Matemáticas, Educación y Sociedad

ISSN: 2603-9982
Matemáticas, Educación y Sociedad
http://mesjournal.es/
editor@mesjournal.es

Vol 5 No 2 (2022): Matemáticas, Educación y Sociedad

Cubos y prismas triangulares para los niños y niñas de preescolar: un material didáctico de Friedrich Fröbel

Vicente Meavilla Seguí

1-14

Influencia del género y el rendimiento en la autoconfianza hacia las matemáticas en futuros maestros de Educación Primaria

Javier Sánchez Mendías, Isidoro Segovia Alex, Antonio Miñán Espigares

15-30

Errores algebraicos en las producciones de estudiantes universitarios de Costa Rica y México

José García-Suarez, Helen Bolaños-González

31-45

Meavilla Seguí, V. (2022). Cubos y prismas triangulares para los niños y niñas de preescolar: un material didáctico de Friedrich Fröbel. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 5*(2), 1-14

ISSN: 2603-9982

CUBOS Y PRISMAS TRIANGULARES PARA LOS NIÑOS Y NIÑAS DE PREESCOLAR: UN MATERIAL DIDÁCTICO DE FRIEDRICH FRÖBEL

Vicente Meavilla Seguí, Catedrático jubilado, España

Resumen

En 1840, el pedagogo alemán Friedrich Fröbel acuñó el término Kindergarten [= Jardín de Infancia] para los centros germanos de formación preescolar. En ellos el profesorado estaba constituido por mujeres y el juego era considerado como un proceso esencial de la educación inicial del niño. Para fomentar la capacidad creadora de los principiantes Fröbel diseñó un material escolar específico. En este artículo, nos ocuparemos de un juego de bloques cúbicos y prismáticos que, a nuestro entender, tiene un notable interés en la formación aritmético-geométrica de los más pequeños e incluso de los que no lo son.

Palabras clave: *Friedrich Fröbel, jardín de infancia, material didáctico, aritmética, geometría*

Cubes and triangular prisms for preschool children: a teaching material by Friedrich Fröbel

Abstract

In 1840, the German pedagogue Friedrich Fröbel coined the term Kindergarten for German pre-school training centers. In them the teaching staff was made up of women and the game was considered as an essential process of the initial education of the child. To encourage the creative capacity of beginners, Fröbel designed a specific school material. In this article, we will deal with a game of cubic and prismatic blocks that, in our opinion, has a notable interest in the arithmetic-geometric formation of the smallest and even of those that are not.

Keywords: *Friedrich Fröbel, Kindergarten, didactic material, arithmetic, geometry*

Recibido: 27/01/2022; Aceptado:17/06/2022

FRIEDRICH FRÖBEL: APUNTE BIOGRÁFICO

Figura 1. Friedrich Fröbel (1782 – 1852)

Friedrich Fröbel nació en Oberweisbach (Alemania) el 21 de abril de 1782. Su padre era el pastor luterano de la villa y su madre murió cuando Federico tenía unos nueve meses.

Resumimos sus datos biográficos más relevantes en el cuadro siguiente:

- **1792 – 1797**. Vive con su tío en la ciudad de Stadt Ilm.
- **1797 – 1799**. Vuelve al hogar paterno.
- **1799 – 1801**. Estudia Matemáticas y Botánica en Jena.
- **1802 – 1805**. Trabaja como agrimensor.
- **1805**. Se instala en Frankfurt para dedicarse a la arquitectura. Sin embargo, contacta con el director de una escuela normal que le convence para que se dedique a la enseñanza.
- **1808 – 1810**. Trabaja con Johann Heinrich Pestalozzi (1746 – 1827) en Yverdon-les-Bains (Suiza).
- **1811 – 1813**. Acaba sus estudios universitarios en la Universidad de Gottingen. En dicha institución se dedica al estudio de diversas lenguas (hebreo, árabe, persa), física, química, mineralogía, historia natural y astronomía.
- **1813 – 1814**. Participa en las campañas contra Napoleón, formando parte del Cuerpo de Lutzow[1].
- **1814 – 1816**. Trabaja como conservador en el Museo de Mineralogía de Berlín.
- **1818**. El 20 de septiembre se casa con Wilhelmine Henriette Hoffmeister (1780 – 1839).
- **1820**. Publica el folleto *A nuestro pueblo alemán* (*An unser deutsches Volk*).
- **1826**. Publica *La educación del hombre* (*Die Menschenerziehung*).
- **1831 – 1837**. Vive en Suiza y funda un centro educativo en Wartensee (Lucerna).

[1] Fuerza armada voluntaria del ejército de Prusia durante las Guerras Napoleónicas.

- **1837**. Regresa a Alemania, se dedica a la educación preescolar y fabrica materiales de juego en Bad Blankenburg. En dicha ciudad funda el Instituto de Actividades para párvulos.
- **1838 – 1840**. Publica la revista *Ein Sonntagsblatt für Gleichgesinnte.*
- **1851**. Se casa con Louise Levin.
- **1852.** Muere en Marienthal el 21 de junio.
  (Wiebé, 1896)

Figura 2. Medalla de bronce dedicada a Friedrich Fröbel (1927)

LA QUINTA CAJA DE FRÖBEL

En líneas precedentes ya hemos dicho que, para fomentar la capacidad creadora de los niños, Fröbel diseñó un material escolar lúdico [= dones = regalos = gifts = fröbelgaben] que se describe en el manual *The Kindergarten Guide* (Kraus-Boelté & Kraus, 1877), resultado de veinte años de experiencia en los jardines de infancia de Alemania, Inglaterra y América, publicado por Maria Kraus-Boelté (1836 – 1918) y su esposo John Kraus (Gutiérrez Zuluaga, 1970) [2].

---

[2] Fröbel describió el uso de algunos de sus regalos en su revista *Ein Sonntagsblatt für Gleichgesinnte* (1838 – 1840) que no hemos podido consultar.

Figura 3. John Krauss y Maria Kraus-Boelté

Entre dichos «regalos» hemos seleccionado, por su interés didáctico, la caja de construcción nº 5 en la que se incluye un cubo 3 × 3 × 3, formado por veintiún cubos unitarios, seis prismas triangulares grandes (mitades de cubos unitarios) y doce prismas triangulares pequeños (cuartas partes de cubos unitarios). En total, treinta y nueve piezas[3].

---

[3] Además de esta caja, Fröbel incluye entre su material didáctico tres cubos como los que se detallan en las figuras siguientes:

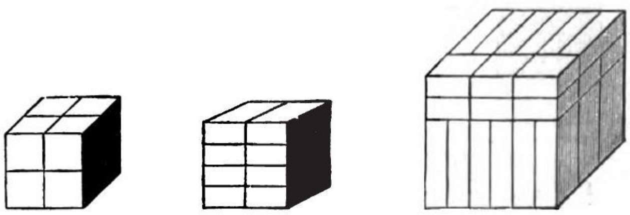


Figura 4. La caja de construcción nº 5

La quinta caja de Fröbel y algunas cuestiones elementales sobre fracciones

[1] Por manipulación de las piezas intervinientes los niños pueden descubrir fácilmente que con dos prismas grandes se construye un cubo unitario y que con cuatro prismas pequeños también.

En otras palabras: un cubo unitario es el doble de un prisma grande (un prisma grande es la mitad de un cubo unitario), un cubo unitario es cuádruplo de un prisma pequeño (un prisma pequeño es la cuarta parte de un cubo unitario). Así las cosas, las piezas de este fröbelgaben permiten introducir en los niños la idea de unidad, mitad (doble) y cuarta parte (cuádruplo).

Por consiguiente, si cada cubo unitario se designa por 1, entonces cada uno de los seis prismas triangulares grandes se designará por 1/2 y cada uno de los doce prismas triangulares pequeños por 1/4.

Luego, comparando los tamaños de los antedichos cuerpos geométricos, resulta claro que:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1$$

Tampoco es difícil comprobar los resultados siguientes:

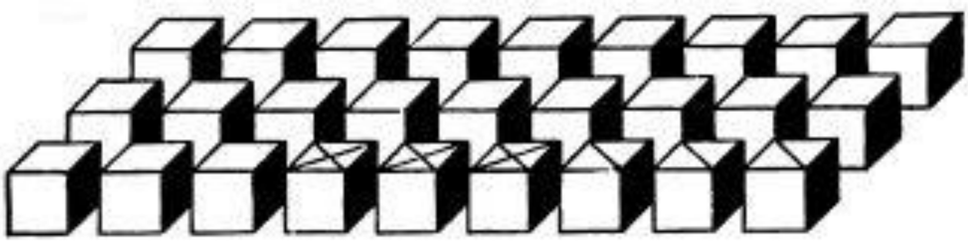
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

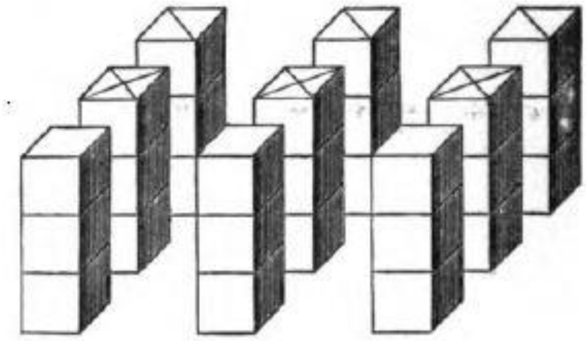
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

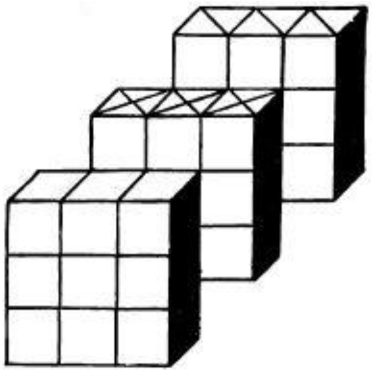
[2] Por otro lado, cada cubo unitario es 1/27 del cubo completo.



Cada una de las columnas de la figura adjunta representa 1/9 del cubo original.



Cada una de las tres capas siguientes representa 1/3 del cubo 3 × 3 × 3.



Por simple inspección se observa que 1/3 es triple de 1/9, y que 1/9 es triple de 1/27. Por tanto, con las piezas de la caja nº 5 se pueden introducir los conceptos de triple y tercera parte.

Además, a partir de los diagramas anteriores se puede establecer la siguiente ordenación de fracciones:

$$\frac{1}{27} < \frac{1}{9} < \frac{1}{3}$$

También es fácil descubrir que:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{3}{27}$$

Por otro lado, no reviste dificultad alguna «efectuar» las adiciones y sustracciones siguientes:

$$\frac{3}{27}+\frac{2}{9}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{5}{9}=\frac{3}{9}+\frac{5}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\frac{9}{27}-\frac{1}{9}=\frac{3}{9}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{3}{9}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

Con lo visto hasta aquí, podemos afirmar que con el material didáctico que estamos analizando se pueden introducir en los niños conceptos tales como doble, mitad, triple, tercera parte, cuádruplo y cuarta parte; también se pueden trabajar con él las ordenaciones, equivalencia y operaciones elementales (adición y sustracción) de fracciones (Meavilla Seguí, 2008).

La quinta caja de Fröbel y algunas cuestiones elementales sobre Geometría

Figura 5. La caja de construcción nº 5

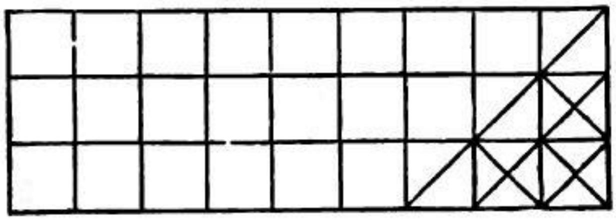
[a] Con los tres tipos de piezas de la caja, los niños y niñas de preescolar pueden iniciar un paseo por el mundo de las figuras y cuerpos geométricos.

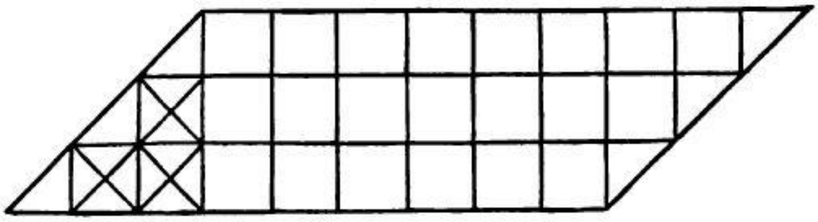
Así, en el mundo 2D, los más pequeños tomarán contacto con las figuras triangulares, rectangulares y cuadradas y con sus elementos básicos (lados. vértices, ángulos).

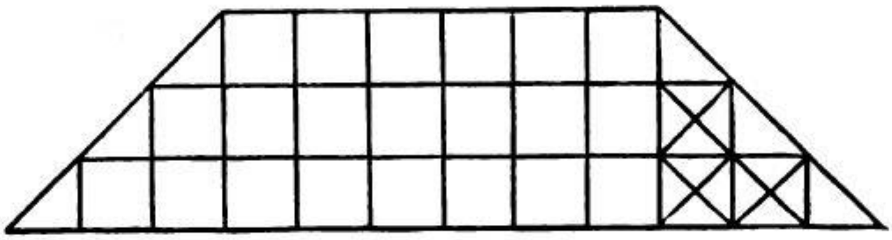
Al mismo tiempo, en el universo 3D, los aprendices convivirán con un par de cuerpos geométricos, los cubos y los prismas triangulares, y con sus elementos constituyentes (caras, vértices y aristas).

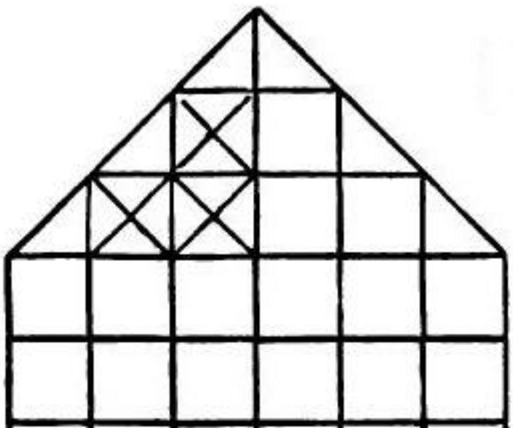
[b] Acoplando de forma conveniente las piezas del material en estudio, los «usuarios» del Jardín de Infancia pueden materializar diversas estructuras que les pueden familiarizar con algunos polígonos.

