proceso creativo para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas de forma que ayude a fijar la comprensión de los aprendizajes desde el análisis de las estructuras algebraicas de diversas expresiones matemáticas. A su vez puede ser generalizada a otros tópicos de la matemática, así como puede ser aplicada a otras áreas científicas de las Ciencias Básicas.

Agradecimientos

Este trabajo está patrocinado por la Dirección I+D de la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) de Panamá, dentro del marco del Proyecto de Investigación Inserción de Talento Especializado, ITE16-R2-029 "Nivel de sentido estructural que manifiestan estudiantes panameños al trabajar con estructuras algebraicas. Diseño de una propuesta para desarrollar en el aula". El agradecimiento a la Dra. Encarnación Castro de la Universidad de Granada, al Dr. Eduardo Flores-Castro y Profesora Dilcia Arosemena de la Universidad de Panamá y, a los revisores anónimos por los aportes brindados a este trabajo.

REFERENCIAS

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2016). *Cálculo diferencial e Integral*. (4ª ed.). México: Pearson Education.

Arcavi, A. (2013). Reflexiones sobre el Álgebra Escolar y su Enseñanza. En *Investigación en didáctica de la matemática* (pp. 13-22). El Instituto Weizmann de Ciencias.

Attorps, I., Björk, J., Radic, M. & Viirman, O. (2013). Teaching inverse functions at tertiary level. *CERME 8.*

Bernal, C. (2020). *Propuesta para la innovación del curso de precálculo: Funciones, sus gráficas, dominios y codominios*. [Recursos de enseñanza]. https://core.ac.uk/download/pdf/322383994.pdf

Breen, S., Larson, N., O'Shen, A. & Petterson, K. (2015). Students' concept images of inverse functions. *CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 2228-2234. Charles University in Prague: Prague

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* Una empresa docente. Bogotá, Colombia.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Peñalva, F. J. García y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 -94). Jaén, España: SEIM.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function, in G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, 25* (p. 85-107), United States of America: Mathematical Association of America.

Even, R. (1992). The inverse function: Prospective teachers' use of “undoing”. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *23*(4), 557-562.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 305-312. Praga, República Checa: Charles University in Prague.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707- 762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Molina, M. (2010). Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *Suma*, *65*, 7-15.

Mulligan, J., Vale, C. y Stephens, M. (2009). Understanding and developing structure- Its importance for mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 1- 4.

Nolasco, J. (2018). *The struggle with inverse functions doing and undoing process*. Electronic Theses, Projects, and Dissertations. 652. http://scholarworks.lib.csusb.edu/etd/652

Okur, M. (2013). Learning difficulties experienced by students and their misconceptions of the inverse function concept. *Educational Research and Reviews*, *8* (12), 901-910.

Paoletti, T., Stevens, I. E., Hobson, N. L., Moore, K. C., y LaForest, K. R. (2018). Inverse function: Pre-service teachers’ techniques and meanings. *Educational Studies in Mathematics*, *97*(1), 93-109.

Pestana, D., Rodríguez, J., Romera, E., Tourís, E., Álvarez, V. y Portilla, A. (2007). *Curso práctico de Cálculo y Precálculo* (2ª ed.). Barcelona: Editorial Ariel, S.A.

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.) *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35) México: Trillas. https://www.uv.es/Puigl/2013fenomenosyajustes.pdf

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Real Academia Española. (s.f.). *Diccionario de la lengua española*. Madrid, España: Autor.

Rico, L. (2003). Presentación de la edición española. En NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (p.viii). Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Rico-Romero, L. y Lupiánez-Gómez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Socas, M., Hernández, J., Palarea, M. M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de matemáticas de estudiantes para profesor de educación primaria y secundaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. Sánchez, C. Fernández, J. L. Lupiáñez, L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 145-154). Málaga: (SEIEM).

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Swokowski, E. W. y Cole, J. A. (2012). *Algebra y trigonometría con geometría analítica* (13.va ed.). Santa Fe, México: Cengage Learning.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(2), 233-258. https://www.redalyc.org/pdf/335/33523165005.pdf

Vega-Castro, D. (2013). *Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el Sentido Estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas*. Tesis Doctoral. Granada, España: Universidad de Granada. https://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7478/

Vincent, J., Pierce, R. y Bardini C. (2017). Structure Sense: A precursor to Competency in Undergraduate Mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal, 31*(1), 38-47. University of Melbourne. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1153295.pdf

Welder, R. (2006). Prerequisite Knowledge for the Learning of Algebra. En *Proceedings of the 5th Annual Hawaii International Conference on Statistics, Mathematics and Related Fields* (pp. 1642-1667). Honolulu, HI: American Statistical Association.

Wilson, F. C., Adamson, S., Cox, T. & O'Bryan, A. (2011). Inverse functions: What our teachers didn't tell us. *The Mathematics Teacher*, 104 (7), 500-507.

Danellys Vega-Castro
Universidad de Panamá, Panamá
danellys.vega@up.ac.pa

[i] Se añade la letra cursiva debido al uso de la bibliografía digitalizada hoy día.

[ii] A los estudiantes se ha asignado el nombre de Tomás y Santiago por confidencialidad.

MES