Por ejemplo, las siguientes construcciones con todas las piezas del puzle, permiten visualizar tres cuadriláteros (rectángulo, romboide y trapecio isósceles) y un pentágono.

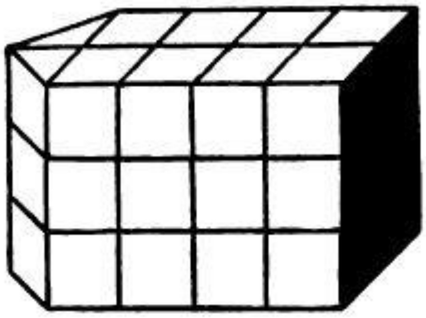


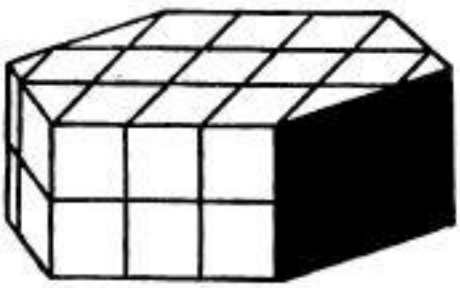


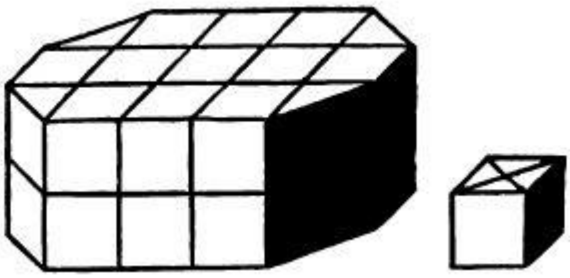




[c] También se pueden construir bloques con más de un piso, algunas de cuyas caras son pentágonos, hexágonos y octógonos.



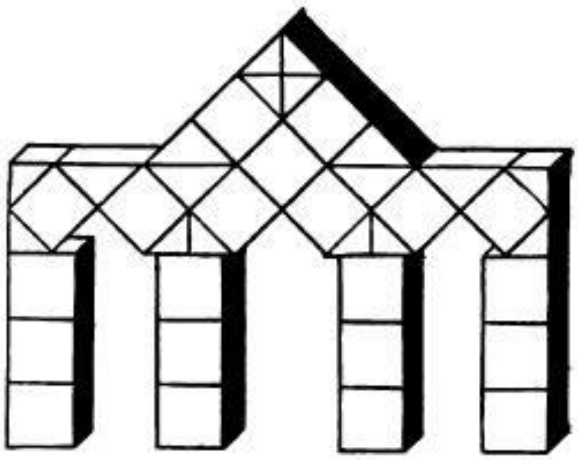


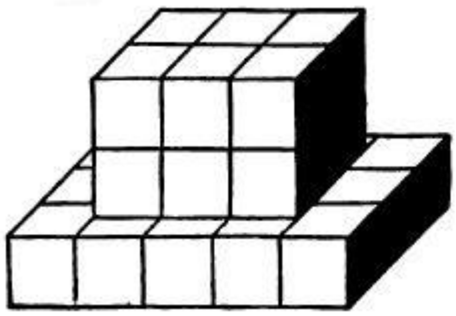


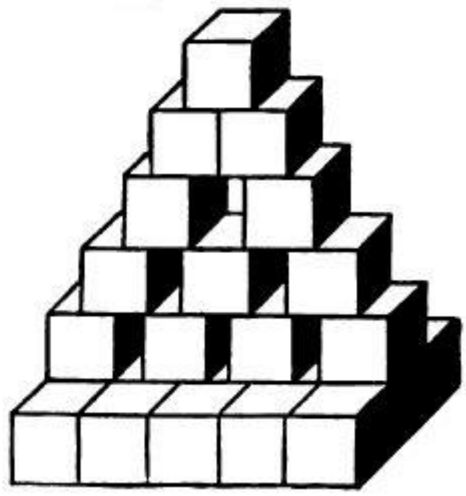
La creatividad al poder

Además de sus aplicaciones a la enseñanza de la Aritmética y la Geometría la caja nº 5 de Fröebel se puede usar para crear (reproducir) objetos tridimensionales.

Ofrecemos algunos ejemplos construidos con todas las piezas del puzle.







GEOMETRÍA PARA ALUMNOS MÁS AVANZADOS

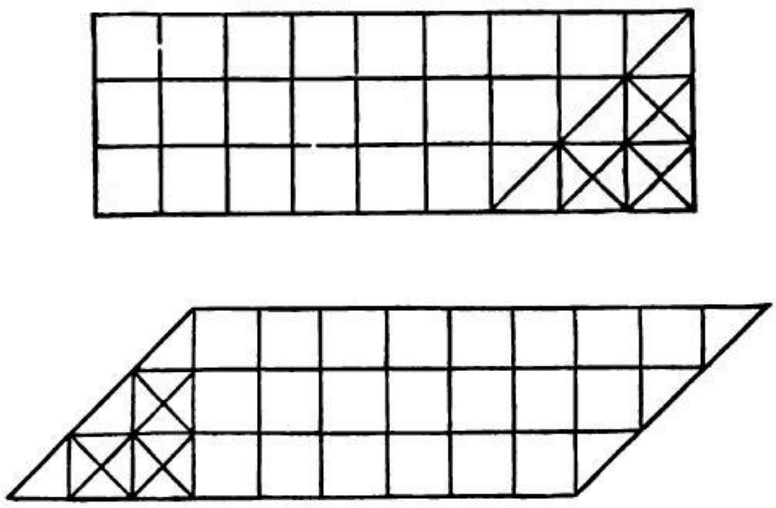
Para los alumnos de cursos más avanzados, el material de Fröbel puede ser útil para introducir, afianzar o demostrar algunos asuntos de carácter geométrico (Meavilla Seguí, 2008).

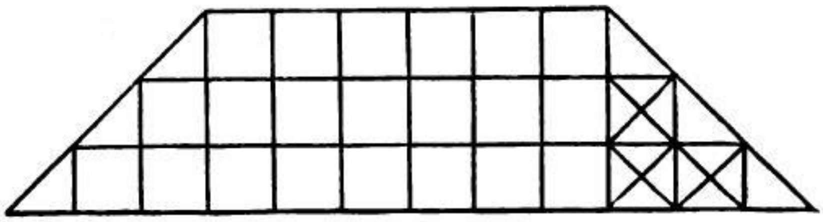
[α] EQUIVALENCIA Y EQUICOMPOSICIÓN DE FIGURAS

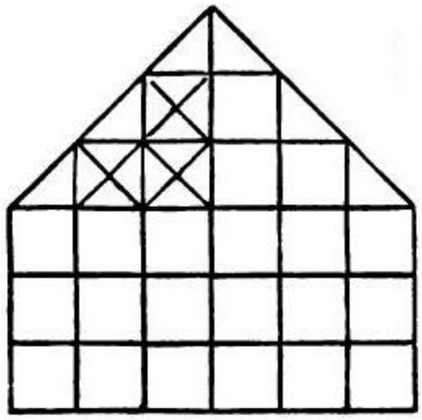
Dos figuras se llaman equicompuestas si dividiendo una de ellas en un número finito de partes, se puede (disponiendo dichas partes de otra manera) componer con ellas una segunda figura.

Por otro lado, dos figuras se dicen equivalentes si tienen la misma área.

Así, por ejemplo, los «polígonos» de la figura siguiente, construidos con las treinta y nueve piezas de la caja nº 5 de Fröbel, son equicompuestos.



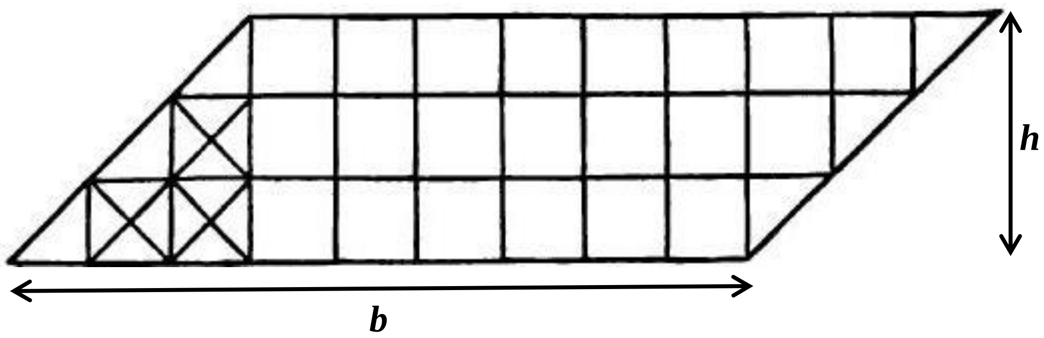




Además, es claro que todos ellos tienen la misma área. Por consiguiente, son equivalentes.

Por tanto, mediante la consideración de estos cuatro ejemplos se intuye el teorema siguiente: Dos polígonos equicompuestos cualesquiera son equivalentes[4].

[β] ÁREA DE UN ROMBOIDE

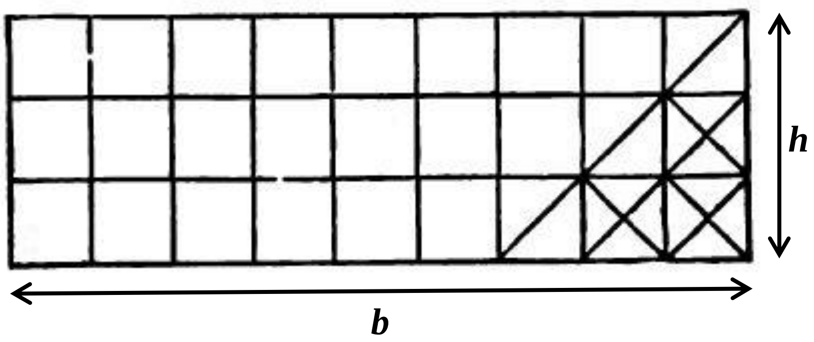


En la figura anterior se representa un «romboide» construido con todas las piezas del rompecabezas de Fröbel. La longitud de su base es *b* y la de su altura es *h*.

Cambiando la posición del triángulo rectángulo isósceles (formado por doce prismas pequeños y tres grandes) se obtiene el «rectángulo» del diagrama adjunto.

---

[4] El teorema recíproco, conocido como teorema de Bolyai-Gerwien, dice así: *Dos polígonos equivalentes son equicompuestos* (Boltianski, 1981).

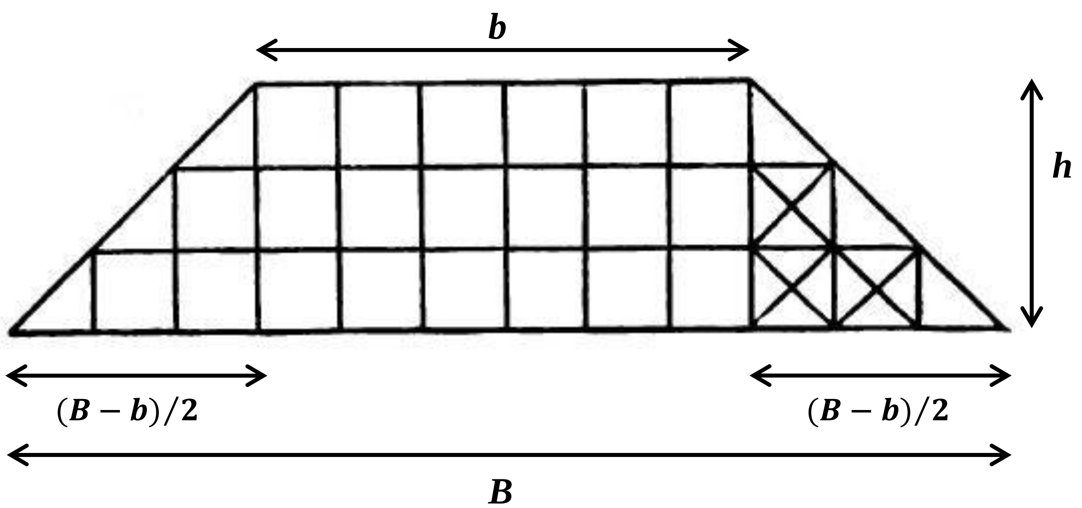


Teniendo en cuenta que los dos cuadriláteros son equivalentes y que el área del rectángulo es igual a $b \times h$, resulta que el área del romboide también es igual a $b \times h$.

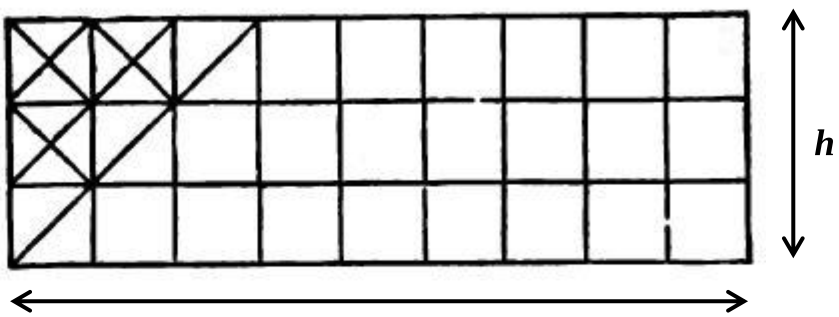
[γ] ÁREA DE UN TRAPECIO ISÓSCELES

En la figura siguiente se representa un «trapecio» isósceles construido con todas las piezas del puzle de Fröbel.

La longitud de su base mayor es B, la de su base menor es b y la de su altura h.



Cambiando la posición del triángulo rectángulo isósceles (formado por doce prismas pequeños y tres grandes) se obtiene el «rectángulo» del diagrama adjunto.



$$B - \frac{B-b}{2} = \frac{2B - B + b}{2} = \frac{B+b}{2}$$

Teniendo en cuenta que los dos cuadriláteros son equivalentes y que el área del rectángulo es igual a:

$$\left(\frac{B+b}{2}\right) \times h,$$

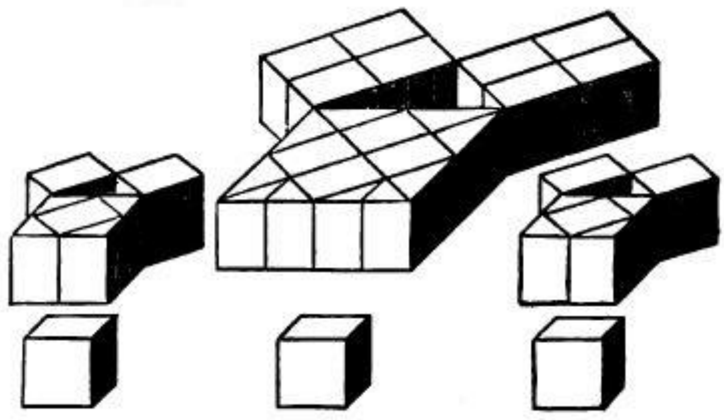
es claro que el área del trapecio (A) también es igual a:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}\right) \times \boldsymbol{h}$$

[δ] EL TEOREMA DE PITÁGORAS

El famoso y popular Teorema de Pitágoras [= «teorema de la mujer casada» = «pons asinorum» = «la silla de la novia» = «teorema del cuadrado sobre la hipotenusa»] también se puede visualizar, para algunos casos concretos, con las piezas de nuestro rompecabezas.

Así, en el dibujo adjunto, se prueba el antedicho teorema para los triángulos rectángulos isósceles $\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$ y $\left(2, 2, 2\sqrt{2}\right)$.



REFLEXIONES FINALES

En las secciones precedentes hemos estudiado, desde una óptica matemática, las posibilidades didácticas de un rompecabezas de treinta y nueve piezas diseñado en el siglo XIX por el pedagogo alemán Friedrich Fröbel y dirigido a los niños y niñas del *Kindergarten*.

Sin pretender agotar todo el potencial educativo de dicho material y ampliando el grupo de sus posibles destinatarios, hemos ofrecido el siguiente catálogo de conceptos y procedimientos aritmético-geométricos que se pueden trabajar con el *Fröbelpuzle*:

- Unidad, doble, mitad, triple, tercera parte, cuádruplo y cuarta parte.
- Ordenación de fracciones.
- Fracciones equivalentes.
- Adición y sustracción de fracciones.
- Figuras geométricas (rectángulo, romboide, trapecio isósceles, pentágono, hexágono y octógono).
- Cuerpos geométricos (cubos y prismas triangulares).
- Equivalencia y equicomposición de figuras.
- Área de un romboide.
- Área de un trapecio isósceles.

- Teorema de Pitágoras.

Dejamos que nuestros colegas, los profesores de Matemáticas, profundicen en el estudio de dicho material didáctico y hagan partícipes a sus alumnos del placer de trabajar e investigar con él.

REFERENCIAS

Boltianski, V.G. (1981). *Figuras equivalentes y equicompuestas*. Editorial MIR.

Gutiérrez Zuluaga, I. (1970). *Historia de la Educación (Tercera edición)*. ITER Ediciones.

Kraus-Boelté, M. & Kraus, J. (1877). *The Kindergarten Guide (First Volume: The Gifts)*. E. Steiger & Co.

Meavilla Seguí, V. (2008). *Aspectos históricos de las matemáticas elementales (Segunda edición)*. Prensas Universitarias de Zaragoza.

Wiebé, E. (1896). *Paradise of Childhood.* Milton Bradley

Vicente Meavilla Seguí
Catedrático jubilado, España
vmeavill@hotmail.com

Sánchez Mendías, J., Segovia Alex, I. y Miñán Espigares, A. (2022). Influencia del género y el rendimiento en la autoconfianza hacia las matemáticas en futuros maestros de Educación Primaria. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 5*(2), 15-30

ISSN: 2603-9982

INFLUENCIA DEL GÉNERO Y EL RENDIMIENTO EN LA AUTOCONFIANZA HACIA LAS MATEMÁTICAS EN FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Javier Sánchez Mendías, Universidad de Granada, España

Isidoro Segovia Alex, Universidad de Granada, España

Antonio Miñán Espigares, Universidad de Granada, España

Resumen

Las actitudes de los docentes pueden incidir en los procesos de enseñanza-aprendizaje vinculados a los contenidos matemáticos. El objetivo de este trabajo fue establecer perfiles de autoconfianza hacia las matemáticas en futuros maestros y determinar la incidencia que tienen el género y el rendimiento matemático en esta actitud. Siguiendo una metodología cuantitativa no experimental, se realizó un análisis multivariante, conformándose tres perfiles de baja, media y alta autoconfianza siendo, este último, el menos representativo y un análisis inferencial que reflejó la existencia de significatividad estadística entre las variables estudiadas. Entendemos que se deben adoptar medidas para mejorar la autoconfianza hacia las matemáticas de los futuros docentes para que la enseñanza de esta materia sea más exitosa.

Palabras clave: *actitud; confianza; educación primaria; formación de profesores; matemáticas; rendimiento.*

Influence of gender and achievement on self-confidence towards mathematics in future elementary teachers

Abstract

Teachers' attitudes can affect the teaching-learning processes linked to mathematical content. The objective of this work was to establish profiles of self-confidence towards mathematics in future teachers and to determine the incidence that gender and mathematical achievement have on this attitude. Following a non-experimental quantitative methodology, a multivariate analysis was carried out, forming three profiles of low, medium and high self-confidence, the latter being the least representative, and an inferential analysis that reflected the existence of statistical significance in the variables studied. We understand that measures must be taken to improve the self-confidence towards mathematics of future teachers so that the teaching of this subject is more successful.

Keywords: *attitude; confidence; mathematics; elementary education; teacher training; achievement.*

Recibido: 23/02/2022; Aceptado: 21/06/2022

INTRODUCCIÓN

En la investigación educativa se ha prestado una especial atención, durante los últimos años, al estudio de las actitudes de los sujetos implicados en los procesos de enseñanza-aprendizaje vinculándose a distintas áreas de conocimiento y considerando las diferentes etapas educativas.

Dentro de estas investigaciones, algunas se han orientado al conocimiento y al análisis de las actitudes hacia a las matemáticas entre el alumnado universitario (Döfer y Ulloa, 2016; Mato-Vázquez et al., 2018; Maz-Machado et al., 2015; Montero et al., 2015; Pedrosa-Jesús, 2020; Pérez Tyteca, 2012).

Igualmente, dentro de este colectivo universitario, existen trabajos específicamente vinculados al estudio de las actitudes hacia esta materia entre los docentes en formación.

En futuros docentes, Ward (2020) estudia la relación entre la ansiedad y la autoeficacia; Sánchez Mendías et al. (2020) analizan la correlación entre la ansiedad y la autoconfianza; Ávila-Toscano et al. (2020) establecen perfiles de dominio afectivo considerando actitudes, ansiedad y creencias; Pedrosa-Jesús et al. (2020) investigan diferentes actitudes destacando la ansiedad, la utilidad y la confianza; Alsina y López (2019) estudian la disposición y seguridad para enseñar matemáticas; Léon-Mantero et al. (2019) analizan los factores dimensionales de la actitud vinculados a utilidad, ansiedad, agrado, motivación y confianza; Nortes y Nortes (2019) estudian la relación entre ansiedad y rendimiento; Ampofo (2019) vincula la autoeficacia y el rendimiento; Nortes y Nortes (2017b) relacionan la competencia matemática, actitud y ansiedad; Bjerke, (2017) investiga los factores que mejoran la autoeficacia; Casis et al. (2017) analizan la motivación, la confianza y la ansiedad; Soneira et al. (2016) trabajan las relaciones entre las dimensiones de actitud vinculadas con la percepción, el agrado y la competencia y, finalmente, Madrid et al. (2016) se centran en el estudio de las actitudes de agrado y utilidad.

Asimismo, el género ha sido una variable que con frecuencia se ha vinculado al estudio de las actitudes. De hecho su influencia en el desarrollo de actitudes hacia las matemáticas se ha considerado en la Educación Primaria (Beilock et al., 2010; Valle et al., 2016), en la Educación Secundaria (Agüero et al., 2017; Charles, 2017; González-Pienda et al., 2012; INEE, 2015) y entre los futuros maestros (Gómezescobar y Fernández Cézar, 2018; Jacobs y Durandt, 2016; Madrid et al., 2015; Nortes y Nortes, 2013, 2017a; Pedrosa-Jesús, 2020; Pérez Tyteca, 2012).

En cuanto al rendimiento matemático, conviene recordar que los datos publicados en el último Informe PISA 2018 sobre el rendimiento del alumnado español en competencia matemática en niveles de Secundaria, lo sitúan por debajo de la media de la OCDE (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2019). Esta situación se repite en los alumnos de Educación Primaria según ponen de manifiesto los resultados de TIMSS 2019 (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2020). Es necesario analizar las causas que subyacen para que este nivel competencial no evolucione positivamente. Una de ellas puede tener su origen en las actitudes negativas que los docentes manifiestan al impartir esta materia, destacando entre ellas, la falta de autoconfianza hacia su enseñanza.

En este mismo sentido, conviene destacar que, en la mayor parte de los países participantes en PISA y TIMSS, se refleja que entre los alumnos con buen rendimiento, las chicas rinden menos que los chicos y, en general, se les atribuye una menor confianza para la resolución de problemas matemáticos (INEE, 2015; Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2020).

Bausela (2019) realiza un estudio predictivo del rendimiento matemático en PISA analizando la atribución del fracaso escolar en matemáticas. En él señala que una de las variables, que tiene mayor peso en la ecuación de predicción del rendimiento en matemáticas de los alumnos de la E.S.O., es la relacionada con la atribución del fracaso al docente al considerar que este no explica bien los conceptos.

Mato y De la Torre (2010) señalan que la posible influencia del profesorado en la formación de actitudes hacia las matemáticas es un hecho y que estas pueden presentar una orientación positiva o negativa. Del mismo modo, se ha puesto de manifiesto la relación existente entre las actitudes del profesorado que enseña matemáticas y el desarrollo las mismas entre el alumnado (Dowker et al., 2016; Fennema, 1989; Gómez-Chacón, 2000; Gresham, 2018; Hembree, 1990; Hidalgo et al., 2006; Mensah et al., 2013; Philipp, 2007; Schenkel, 2009; Sloan et al., 2002).

Tsao (2014) destaca que los maestros en formación desarrollan actitudes negativas hacia las matemáticas que son debidas a una débil base matemática, a sus experiencias previas con las matemáticas, la falta de apoyo de sus familias y el efecto de sus clases de matemáticas anteriores.

En esta misma línea, Alsina y López (2019), analizan la disposición y la seguridad para enseñar matemáticas en 141 futuros maestros de Educación Infantil y Primaria, concluyendo que un 45% de la muestra se siente más inseguro para enseñar matemáticas que otras disciplinas.

Fennema y Sherman (1976) conceptualizaron la autoconfianza hacia las matemáticas como aquella actitud que un sujeto tiene en su propia capacidad para aprender y desempeñar satisfactoriamente una tarea matemática. Por otro lado, Castro de Bustamante (2002) indica que la autoconfianza de una persona hacia las matemáticas puede ser provocada, entre otras causas, por la habilidad que el sujeto presente respecto a las matemáticas.

Por consiguiente, el grado de autoconfianza de los sujetos respecto a las matemáticas puede ser uno de los factores afectivos de mayor influencia sobre su capacidad para aprender y enseñar esta materia. Por ello, es una actitud frecuentemente utilizada para explicar las diferencias existentes en los sujetos respecto al rendimiento, al desempeño y a la participación en matemáticas (Leung y Man, 2005; Malmivuori, 2001; Peker y Ulu, 2018).

Los docentes implicados en la formación matemática de los estudiantes son uno de los agentes que mayor influencia poseen en el aprendizaje de las matemáticas (Casis et al., 2017). Por ello, es especialmente significativo que exista un número elevado de futuros docentes que reflejen, en su formación universitaria, actitudes negativas hacia esta disciplina e indiquen, a nivel individual, que tienen limitaciones para aprender matemáticas desde su Educación Primaria (Segovia, 2008).

Montero et al. (2015) subrayan la importancia de llevar a cabo metodologías didácticas basadas en la significatividad de los contenidos y en la promoción de los cambios curriculares, para adecuar las estrategias pedagógicas y fomentar una actitud positiva hacia las matemáticas que aumente la confianza y la seguridad en la aplicación de los conocimientos matemáticos.

En este contexto, consideramos que conocer los distintos tipos de perfiles de maestros en formación, en función de su grado de autoconfianza hacia las matemáticas, y analizar la incidencia que pueden tener en la misma el género y el rendimiento matemático previo, puede favorecer la realización de acciones concretas orientadas a reforzar esta actitud y fomentar dicha autoconfianza dentro de la formación recibida en el Grado en Educación Primaria.

MÉTODO

En esta investigación, la metodología empleada pertenece a una modalidad cuantitativa no experimental denominada en su conjunto como investigación descriptiva.

Objetivos

Establecer perfiles de sujetos, en función del grado de autoconfianza hacia las matemáticas, entre los futuros maestros de Educación Primaria.

Analizar las diferencias en la autoconfianza hacia las matemáticas respecto al género entre los futuros maestros de Educación Primaria.

Determinar la influencia del rendimiento matemático previo en la autoconfianza hacia las matemáticas de los futuros maestros de Educación Primaria.

Participantes

Formaron parte de esta investigación 488 estudiantes matriculados en el primer curso de la titulación de Grado en Educación Primaria de la Universidad de Granada durante el comienzo del curso académico. De este modo, la muestra quedó conformada por 488 sujetos (N=488) de los cuales el 38,1% eran hombres y el 61,9% mujeres. En cuanto a la edad, hay que destacar que entre 18 y 20 años se encuentra el 74,40%, entre 21 y 30 años el 23,6% y con más de 30 años el 2% restante.

Instrumento

El instrumento seleccionado para la medición de la autoconfianza hacia las matemáticas ha sido la escala de Fennema y Sherman (1976), entendiendo que esta actitud es una variable que condiciona la motivación con la que el sujeto afronta el proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos y puede afectar a la vinculación académica del sujeto respecto a esta materia.

Se trata de una escala tipo Likert compuesta por 12 ítems en la que se distinguen dos subescalas de actitud:

- Autoconfianza como disciplina, conformada por 10 ítems que incluyen cuestiones relativas a la realización de tareas matemáticas, la capacidad matemática, la percepción del logro y el autoconcepto matemático.
- Autoconfianza como asignatura comparada, que incluye 2 ítems relativos al rendimiento matemático versus académico y a la estigmatización negativa de las matemáticas respecto a otras materias.

Su validez y fiabilidad está ampliamente contrastada siendo un referente dentro de la investigación de las actitudes hacia las matemáticas (Nortes y Nortes, 2019; Sánchez Mendías et al., 2020; Segarra y Pérez Tyteca, 2017).

No obstante, para volver a determinar la consistencia interna de la escala, se calculó el coeficiente Alfa de Cronbach mediante el paquete informático SPSS Statistics 25 IBM obteniendo un valor α= 0,947.

Del mismo modo, en el cuestionario elaborado, se solicitó a los sujetos que indicaran su sexo y si habían suspendido alguna vez la asignatura de matemáticas durante la Enseñanza Secundaria como forma de describir su rendimiento matemático.

Procedimiento

El cuestionario se aplicó durante el primer semestre y se administró, con la colaboración del profesorado, a los estudiantes de primer curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Granada. Con anterioridad a su cumplimentación, se les pidió objetividad y honestidad en sus respuestas ya que estas eran anónimas. El tiempo máximo establecido para la realización del cuestionario fue de quince minutos.

Análisis de datos

De cada participante se han recogido datos relativos a tres variables: la autoconfianza hacia las matemáticas, el género y el rendimiento matemático. Para la realización de los cálculos de los estadísticos descriptivos (medias, desviaciones típicas, valores máximos y mínimos y frecuencias), el análisis multivariante en la determinación de conglomerados o clústeres y el análisis inferencial de la varianza ANOVA para el conocimiento de la influencia de las variables estudiadas en la autoconfianza hacia las matemáticas, se utilizó el paquete SPSS, versión 25.

RESULTADOS

Autoconfianza hacia las matemáticas

A continuación, se muestran las puntuaciones medias y las desviaciones típicas de la escala de actitud "Autoconfianza hacia las matemáticas" siendo obtenida a partir de la suma de los valores medios de cada uno de los ítems que la integran cuyos valores van de 1 a 5. De esta forma, al incluir 12 ítems, se podrá obtener un valor mínimo de autoconfianza de 12 y un máximo de 60.

Tabla 1. *Estadísticos descriptivos de la escala de Autoconfianza hacia las matemáticas*

	N	Mínimo	Máximo	Media	D.T.
Autoconfianza hacia las matemáticas (Ítems 1-12)	488	12,00	60,00	39,79	12,16

En la tabla 1, se observa que la media obtenida (39,79 sobre un máximo de 60) viene a señalar que los sujetos evaluados tienen un nivel medio de autoconfianza hacia las matemáticas. Del mismo modo, la desviación típica obtenida refleja que existe una dispersión significativa en los datos recogidos (12,16).

Análisis clúster de la Autoconfianza hacia las matemáticas

La realización de este análisis, teniendo en cuenta las puntuaciones de los 12 ítems incluidos en la escala de actitud de "Autoconfianza hacia las matemáticas", ha dado lugar a tres conglomerados o grupos de sujetos que presentan características comunes que los diferencian del resto. De esta forma, se constituyen tres perfiles de sujetos.

En la tabla 2, se muestran los resultados obtenidos pudiendo apreciarse como el perfil 1, conformado por el 28,07% de los sujetos, cuya media es de 24,69 y su desviación típica de 12,18, se caracteriza por poseer una baja autoconfianza hacia las matemáticas algo que no favorece su relación con esta disciplina a nivel educativo.

Por otro lado, el perfil 2, con una media de 39,75 y una desviación típica de 12,15, reúne al 41,40% de los sujetos, quienes presentan una autoconfianza media hacia las matemáticas. Esto pone de manifiesto que presentan algunas limitaciones o carencias dentro de su nivel de confianza personal en su relación con las matemáticas.

En última instancia, presentando una media de 53,75 y una desviación típica de 12,19, encontramos el perfil 3, que incluye al 30,53% de los sujetos y representa una alta confianza hacia las matemáticas. Esto implica que representa una actitud favorable hacia la disciplina y a los procesos de enseñanza-aprendizaje en los que estén presentes contenidos de naturaleza matemática.

Tabla 2. *Resultados del análisis clúster de la escala "Autoconfianza hacia las matemáticas*"

Perfil de autoconfianza	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Perfil 1 - Baja	137	28,07	28,07	28,07
Perfil 2 - Media	202	41,40	41,39	69,46
Perfil 3 - Alta	149	30,53	100,00	100,00
Total	488	100,00	100,00	100,00

Según estos datos, sólo tres de cada diez futuros maestros presentan un nivel de confianza adecuado para afrontar su práctica educativa con una buena predisposición hacia las matemáticas.

Asimismo, se realizó un análisis de estos perfiles, en función del género, para conocer el porcentaje de hombres y de mujeres que formaban parte de cada uno de los perfiles teniendo en cuenta que la muestra inicial estaba conformada por 186 hombres y 302 mujeres (N=488). Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. *Resultados del análisis clúster de la "Autoconfianza hacia las matemáticas" en función del género.*

Género	Perfil de autoconfianza	N	%	% Válido	% Acumulado
Hombre	Perfil 1-Baja	33	17,75	17,75	17,75
	Perfil 2-Media	83	44,02	44,02	61,77
	Perfil 3-Alta	70	37,63	37,63	100,00
	Total	186	100,00	100,00	100,00
Mujer	Perfil 1-Baja	104	34,44	34,44	34,44
	Perfil 2-Media	119	39,40	39,40	73,80
	Perfil 3-Alta	79	26,16	26,16	100,00
	Total	302	100,00	100,00	100,00

El perfil 1, que hemos definido "Autoconfianza baja", lo integran en total 137 futuros docentes e incluye a 104 mujeres que representan el 34,44% del total de futuras maestras y a 83 hombres que representan el 17,74% del total de futuros maestros.

Dentro del perfil 2, definido "Autoconfianza media", se incluyen 202 futuros docentes en total de los cuales 119 son mujeres que representan el 39,40% del total de mujeres y 33 hombres que representan el 44,02% de la parte masculina de la muestra.

Finalmente, en el perfil 3 de "Autoconfianza alta" se integran 79 mujeres que representan el 26,16% de la representación femenina en la muestra y 70 hombres que representan el 37,63% del total de varones.

Es observable que, en ambos grupos de sujetos, la mayoría se integra en el perfil 2 de autoconfianza media con porcentajes similares 39,40 y 44,02 aunque ligeramente superior en el caso de los hombres. Sin embargo, las diferencias obtenidas en los perfiles 1 y 3 de baja y alta autoconfianza respectivamente sí son destacables. En el caso del perfil 1, que sería el menos adecuado para una buena práctica docente, el porcentaje de mujeres (34,44) duplica al de hombres (17,74). Del mismo modo, en el perfil 3, el porcentaje de varones (37,63) se distancia notablemente del que representa a las mujeres (26,16). Estos datos son importantes si consideramos que la presencia femenina en esta actividad profesional es mayoritaria.

Análisis a nivel inferencial de la autoconfianza hacia las matemáticas

A continuación, se presentan los análisis realizados para determinar la posible influencia, en la autoconfianza hacia las matemáticas de los futuros maestros, de las variables:

- género
- rendimiento matemático.

Autoconfianza hacia las matemáticas y el género

La variable género, en su relación con la autoconfianza hacia las matemáticas, se ha trabajado con la escala general de autoconfianza y con las dos subescalas de actitud que la conforman: autoconfianza como capacidad percibida y autoconfianza como asignatura comparada.

En la tabla 4 están representados los resultados de las puntuaciones medias obtenidas por los sujetos, tanto en la escala "Autoconfianza hacia las matemáticas" como en cada una de las subescalas que la componen, en función de la variable género, así como los datos de significatividad obtenidos a partir de la prueba T para la igualdad de medias con valores de t, con o sin igualdad de varianzas.

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto que la puntuación de la media obtenida por los hombres (42,91) es superior a la de las mujeres (37,87) en la escala de actitud de "Autoconfianza hacia las matemáticas". Por consiguiente, los hombres presentan un nivel de autoconfianza superior al de las mujeres.

En la subescala de "Autoconfianza hacia las matemáticas como capacidad percibida", los datos reflejan que los hombres (35,61) obtienen un valor de la media y, por ende, un nivel de autoconfianza superior al de las mujeres (31,40).

Igualmente, los resultados conseguidos por los hombres en la subescala "Autoconfianza hacia las matemáticas como asignatura comparada" reflejan que la puntuación media obtenida por estos (7,30) es más elevada que la puntuación media obtenida por las mujeres (6,47). Así pues, la autoconfianza de los hombres es nuevamente mayor que la de las mujeres en este caso.

Tabla 4. *Estadísticos de grupo de la Autoconfianza hacia las matemáticas y Prueba T respecto al género.*

	Género	N	Media	Prueba T para la igualdad de medias	
				t	Sig. (bilateral)
Autoconfianza hacia las matemáticas (12 ítems)	Hombre	186	42,91	4,53	0,00
	Mujer	302	37,87	4,62	
Autoconfianza como capacidad percibida (10 ítems)	Hombre	186	35,61	4,72	0,00
	Mujer	302	31,40	4,80	
Autoconfianza como asignatura comparada (2 ítems)	Hombre	186	7,30	3,30	0,00
	Mujer	302	6,47	3,38	

Para determinar si las diferencias obtenidas, entre las puntuaciones medias de la escala de actitud de "Autoconfianza hacia las matemáticas", las dos subescalas que integra y el género, pueden ser significativas, se ha realizado la Prueba T para la igualdad de las medias, reflejando los resultados que el género del sujeto tiene incidencia en las puntuaciones obtenidas, tanto en la escala de "Autoconfianza hacia las matemáticas" como en las dos subescalas estudiadas: "Autoconfianza hacia las matemáticas como capacidad percibida" y "Autoconfianza hacia las matemáticas como asignatura comparada". Esto supone que, entre los valores de las medias obtenidas por cada grupo, existe significatividad bilateral ($p \leq 0,05$), por lo que, en este caso, el género tendría que considerarse un factor de influencia en la autoconfianza hacia las matemáticas de los futuros maestros.

Autoconfianza hacia matemáticas y el rendimiento en matemáticas

Se realiza el estudio de la autoconfianza hacia las matemáticas de los sujetos tomando en consideración si suspendieron alguna vez esta asignatura durante su formación académica en la Enseñanza Secundaria siendo este, el factor establecido para considerar su rendimiento matemático. En Segovia (2008) se establece este criterio como medida de rendimiento académico.

Tabla 5. *Porcentajes y Frecuencias respecto a suspender matemáticas durante la Enseñanza Secundaria*

Suspenso	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Sí	180	36,89	36,89	36,89
No	308	63,11	100,00	100,00
Total	488	100,00	100,00	100,00

De los porcentajes y frecuencias, obtenidos respecto al rendimiento matemático, representados en la tabla 5, es llamativo que el 36,89% de los sujetos de la muestra manifiestan haber suspendido la asignatura de matemáticas.

Los resultados de los estadísticos descriptivos de la escala "Autoconfianza hacia las matemáticas", están incluidos en la tabla 6. En ellos, se observa que los sujetos que habían suspendido la asignatura de matemáticas durante la Enseñanza Secundaria obtuvieron una puntuación media en Autoconfianza más baja (32,48) que aquellos otros que no la suspendieron (44,07). Por consiguiente, los sujetos que han suspendido las matemáticas tienen una autoconfianza más baja que aquellos otros que no suspenden esta materia.

De la misma manera, en la subescala de "Autoconfianza hacia las matemáticas como capacidad percibida", la autoconfianza y la puntuación media, de los sujetos que manifiestan haber suspendido las matemáticas durante este periodo (27,40), es inferior a la de los sujetos que aprobaron esta materia en todos los cursos de esta etapa educativa (36,27).

Respecto a la subescala "Autoconfianza hacia las matemáticas como asignatura comparada", el grupo de sujetos que suspendió esta materia tiene una menor autoconfianza, con valor de la media (5,08) más bajo, mientras que los que no la suspendieron obtienen una autoconfianza y una puntuación media superior (7,79).

Para analizar si las diferencias observadas entre las puntuaciones medias obtenidas pueden ser significativas, en la escala de "Autoconfianza hacia las matemáticas" y respectivas subescalas, teniendo en cuenta que el sujeto suspendió las matemáticas durante su Enseñanza Secundaria, se ha realizado la Prueba T para la igualdad de las medias.

Tabla 6. *Estadísticos descriptivos de la Autoconfianza hacia las matemáticas y Prueba T sobre los suspensos de matemáticas en la E. Secundaria.*

				Prueba T para la igualdad de medias	
	Suspendió las Matemáticas	N	Media	t	Sig. (bilateral)
Autoconfianza hacia las matemáticas (12 ítems)	Sí	180	32,48	-11,41	0,00
	No	308	44,07	-11,21	
Autoconfianza como capacidad percibida (10 ítems)	Sí	180	27,40	-10,77	0,00
	No	308	36,27	-10,56	
Autoconfianza como asignatura comparada (2 ítems)	Sí	180	5,08	-12,07	0,00
	No	308	7,79	-11,90	

La tabla 6 muestra que estas diferencias son estadísticamente significativas tanto para la escala "Autoconfianza hacia las matemáticas" como para cada una de las dos subescalas que la componen "Autoconfianza hacia las matemáticas como capacidad percibida" y "Autoconfianza hacia las matemáticas como asignatura comparada". Esto supone que haber suspendido las matemáticas durante la Enseñanza Secundaria tiene influencia en la autoconfianza hacia las matemáticas que pueda presentar el sujeto.

CONCLUSIONES

El análisis multivariante muestra que el clúster de autoconfianza hacia las matemáticas más representativo es el de Autoconfianza media que agrupa al 41,39 % de los participantes. Estos resultados confirman los obtenidos en otros estudios previos (Casis et al., 2017; Kalder y Lesik, 2011; Pérez Tyteca, 2012; Pedrosa-Jesús et al., 2020; Perry, 2011; Nortes y Nortes, 2017a). No obstante, nuestro trabajo, al categorizar a los sujetos en perfiles, nos ayuda a ser más precisos a la hora de conocer el peso que cada grupo de autoconfianza tiene en el conjunto de la muestra.

Es significativo que menos de una tercera parte de la muestra estudiada (30,53%) presente un nivel de autoconfianza alto. Ávila-Toscano et al., (2020) obtienen también tres perfiles de futuros maestros atendiendo al dominio afectivo hacia las matemáticas y, al igual que en nuestro caso, el grupo menos representativo (28,6%) es el de alta autoconfianza que integra a sujetos autoeficaces y matemáticamente competentes.

Estos datos reflejan que son pocos los futuros docentes que presentan un nivel de autoconfianza hacia las matemáticas que favorezca su desarrollo profesional y muestre una actitud favorable para llevar a cabo una práctica docente en la que exista eficacia en la transmisión de contenidos y actitudes positivas hacia las matemáticas.

Esto supone que los futuros maestros precisan elevar sus niveles de autoconfianza para que, en su ejercicio profesional, no contribuyan al desarrollo actitudes negativas (Sánchez Mendías et al., 2020).

Este hecho es especialmente relevante dado que, trabajos de investigación previos (Ashby, 2009; Auzmendi, 1992; Hidalgo et al., 2006), ponen de relieve que las actitudes desfavorables hacia las matemáticas adquieren un mayor protagonismo, cuando el sujeto va progresando en su formación académica a través de las distintas etapas educativas ya que, inicialmente, suele mostrar una respuesta afectiva más favorable hacia esta disciplina. Por ello, como señala Koch (2019), los docentes de Educación Primaria deben formarse en la mejora de su autoconfianza para así aumentar la confianza de los estudiantes y mejorar su rendimiento, especialmente el tránsito de esta etapa a la Educación Secundaria.

En cuanto a la valoración de los resultados de la autoconfianza reflejada por los sujetos en función del género, se observan diferencias entre ambos grupos. Los datos señalan que los hombres se muestran más autoconfiados que las mujeres tanto en la escala de autoconfianza hacia las matemáticas como en las dos subescalas estudiadas.

Del mismo modo, en la diferenciación por género, se ven reforzados los resultados previos al existir las mayores diferencias entre ambos grupos de sujetos en los perfiles de autoconfianza baja (17,75% hombres frente a 34,44% mujeres) y autoconfianza alta (37,63% hombres frente a 26,16% mujeres)

Las causas que pueden justificar estas diferencias no están claramente definidas y se pueden contemplar diversos factores de incidencia entre los que destacan, los prejuicios sociales, el trato diferencial que han mostrado los maestros en las clases de matemáticas respecto a sus alumnos y alumnas o incluso, la mayor predisposición de la mujer para manifestar sus respuestas afectivas en las escalas de actitudes. Este tipo de diferencias ya comienzan a manifestarse en la Educación Primaria (Valle et al., 2016) y continúan durante la Enseñanza Secundaria (González-Pienda et al., 2012; INEE, 2015).

Por consiguiente, el género tiene incidencia en la autoconfianza hacia las matemáticas de modo que las mujeres suelen mostrar niveles de autoconfianza inferiores a los de los hombres y esto, sin duda, puede afectar a su relación con esta disciplina. Estos resultados confirman los obtenidos en otros trabajos de investigación previos (González-Pienda et al., 2012; Marsh y Ayotte, 2003; Pérez Tyteca, 2012). Entendemos que este hecho es relevante dado que, en el Grado en Educación Primaria, la presencia de mujeres es tradicionalmente mayoritaria respecto a los hombres.

Finalmente, en la comparación de los niveles de autoconfianza hacia las matemáticas, logrados en los dos grupos de rendimiento obtenidos, se observaron diferencias que indican que los sujetos con rendimiento favorable muestran una autoconfianza más alta que aquellos otros cuyo rendimiento es desfavorable.

De esta forma, los futuros maestros que inician sus estudios universitarios con rendimientos académicos matemáticos bajos suelen presentar un nivel de autoconfianza bajo (Jackson, 2008), lo cual redundará negativamente en su práctica docente ya que esta baja autoconfianza está fuertemente y negativamente correlacionada con la ansiedad (Bursal y Paznokas, 2006; Caballero et al., 2008; Fennema y Sherman, 1978; Isiksal et al., 2009; ; Peker y Ulu, 2018; Pérez Tyteca, 2012; Sánchez Mendías et al., 2020)

Ante un escenario, en el que son escasos los futuros maestros que destacan por un elevado nivel de autoconfianza y, por ende, un alto rendimiento en matemáticas, es necesario adoptar medidas encaminadas a mejorar la base de conocimientos matemáticos durante su formación universitaria a través de clases que refuercen la base de los contenidos que conforman el currículum de Educación Primaria. Asimismo, este fortalecimiento cognitivo debe ir acompañado de acciones orientadas crear una predisposición favorable hacia esta materia que se manifieste en actitudes positivas como la autoconfianza. Igualmente, al ponerse en práctica estas propuestas, se debe atender la incidencia de la variable género a raíz de las diferencias obtenidas en este trabajo.

En última instancia, conviene destacar que diversos autores coinciden en que, detrás del aclamado éxito en el rendimiento de los estudiantes finlandeses, hay una cuidada selección y formación de sus maestros, fundamentada en su rendimiento académico y en sus actitudes hacia la enseñanza (Pérez Granados, 2014); consideremos que solo una quinta parte de los aspirantes a maestro de escuela primaria ingresa en las universidades finlandesas. Sin embargo, en nuestro país, los requisitos de acceso para ingresar en el Grado en Educación Primaria son menos exigentes y se permite el acceso de alumnos con rendimientos académicos mediocres, especialmente perceptibles, en el área de matemáticas.

REFERENCIAS

Agüero, E., Meza, L. G., Suárez, Z. y Schmidt, S. (2017). Estudio de la ansiedad matemática en la educación media costarricense. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *19*(1), 35-45. https://doi.org/10.24320/redie.2017.19.1.849

Alsina, A. y López, P. (2019). ¿Qué piensan los futuros maestros sobre la disposición y la seguridad para enseñar matemáticas? Algunas propuestas para la formación inicial. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 21,* 1-11. https://doi.org/10.24320/redie.2019.21.e21.1867

Ampofo, C. B. (2019). Relationship between pre-service teachers' mathematics self-efficacy and their mathematics achievement [Relación entre la autoeficacia en matemáticas de los profesores en formación y su rendimiento en matemáticas]. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences, 15*(1), 23-36. https://doi.org/10.4314/ajesms.v15i1.

Ashby, B. (2009). Exploring Children´s Attitudes towards Mathematics [Exploración las actitudes de los niños hacia las matemáticas]. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 29*(1), 7-12.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia las matemáticas-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero.

Ávila-Toscano, J. H., Rojas-Sandoval, Y. y Tovar-Ortega, T. (2020). Perfil del dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas. *Revista de Psicología y Educación - Journal of Psychology and Education*, *15*(2), 225-236. https://doi.org/10.23923/rpye2020.02.197

Bausela, E. (2019). Estudio Predictivo del Rendimiento Matemático en PISA 2012: Enfoque de Aprendizaje Frente a la Atribución del Fracaso. *Revista Iberoamericana de Diagnóstico y Evaluación*, *52*(3), 156-171. https://doi.org/10.21865/RIDEP52.3.12

Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G. y Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(5), 1860-1863. https://doi.org/10.1073/pnas.0910967107

Bjerke, A. H. (2017). *The growth of self-efficacy in teaching mathematics in pre-service teachers: Developing educational purpose* [University of Oslo and Akersus]. Repository of the University of Oslo and Akersus. https://oda-hioa.archive.knowledgearc.net/bitstream/handle/10642/5280/A-17-7-Bjerke-LUI.compressed.pdf?sequence=3&isAllowed=y

Bursal, M. y Paznokas, L. (2006). Mathematics Anxiety and Preservice Elementary Teachers' Confidence to Teach Mathematics and Science. *School Science and Mathematics*, *106*(4), 173-180. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18073.x

Caballero, A., Blanco, L. y Guerrero, A. (2008). Descripción del dominio afectivo en las matemáticas de los estudiantes para maestro de la Universidad de Extremadura. *Paradigma*, *29*(2), 157-171.

Casis, M., Rico, N. y Castro, E. (2017). Motivación, autoconfianza y ansiedad como descriptores de la actitud hacia las matemáticas de los futuros profesores de educación básica de Chile. *PNA*, *11*(3), 181-203.

Castro de Bustamante, J. (2002). *Análisis de los componentes actitudinales de los Docentes hacia la enseñanza de la Matemática* [Universitat Rovira i Virgili]. Repositorio de la Universitat Rovira i Virgili. http://nportal0.urv.cat:18080/fourrepo/rest/digitalobjects/DS?objectId=TDX:684&datastreamId=Memoria&mime=application/pdf

Charles, M. (2017). Venus, Mars, and Math: Gender, Societal Affluence, and Eighth Graders' Aspirations for STEM. *Socius*, *3*, 1-16. https://doi.org/10.1177/2378023117697179

Döfer, C. y Ulloa, G. (2016). Medición de la actitud hacia las matemáticas en estudiantes de Licenciatura en Administración: Un estudio piloto. *Vincula Tégica Efan*, *2*(1), 1329-1348.

Dowker, A., Sarkar, A. y Looi, C. Y. (2016). Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years? *Frontiers in Psychology*, *7*(508). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

Fennema, E. (1989). The Study of Affect and Mathematics: A Proposal Generic Model for Research. In D.B. Mc Leod & V.M. Adams (Eds.) *Afect and mathematics problem solving: A new perspective* (205-219). Springer.

Fennema, E. y Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(5), 324-326. https://doi.org/http//doi:10.2307/748467

Fennema, E. y Sherman, J. (1978). Sex-Related Differences in Mathematics Achievement and Related Factors: A Further Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *9*(3), 189-203. https://doi.org/10.2307/748997

Gómez-Chacón, I. M. (2000). Afective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *43*, 149-168. https://doi.org/10.1023/A:1017518812079

Gómezescobar, A. y Fernández Cézar, R. (2018). Los maestros y sus actitudes hacia las matemáticas: Un estudio sobre Educación Infantil y Primaria en España. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *52*, 186-200.

González-Pienda, J. A., Fernández-Cueli, M., García, T., Fernández, E. y Tuero-Herrero, E. (2012). Diferencias de género en actitudes hacia las matemáticas en la enseñanza obligatoria. *Revista Iberoamericana de Psicología y Salud*, *3*(1), 55-73.

Gresham, G. (2018). Preservice to Inservice: Does Mathematics Anxiety Change With Teaching Experience? *Journal of Teacher Education*, *69*(1), 90-107. https://doi.org/10.1177/0022487117702580

Hembree, R. (1990). The Nature, Effects, and Relief of Mathematics Anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(1), 33-46. https://doi.org/10.2307/749455

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2006). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: Relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación Matemática*, *17*(2), 89-116.

INEE. (2015). *¿Qué subyace bajo la desigualdad de género?* Ministerio de Educación y Formación Profesional. http://educalab.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa/pisa-in-focus/-/asset_publisher/wuDrrIam6HLv/content/n%C2%BA-49-%C2%BFque-subyace-bajo-la-desigualdad-de-genero-en-educacion-

Isiksal, M., Curran, J. M., Koc, Y. y Askun, C. S. (2009). Mathematics Anxiety and Mathematical Self-Concept: Considerations in Preparing Elementary-School Teachers. *Social Behavior and Personality: An International Journal*, *37*(5), 631-643. https://doi.org/10.2224/sbp.2009.37.5.631

Jackson, E. (2008). Mathematics anxiety in student teachers. *Practitioner Research in Higher Education*, *2*(1), 36-42.

Jacobs, G. J. y Durandt, R. (2016). Attitudes of Pre-Service Mathematics Teachers towards Modelling: A South African Inquiry. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(1), 61-84. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00604a

Kalder, R. S. y Lesik, S. A. (2011). A classification of attitudes and beliefs towards mathematics for secondary mathematics pre-service teachers and elementary pre-service teachers: An exploratory study using latent class analysis. *IUMPST: The Journal., Vol 5 (Teacher Attributes)*.

Koch, I. (2019). *Choose Maths Gender Report: Mathematics and Gender: Are Attitudes and Anxieties Changing towards Mathematics?* Australian Mathematical Sciences Institute.

Léon-Mantero, C., Pedrosa-Jesús, C., Maz-Machado, A. y Casas-Rosal, J. C. (2019). Medición de las actitudes hacia las matemáticas en maestros de Educación infantil en formación. *Espacios*, *40*(23), 14-24.

Leung, H. K. y Man, Y. K. (2005). *Relationships between affective constructs and mathematics achievement: A modeling approach*. Proceedings of International Conference on Education: Redesigning Pedagogy on Research, Policy and Practice, Singapore.

Madrid, M. J., León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2015). Assessment of the Attitudes towards Mathematics of the Students for Teacher of Primary Education. *Open Access Library Journal*, *2*, e1936. http://dx.doi.org/10.4236/oalib.1101936

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C., Casas, J. C. y Jiménez Janjul, N. (2016). Actitudes hacia las matemáticas de maestros en formación: Una visión sobre su futuro desempeño docente. *Epsilón Revista de Educación Matemática*, *93*, 33-42.

Malmivuori, M. L. (2001). *The dinamics of affect, cognition, and social environment in the regulation of personal learning processes*. [University of Helsinki]. Repository of the University of Helsinki http://urn.fi/URN:ISBN:951-45-9939-X

Marsh, H. W. y Ayotte, V. (2003). Do multiple dimensions of self-concept become more differentiated with age? The differential distinctiveness hypothesis. *Journal of Educational Psychology*, *95*(4), 687-706. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/0022-0663.95.4.687

Mato, M. D. y De la Torre, E. (2010). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. *PNA*, *5*(1), 197-208.

Mato-Vázquez, D., Soneira, C. y Muñoz, M. (2018). Estudio de las actitudes hacia las Matemáticas en estudiantes universitarios. *Números*, *97*, 7-20.

Maz-Machado, A., León-Mantero, C., Casas, J. C. y Reanudo, J. A. (2015). Attitude towards mathematics of computer engineering students. *British Journal of Education, Society & Behavioural Science, 8*(2), 127-133.

Mensah, J. K., Okyere, M. y Kuranchie, A. (2013). Student attitude towards Mathematics and performance: Does the teacher attitude matter? *Journal of Education and Practice*, *4*(3), 132-139.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2019). *PISA 2018. Informe español.* Ministerio de Educación y Formación Profesional.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2020). *TIMSS 2019. Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias. Informe español. Versión preliminar.* Secretaria de Estado de Educación.

Montero, Y. H., Pedrosa, M. E., Astiz, M. S. y Vilanova, S. L. (2015). Caracterización de las actitudes de estudiantes universitarios de Matemática hacia los métodos numéricos. *Revista Electrónica de Investigación Educativa., 17*(1), 88-99.

Nortes, R. y Nortes, A. (2013). Actitud hacia las matemáticas en futuros docentes de Primaria y de Secundaria. *Edetania, 44*, 47-72.

Nortes, R. y Nortes, A. (2017a). Ansiedad, motivación y confianza hacia las Matemáticas en futuros maestros de Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 95*, 77-92. http://dx.doi.org/10.6018/reifop.20.3.290841

Nortes, R. y Nortes, A. (2017b). Competencia matemática, actitud y ansiedad hacia las Matemáticas en futuros maestros. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 20*(3), 145-160. http://dx.doi.org/10.6018/reifop.20.3.290841

Nortes, R. y Nortes, A. (2019). ¿A mayor ansiedad menor rendimiento en Matemáticas? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 453-462). SEIM. http://seiem2019.uva.es/files/cientifico/comunicaciones/Jueves5/A103/J5A103N2.pdf

Pedrosa-Jesús, C. (2020). *Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes universitarios.* [Tesis Doctoral, Universidad de Córdoba]. Repositorio Universidad de Córdoba. https://helvia.uco.es/bitstream/handle/10396/20175/2020000002093.pdf?

Pedrosa-Jesús, C., León-Mantero, C. y Cuida Gómez, M.A. (2020). Estudio de las actitudes hacia las matemáticas en los Grados en Educación Infantil y Primaria. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 3*(3), 18-28.

Peker, M. y Ulu, M. (2018). The Effect of Pre-service Mathematics Teachers' Beliefs about Mathematics Teaching-Learning on Their Mathematics Teaching Anxiety. *International Journal of Instruction, 11*(3), 249-264. https://doi.org/10.12973/iji.2018.11318a

Pérez Granados, L. (2014). La selección de candidatos a la formación docente en Finlandia. La relevancia de la disposición personal hacia la actividad docente. *Revista Electrónica de Investigación y Docencia (REID), 12*, 109-132.

Pérez Tyteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo en la elección de carreras* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. Repositorio Universidad de Granada. https://hera.ugr.es/tesisugr/2108144x.pdf

Perry, C. A. (2011). Motivation and Attitude of Preservice Elementary Teachers toward Mathematics. *School Science and Mathematics, 111*(1), 2-10. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2010.00054

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Information Age. http://www.sci.sdsu.edu/CRMSE/STEP/documents/R.Philipp,Beliefs&Affect.pdf

Sánchez Mendías, J. (2013). *Actitudes hacia las matemáticas de los futuros maestros de Educación Primaria* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. https://hera.ugr.es/tesisugr/2194717x.pdf

Sánchez Mendías, J., Segovia, I. y Miñán, A. (2020). Ansiedad y Autoconfianza hacia las matemáticas de los futuros maestros de Educación Primaria. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, *18*(2), 127-152. https://doi.org/10.25115/ejrep.v18i51.2981

Schenkel, B. D. (2009). *The impact of an attitude toward mathematics on mathematics performance*.[Marietta College]. Repository of Marietta College.https://etd.ohiolink.edu/apexprod/rws_olink/r/1501/10?clear=10&p10_accession_num=marietta1241710279

Segarra, Y. y Pérez Tyteca, P. (2017). Nivel de ansiedad hacia las Matemáticas de futuros maestros de Educación Primaria. En R. Roig-Vila (Ed.) *Investigación en docencia universitaria. Diseñando el futuro a partir de la innovación educativa* (pp 442-451). Octaedro.

Segovia, I. (2008). *Memoria descriptiva del Plan de Mejora de la titulación de Maestro especialidad de Educación Primaria* (Universidad de Granada). Universidad de Granada.

Sloan, T., Daane, C. J. y Giesen, J. (2002). Mathematics Anxiety and Learning Styles: What Is the Relationship in Elementary Preservice Teachers? *School Science and Mathematics*, *102*(2), 84-87. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2002.tb17897.x

Soneira, C., Naya-Riveiro, M. C., De la Torre, E. y Mato, D. (2016). Relaciones entre las dimensiones de las actitudes hacia las matemáticas en futuros maestros. En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, J.L. González P. Hernández, A. Jiménez, J.A. Macías, F.J. Ruiz, M.T. Sánchez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 519-528). Universidad de Málaga

Tsao, Y. L. (2014). Attitudes and beliefs toward mathematics for elementary preservice teachers. *US-China Education Review*, *4*(9), 616-626. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5345

Valle, A., Regueiro, B., Piñeiro, I., Sánchez, B., Freire, C. y Ferradás, M. (2016). Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de Educación Primaria: Diferencias en función del curso y del género. *European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education*, *6*(2), 119-132. https://doi.org/10.30552/ejihpe.v6i2.161

Ward, S. R. (2020). *The Impact of Elementary Mathematics Coaches on Elementary Teachers' Attitudes Towards Teaching Mathematics*. [Doctoral These, University of Maine]. Repository of the University of Maine. https://digitalcommons.library.umaine.edu/etd/3225

Javier Sánchez Mendías
Universidad de Granada, España
jsmendias@ugr.es

Isidoro Segovia Alex
Universidad de Granada, España
isegovia@ugr.es

Antonio Miñán Espigares
Universidad de Granada, España
aminan@ugr.es

García-Suárez J. y Bolaños-González, H. (2022) Errores algebraicos en las producciones de estudiantes universitarios de Costa Rica y México. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 5*(2), 31-45

ISSN: 2603-9982

ERRORES ALGEBRAICOS EN LAS PRODUCCIONES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE COSTA RICA Y MÉXICO

José García-Suarez, Universidad de Guadalajara, México

Helen Bolaños-González, Universidad Nacional, Costa Rica

Resumen

En este trabajo se analizan comparativamente los errores frecuentes que cometen los estudiantes universitarios, al realizar tareas algebraicas. Se aplicó un cuestionario centrado en los niveles de entendimiento del uso de las letras y también se abordó desde los enfoques del álgebra. Este estudio se realiza desde el enfoque cuantitativo con carácter diagnóstico y descriptivo. La muestra está conformada por 54 estudiantes de Costa Rica y México. Como resultado se obtuvo que la mayoría de los estudiantes cometen errores de cálculo o tienen un aprendizaje deficiente, estos recurren a procedimientos aritméticos y se evidencia incapacidad de establecer modelos matemáticos.

Palabras clave: *enfoques del álgebra, uso de las letras, niveles de entendimiento, estudiantes universitarios, errores.*

Algebraic errors in the productions of university students from Costa Rica and Mexico

Abstract

In this work, the frequent errors committed by university students when performing algebraic tasks are comparatively analyzed. A questionnaire focused on the levels of understanding of the use of letters was applied and it was also approached from the algebra approaches. This study is carried out from the quantitative approach with diagnostic and descriptive character. The sample is made up of 54 students from Costa Rica and Mexico. As a result, it was found that most students make calculation errors or have poor learning, they resort to arithmetic procedures and there is evidence of an inability to establish mathematical models.

Keywords: *approaches to algebra, use of letters, levels of understanding, university students, errors.*

Recibido: 18/02/2022; Aceptado:27/06/2022

INTRODUCCIÓN

En el primer curso universitario los estudiantes exhiben deficiencias significativas en sus producciones de diversas tareas algebraicas (García, 2010; 2016). Desde nuestro punto de vista, algunas de esas dificultades exhibidas como errores, están muy alejadas del nivel educativo donde debieron ser superadas. También cabe señalar que, los alumnos de primer curso universitario ingresan a este nivel con una preparación matemática previa, sin embargo, la realidad muestra que es necesario realizar cursos iniciales de nivelación lo que retrasa el avance en la adquisición de nuevos conocimientos (García, 2016).

Esta educación matemática previa no es en muchas ocasiones, lo suficientemente sólida como para enfrentar situaciones de tareas relacionadas con la aritmética o el álgebra, lo cual se puede suponer que alumnos no tienen conocimientos previos o son escasos, como se documentó en las investigaciones de García (2011), Gamboa, et al (2019), Bolaños y Lupiañez (2021), donde se concluye que un factor importante que ocasionan los errores algebraicos y aritméticos en los estudiantes universitarios son sus insuficientes conocimientos previos.

Este último punto parece controversial, nos permite conocer la realidad de las aulas en el contexto costarricense, donde se destacan dos estudios realizados en dicha universidad con la población de primer ingreso; Castillo et al (2020) afirman que se ha evidenciado un alto porcentaje de repitencia y deserción por parte de la población estudiantil. Por otra parte, en 2019 estos autores manifiestan que existe un alto porcentaje de estudiantes que ingresa a la Universidad Nacional y que presentan dificultad en los cursos de la Escuela de Matemática presentando errores en operaciones con polinomios, fórmulas notables, leyes de potencias, factorización, entre otros temas (Gamboa, et al, 2019).

En este trabajo se pretende indagar y documentar la posible relación entre los diversos enfoques del álgebra escolar preuniversitaria y los errores que cometen los estudiantes de primer curso a nivel universitario. Aunado a lo anterior, se realiza una comparación en los resultados de ambos contextos, considerando que las poblaciones presentan similitudes en los planes de estudio de educación secundaria y bachillerato en cuanto a la formación algebraica. Para esto se aplicó un instrumento diseñado para identificar el dominio de los diferentes enfoques de álgebra mencionados en el trabajo de Usiskin (1988).

MARCO CONTEXTUAL

En este apartado se abordará elementos generales de las dos instituciones de educación superior partícipes en la investigación. Además, se detallan algunos elementos que permiten comprender el contexto de la población estudiantil que participa en el estudio.

La Universidad Nacional de Costa Rica es una institución pública que atiende a una gran cantidad de población estudiantil. La Escuela de Matemática ofrece los cursos a las diferentes carreras como, por ejemplo, el curso de Matemática General, este es introductorio y requisito para cursos avanzados en el plan de estudios. En este curso se estudian los conceptos fundamentales del álgebra, funciones, ecuaciones y trigonometría (Escuela de Matemática, 2017). Específicamente, para el contexto de este trabajo de investigación se consideró un grupo de estudiantes de la carrera de Licenciatura en Administración.

Respecto al contexto educativo en México, el Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, es una institución educativa que ofrece diversas carreras, en el caso particular de este trabajo se llevó a cabo en las carreras de Ingeniería Mecatrónica e Ingeniería en Obras y Servicios con los estudiantes inscritos en el curso de Precálculo siendo los temas tratados en dicho curso: Operaciones algebraicas, factorización, fracciones algebraicas, funciones y tópicos de trigonometría.

Al hablar del estudiante universitario de primer ingreso, es necesario conocer acerca de la educación secundaria. Por un lado, los Programas de Estudio de Secundaria de Matemática de Costa Rica refleja en todos los niveles de formación distintas competencias algebraicas que el estudiante debe adquirir (Ministerio de Educación Pública, 2012). Lo cual coincide con el perfil del egreso del nivel educativo medio superior en México, en el Documento Base del Bachillerato General (Secretaría de Educación Pública, 2018), menciona que un egresado del bachillerato debe desarrollar competencias que permitan la aplicación de procedimientos aritméticos y algebraicos para construir e interpretar modelos matemáticos, resolver problemas, entre otros. Lo anterior permite suponer que el estudiante que ingresa a la universidad posee las bases que le permitirán desenvolverse en los cursos introductorios del área de matemática.

Por lo anteriormente expuesto, se considera que los egresados del bachillerato si cuentan con las competencias algebraicas, por lo cual deberían superar con pocas dificultades los ejercicios algebraicos que se les presentaron en el instrumento de aplicado en esta investigación.

Además, es importante mencionar que la población participante en el presente estudio, son estudiantes de los cursos: matemática general y precálculo en el contexto costarricense y mexicano respectivamente, dichos cursos son equiparables en cuanto a objetivos y contenidos.

MARCO TEÓRICO

De acuerdo con García (2016), desde la formación educativa inicial hasta la universidad, los estudiantes aprenden conceptos y principios matemáticos abstractos, además de los procedimientos para desarrollarlos, sin embargo, hay muchos estudiantes que tienen dificultades para comprender los conceptos y principios que dan soporte a los procedimientos y, en consecuencia, obtienen conceptos y principios que no corresponden a los procedimientos; por consiguiente, son éstos los estudiantes que emplean procedimientos errados y por lo tanto estos procedimientos generan patrones sistemáticos de errores que arrastran durante su formación en los distintos niveles educativos.

Sin embargo, cometer errores y aprender cómo identificarlos para corregirlos es una parte importante en el aprendizaje del estudiante; de allí que distintos investigadores enfoquen sus trabajos hacia el estudio de los errores que cometen los estudiantes de matemáticas, con la intención de identificar el origen de estos errores y ayudar a los estudiantes en su corrección (Bachor, 1979).

Específicamente, en el caso de la identificación de las fuentes de los errores, numerosos investigadores se han centrado en establecer cuáles son las fuentes de errores que sirvan para dar explicación de los diversos errores sistemáticos de los estudiantes, tal es el caso de Kieran (1992), Chi y Roscoe (2002), Mason (2002), Brown, et al (2007) quienes identificaron a los conocimientos previos de los alumnos como fuente de errores; en cambio para Fischbein (1987), Stavy y Tirosh (2000) las creencias intuitivas estaban en el origen de estos; otros investigadores como, Matz (1982), Ashlock (2002), Vosniadou y Verschaffel (2004), atribuyen al empleo inadecuado procedimientos específicos la causa de los mismos. Consideramos también la teoría de buggy algorithms desarrollada por diversos investigadores como VanLehn (1980), Resnick y Omanson (1987), con la cual trataban de desentrañar las causas de los errores. Esta última teoría está complementada con la diferenciación que hacen del conocimiento conceptual y procedimental en sus estudios Hiebert y Lefevre (1986) y Silver (1986). Más recientemente algunos autores han sugerido taxonomías propias pero basadas en las clasificaciones comentadas previamente, tal es el caso de Abrate, et al (2006), Saucedo (2007), Garcia (2010), Dodera, et al (2014), Brodie (2014) y Barrón, et al (2016).

Ante la diversidad de teorías existentes para la explicación de las fuentes de los errores en los que incurren los estudiantes al resolver tareas algebraicas, tomamos en cuenta la importancia que tienen los conocimientos matemáticos de los estudiantes en su primer curso universitario para poder determinar así, cómo influyen éstos en sus producciones algebraicas.

Bajo este orden de ideas, consideramos conveniente resaltar la relevancia que tiene la enseñanza de los distintos usos de la variable en los diferentes programas curriculares de la secundaria y bachillerato, en los cuales se plantean como objetivos el desarrollar habilidades en los estudiantes que les permitan identificar de manera adecuada los distintos usos de la variable, es esencial tomar en cuenta el papel multifacético que juega la variable en distintos contextos, como incógnita, número general, relación funcional o parámetro.

Así pues, concordamos con las investigaciones realizadas con estudiantes universitarios que llevaron a cabo Trigueros y Ursini a lo largo de 1996 y hasta 1998, quienes durante ese periodo observaron que el aprendizaje del concepto de variable durante los años de secundaria y bachillerato es poco significativo y encontraron que los estudiantes, sólo alcanzaron un nivel elemental en el manejo de la variable como incógnita específica, como número general y en relación funcional, recurriendo de manera frecuente a sus conocimientos previos aritméticos para resolver las nuevas situaciones que se les planteaban.

Por lo anteriormente expuesto, adoptamos como marco teórico de este trabajo, las consideraciones de Usiskin (1988), quien pone de manifiesto cuatro usos diferentes en la variable y los asocia a cuatro distintas concepciones del álgebra, haciendo énfasis en la relación de éstas con los propósitos de la enseñanza del álgebra elemental. Dichos usos aparecen en la tabla 1.

Tabla 1. *Concepciones del álgebra*

Concepciones del Álgebra	Ejemplo de aplicación
Aritmética generalizada	3+5.7=5.7+3, que se generaliza como a+b=b+a
Procedimientos para resolver problemas	Cuando se suma tres a cinco veces cierto número el resultado es *40*. “Cuál es el número”
Estudio de relaciones entre cantidades	“¿Qué le sucede al valor $\frac{1}{x}$ cuando x se hace más grande?”
Estudio de estructuras	Factorizar $3x^2 - 4ax + 136a^2$

Aunado a lo anterior, Godino y Font (2003) mencionan que,

> Las variables son uno de los instrumentos más poderosos para expresar las regularidades que se encuentran en matemáticas. El principal interés del uso de letras (variables) en matemáticas es que permiten expresar relaciones generales entre los objetos de una manera eficaz (p. 789).

También Küchemann (1980) identifica seis formas de interpretar los símbolos literales.

- Letra evaluada, se entiende cómo a la letra se le asigna un valor numérico.
- Letra ignorada, es la letra no utilizada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado.
- Letra como objeto, se considera la letra cómo una abreviación del nombre de un objeto o cómo a un objeto en sí.
- Letra como incógnita específica, representando un número particular pero desconocido y los estudiantes son capaces de operar directamente sobre ella.
- Letra como número generalizado, la letra puede asumir distintos valores.
- Letra como variable, representa un rango de valores no especificados, mediante una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

En el estudio de Küchemann (1980) se logra identificar estos usos de letras y los caracteriza en cuatro niveles de entendimiento de los estudiantes con relación al significado y uso de las mismas.

- Nivel 1: En el primer nivel se resuelven tareas numéricas o que tiene una estructura algebraica simple, por ejemplo, sustituciones numéricas directas en expresiones algebraicas en donde las letras no tiene coeficiente, multiplicación de datos numéricos, simplificación de términos semejantes que involucran una sola letra como incógnita. Los estudiantes en este nivel deben ser capaces de resolver el ítem mediante el uso de letra cómo objeto o sin hacer uso de la letra.
- Nivel 2: Este nivel es muy similar al anterior, la diferencia es que son tareas un poco más complejas, con una estructura aritmética mayor. En este nivel existe una mayor disposición para aceptar respuestas incompletas o ambiguas. Los 15 estudiantes podrían resolver las tareas mediante el uso de las letras como letra evaluada, letra como objeto y letra ignorada.
- Nivel 3: En este nivel las tareas presentan una estructura algebraica simple. El estudiante debe ser capaz de resolver tareas mediante la interpretación de las letras como incógnitas de valor específico, números generalizados y variables.
- Nivel 4: Las tareas de este nivel son más abstractas y tienen una estructura compleja. Los estudiantes requieren como mínimo que las letras sean consideradas como incógnitas específicas, pero donde hay una tendencia a tratar las letras como objetos. El estudiante debe ser capaz de distinguir que las letras no son etiquetas de las características propias de los objetos y argumentar que la expresión formulada puede representar distintos valores. Además, debe poder expresar y justificar la respuesta de manera generalizada y no limitarse a la evaluación de sólo algunos valores numéricos que satisfagan la expresión.

El presente trabajo, se apoya en lo expuesto por Usiskin (1988), quien pone de manifiesto cuatro usos diferentes en la variable y los asocia a cuatro distintas concepciones del álgebra, y Küchemann (1980), quién identifica los usos de letras y los caracteriza en cuatro niveles de entendimiento.

METODOLOGÍA

Este trabajo tiene como objetivo general analizar comparativamente los errores frecuentes que cometen los estudiantes universitarios, en Costa Rica y México, al realizar algunas tareas algebraicas. La investigación se aborda desde el enfoque cuantitativo con carácter diagnóstico y descriptivo. Lo cual nos permite recoger los datos a partir de la aplicación de un cuestionario con el propósito de conocer el rendimiento académico en álgebra y detectar el error algebraico en las producciones de los estudiantes de Costa Rica y México.

Muestra

La población participante se conformó por 24 estudiantes de Costa Rica y 30 estudiantes de México, ambas poblaciones matriculadas en cursos iniciales de matemáticas a nivel universitario y las cuales estaban bajo tutela de los profesores participantes de este trabajo de investigación, por lo tanto se trata de una muestra de carácter circunstancial. Dichos cursos se impartían en la modalidad de presencialidad remota a causa del COVID-19.

En el caso de Costa Rica, 20 estudiantes provienen de colegios públicos y 4 de colegios privados, esta población son estudiantes de la carrera de Licenciatura en Administración en Universidad Nacional de Costa Rica, con un grado de repitencia del curso significativo; un 75% lo han repetido dos o más veces.

En el contexto de México la prueba fue aplicada a 30 estudiantes de las diferentes carreras de ingeniería del Centro Universitario de la Costa Sur, dichos estudiantes pertenecían a las carreras de Ingeniería Mecatrónica e Ingeniería en Obras y Servicios y estaban inscritos en el curso de Precálculo.

Instrumento de recogida de datos

Para la realización de este análisis se diseñó una prueba escrita que consta de 9 ejercicios, algunos de estos ejercicios se subdividen en ítems, en total se cuentan con 12 ítems que tratan contenidos algebraicos, estos fueron seleccionados de los trabajos de investigación de Küchemann (1980), Matz (1980) y Townsen (2005) cuyos ítems fueron validados por la comunidad de investigadores de educación matemática al ser publicados en revistas especializadas de dicha área. Además, se deseaba realizar un contraste de los errores obtenidos en las producciones de los estudiantes a partir de los niveles de entendimiento descritos por Küchemann (1980). En la tabla 2 se describen de manera general los contenidos del instrumento aplicado.

Tabla 2. *Descripción de los ejercicios del instrumento*

	Descripción del ejercicio	Constructo/ Enfoque que evalúa
1	Enunciado que inducía a la generalización de la aritmética	Álgebra una generalización de la aritmética
2	Una figura geométrica que estimulaba a plantear una expresión algebraica que inducía a la generalización del resultado	Álgebra para la obtención de patrones generalizadores
3	Un problema que inducía a la obtención de un patrón generalizador del resultado	Álgebra para la obtención de patrones generalizadores
4	Un problema de análisis de la relación entre las variables	Álgebra como el estudio de las funciones
5	Un problema de análisis de la relación entre las variables	Álgebra como el estudio de las funciones
6	Desarrollo de un producto notable	Álgebra para la manipulación de estructuras algebraicas
7	Resolución de un producto algebraico sin coeficientes numéricos	Álgebra para la manipulación de estructuras algebraicas
8	Demostración de propiedades de radicales	Álgebra para la manipulación de estructuras algebraicas
9	Resolución de ecuaciones lineales	Álgebra para la resolución de ecuaciones

Recolección de datos

Para la recolección de los datos se dispone un instrumento creado de acuerdo a los propósitos de la investigación, el cual se describió en el apartado anterior, el mismo fue aplicado en los meses de octubre a noviembre del 2020, por medio de imágenes o en formato PDF, el docente envía dicho instrumento solicitando al estudiante la solución de cada ítem con el procedimiento respectivo dando un tiempo prudencial de alrededor de ocho días para su solución, cada estudiante sube su solucionario a la plataforma que el docente ha indicado. Es relevante considerar que se ha aplicado en las últimas semanas lectivas, por lo cual el estudiante ha asumido el compromiso de realizarlo de forma responsable y subirlo en el tiempo asignado.

La forma en que se ha recolectado la información se ha planteado como respuesta a la situación por el COVID-19, sin embargo, se ha transmitido al estudiante el propósito de investigación y la importancia de responder de forma individual sin uso de la calculadora, evidenciando el procedimiento escrito en el solucionario por parte de cada estudiante, de esta manera se logra los insumos necesarios para realizar el análisis de datos durante el 2021 a partir de la aplicación de dicho instrumento.

Ambas pruebas fueron aplicadas por los investigadores a cargo de este trabajo, cada investigador en su propio país.

Limitaciones de la investigación

El tamaño de muestra es pequeño, por lo que no se pueden generalizar los resultados. La selección de la muestra responde a varios factores como la pandemia por COVID-19, esto no permitió agrandar dicha muestra ya que las clases se realizaban de manera virtual, y fue difícil obtener una mayor cantidad de datos.

Otra de las limitaciones fue el tiempo disponible para la recolección de los datos, esta fue al cierre del ciclo lectivo en dichas instituciones y fue necesario establecer fecha límite para este proceso ya que no se podía alargar el periodo lectivo y era importante realizarlo al final del curso para lograr evaluar las competencias adquiridas durante el curso lectivo y los conocimientos previos.

Los datos recolectados fueron de forma virtual, en formato pdf o imágenes que en algunos casos no eran imágenes de calidad, algunas movidas, mal enfocadas, con poco procedimiento, sin embargo se lograba observar lo que se quería, la respuesta que el estudiante planteaba en cada ítem. Se debe resaltar que muchos estudiantes tenían limitación con los recursos tecnológicos, con el acceso a internet lo que dificulta poder subir un documento con varias imágenes o no contaban con un dispositivo que logrará enfocar bien la imagen, situaciones fuera del control de los investigadores.

Además, se pudo observar que no todos los estudiantes subieron a tiempo el instrumento con las respuestas, esto pues al inicio se consideró una mayor participación. Es importante recordar que el alumno debía completar o responder cada ítem y tomar fotos o escanear sus respuestas y subirlo, lo que conlleva compromiso y responsabilidad de parte del estudiante.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

La información recolectada en la aplicación del instrumento se codificó y se organizó de manera sistemática en una base de datos, obteniendo algunos resultados interesantes que se expondrán a continuación.

Para dicho análisis se apoya en lo expuesto por Usiskin (1988) y Küchemann (1980), permitiendo analizar los errores algebraicos en las producciones de los estudiantes según los niveles de entendimiento y según los enfoques del álgebra.

Análisis según los niveles de entendimientos en el uso de las tareas

Respecto a los niveles de entendimiento de las letras se obtuvo que hay un porcentaje mayor de estudiantes mexicanos que de costarricenses en el nivel más alto de entendimiento; en este nivel el estudiante debe ser capaz de identificar las relaciones existentes entre las variables que son representadas con letras, así como números con valores generalizados. Por lo anterior, al ser estudiantes universitarios se esperaría que la mayoría se ubicara en este nivel.

De acuerdo a la tabla 3 se puede evidenciar que la mayoría de los estudiantes participantes se ubican en el nivel III de entendimiento.

Tabla 3. *Cantidad de estudiantes por nivel de entendimiento según país*

	Cantidad de estudiantes	
	Costa Rica	*México*
Nivel I	0	0
Nivel II	4	6
Nivel III	12	12
Nivel IV	8	12
Total	24	30

Es importante destacar que ningún estudiante se ubicó en el I nivel de entendimiento del uso de las letras (el más bajo nivel), esto puede responder a que el instrumento se aplicó en las últimas clases del ciclo escolar, cuando ya se habían repasado todos contenidos del curso introductorio de matemática en ambos contextos.

En la revisión de los ítems del instrumento se ha evidenciado errores por descuido, errores de cálculo, errores en la aplicación de propiedades, entre otros. A continuación, vamos a ejemplificar los más relevantes. En la tabla 4 se muestran los ítems con mayor error, se eligieron los dos más significativos en cada población.

Tabla 4. *Los ítems con porcentajes de error más altos*

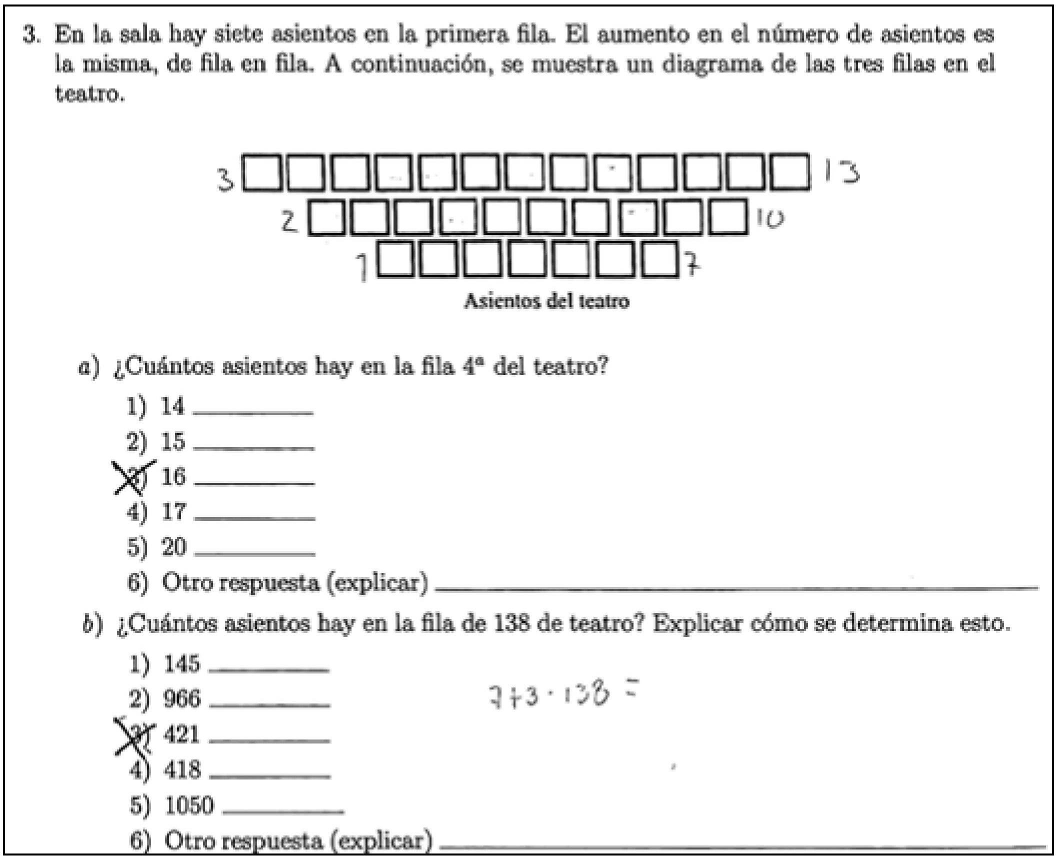
	Costa Rica	México
Ítem 3C	54.17	50.00
Ítem 8	54.17	26.67
Ítem 3B	33.33	36.67

Se debe destacar que, en el caso de Costa Rica, los ítems 2 y 5 también obtienen el mismo porcentaje de error que el ítem 3B. Por contraparte, el ítem 8 ocupa un tercer lugar en el contexto de México con un porcentaje mucho menor que Costa Rica.

Según la tabla anterior, los ítems de mayor dificultad para la población mexicana son el ítem 3C y ítem 3B, el primero de ellos coincide con la población costarricense, sin embargo, el segundo ítem de mayor dificultad para la población costarricense fue el ítem 8. A continuación se describirán dichos ítems.

En el ejercicio 3, el estudiante debe resolver tres partes, la primera de ellas el estudiante debe ser capaz de comprender el álgebra como un patrón generalizado a partir de la información del enunciado, luego en el ítem 3b se le pide generalizar la respuesta a un caso específico y finalmente en el ítem 3c debe ser capaz de plantear una expresión algebraica que indujera a un resultado generalizado.

Los resultados del ítem 3b ubicado en el nivel II de entendimiento, arrojan que el porcentaje de error en Costa Rica es menor al contexto de México como se evidencia en la tabla IV. En la figura 1 se muestra un caso donde el estudiante tiene dificultad para poder generalizar la respuesta, lo que le impide resolver el ítem 3c (figura 2), aunque sí logra con facilidad la primera parte de este ítem con apoyo de procedimientos aritméticos.



3. En la sala hay siete asientos en la primera fila. El aumento en el número de asientos es la misma, de fila en fila. A continuación, se muestra un diagrama de las tres filas en el teatro.

a) ¿Cuántos asientos hay en la fila 4ª del teatro?

1) 14 ________
2) 15 ________
3) 16 ________
4) 17 ________
5) 20 ________
6) Otro respuesta (explicar) ________

b) ¿Cuántos asientos hay en la fila de 138 de teatro? Explicar cómo se determina esto.

1) 145 ________
2) 966 ________
3) 421 ________
4) 418 ________
5) 1050 ________
6) Otro respuesta (explicar) ________

7+3 · 138 =

Figura 1: Ejemplo de error en el ítem 3B

En el ítem 3c, ubicado en el último nivel de entendimiento se obtiene un porcentaje de error en Costa Rica mayor en comparación que en México, siendo el ítem con mayor error en ambos contextos. A continuación, se muestra el caso donde el estudiante intenta establecer una fórmula que le genere la cantidad de asientos, se evidencia que es incapaz de generar un modelo matemático que generalice el resultado deseado (figura 2).

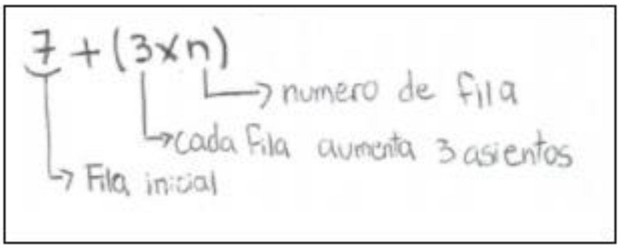
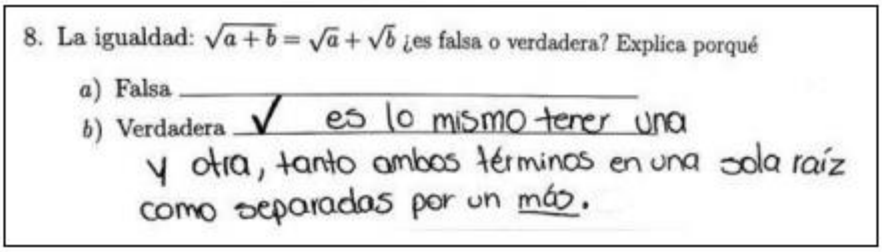


Figura 2: Ejemplo de error en el ítem 3C

Como el ejemplo anterior, se detectaron procedimientos similares tanto en Costa Rica como en México, en algunos casos recurren al procedimiento algebraico sin éxito. En general, se puede concluir que el razonamiento del estudiante es puramente aritmético y es incapaz de establecer un modelo matemático que lo induzca a la generalización del resultado.

Otro de los ítems que también presenta un alto porcentaje de error es el ítem 8 en este se requiere justificar la no igualdad en una expresión con radicales donde se involucra la ley distributiva cuya estructura se relaciona en apariencia a la ley de linealidad, ubicado en el nivel IV de entendimiento. El porcentaje de error en Costa Rica es mayor en comparación con México.

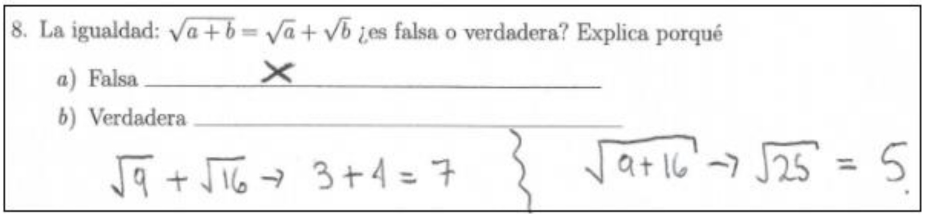

8. La igualdad: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ¿es falsa o verdadera? Explica porqué

a) Falsa

b) Verdadera ✓ es lo mismo tener una y otra, tanto ambos términos en una sola raíz como separadas por un más.

Figura 3: Ejemplo de error en el ítem 8

En este caso el estudiante justifica su respuesta afirmando que ambas expresiones son equivalentes, es decir se cumple la igualdad porque es lo mismo. También se encontró otra justificación recurrente al afirmar que son propiedades radicales (figura 3). Aunado a lo anterior, en este ítem se detectó algunas respuestas correctas con justificaciones deficientes donde el estudiante debe recurrir a ejemplos numéricos para poder justificar (figura 4).


8. La igualdad: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ¿es falsa o verdadera? Explica porqué

a) Falsa X

b) Verdadera

$\sqrt{9} + \sqrt{16} \to 3 + 4 = 7 \quad \sqrt{9+16} \to \sqrt{25} = 5$

Figura 4: Ejemplo de justificación deficiente en el ítem 8.

De manera general, los estudiantes participantes evidenciaron mayores dificultades en el uso de la letra como número generalizado, se ha comprobado que el estudiante no es capaz de justificar correctamente y reflexionar su respuesta, lo cual evidencia carencia de habilidades propias del pensamiento matemático. También cabe mencionar que los estudiantes recurren a procedimientos aritméticos para poder resolver los ítems planteados, situación que no se espera a nivel universitario.

También es interesante evidenciar los ítems donde el porcentaje de mayor acierto. De acuerdo con la tabla 5, se tiene el ítem 3a (I nivel de entendimiento) el cual está planeado dentro del enfoque del álgebra como generalización de la aritmética. Los ítems 4, 9a y 9b están ubicados en el II nivel de entendimiento dentro del enfoque del álgebra para la resolución de ecuaciones.

Tabla 5. *Los ítems con porcentajes de acierto más alto*

	Costa Rica	México
Ítem 3A	100,00	96,67
Ítem 9A	100,00	100,00
Ítem 9B	100,00	100,00
Ítem 4	95,83	96,67

Los ítems donde se evidenció mayor porcentaje de acierto son, ítem 3a donde el estudiante debe ser capaz de comprender el álgebra como un patrón generalizado a partir de la información del enunciado. También en el ítem 9a, donde se requiere resolver la ecuación lineal, para esto el estudiante debe valorar el uso de la letra como incógnita de valor específico. En ese mismo ejercicio, tenemos el ítem 9b donde es necesario resolver la ecuación lineal, para esto el estudiante debe lograr despejar la variable "x" aplicando operaciones como la suma o división de términos semejantes. Finalmente, en el ítem 4, el estudiante debe lograr comprender el problema algebraico y resolverlo planteando una ecuación algebraica o resolverlo de forma intuitiva.

Lo anterior, nos indica que existe un manejo algebraico para resolver ecuaciones lineales en ambos contextos. Así como un buen manejo del uso de la letra como incógnita de valor específico y como letra evaluada, algo esperado por el nivel educativo de los participantes en este trabajo.

Análisis según los enfoques del álgebra

Los resultados muestran que las concepciones del álgebra en donde los estudiantes obtuvieron mayor éxito es la que trabaja el álgebra para la resolución de ecuaciones, tanto en el contexto mexicano como en el costarricense, evidenciando un mayor dominio al resolver ecuaciones lineales simples. A continuación, se muestra el porcentaje de error según los cuatro enfoques del álgebra (tabla 6).

Tabla 6. *Porcentaje de error según los enfoques del álgebra*

	Costa Rica	México
Estudio de relaciones entre cantidades	40,28	34,44
El estudio de las estructuras algebraicas	26,39	20,00
Aritmética generalizada	13,89	14,44
Algebra para la resolución de problemas	2,78	2,22

También se puede evidenciar que el enfoque del álgebra donde se presentó mayores errores fue el estudio de relaciones entre cantidades, donde al estudiante se le pide escribir un modelo matemático que permita establecer una relación sistemática existente entre un conjunto de valores como una herramienta para el estudio de funciones. Lo cual podría significar que el estudiante presenta dificultad en los ítems donde se les pide comprender una regla, o establecer un modelo matemático generalizado respondiendo a la relación entre dos conjuntos, esto por desconocimiento o poca comprensión del tema.

Así mismo, también se presentó cierta dificultad para los estudiantes, en el estudio de las estructuras algebraicas, en este caso los ítems se relacionaban con el binomio al cuadrado, el producto de polinomio, propiedades radicales. Resulta significativo que un porcentaje mayor de estudiantes universitarios de Costa Rica que de México, revelaron obstáculos para manejar algunas propiedades de las estructuras algebraicas como por ejemplo las requeridas en el ejercicio 8. Como se puede observar en la tabla VI en Costa Rica se presentan mayores dificultades que en México.

En el caso del enfoque de la aritmética generalizada fue mínima, la diferencia entre los resultados de ambos países, en este caso se presentó mayor dificultad en el contexto mexicano, los ítems ubicados en este enfoque demandan comprender el álgebra como un patrón generalizado a partir de la información del enunciado.

En relación con los ítems que se ha presentado mayor grado de error, se ha podido percibir en el caso de Costa Rica que se ha presentado mayor dificultad en los ítems ubicados, en el estudio de las estructuras matemáticas y estudio de relaciones entre cantidades, en ese orden. En el caso de México, el ítem de mayor error se ha ubicado de acuerdo con los enfoques del álgebra en el estudio de relaciones entre cantidades coincidiendo con Costa Rica. Estos tres ítems obtienen un porcentaje de error del 50% o más.

CONCLUSIONES

Como resultado de la aplicación del instrumento en ambos países se identificó una mayor dificultad en los ítems que se relacionan con el uso de las letras como números generalizados, mostrando incapacidad de proponer modelos matemáticos que induzcan a la generalización de los resultados.

Diversos errores detectados en las producciones de los estudiantes aparentemente pueden ser considerados por descuido, así mismo, se observa cómo algunos estudiantes en muchas ocasiones recurren a sus conocimientos aritméticos, demostrando entre otras dificultades: incapacidad para establecer modelos matemáticos, aprendizaje deficiente de reglas para la manipulación de las estructuras algebraicas, errores debido a inferencias incorrectas, errores de cálculo, así como errores procedimentales al intentar resolver cuentas aritméticas.

Así mismo, como se ha documentado en otros trabajos (García, 2016 y Bolaños-González y Lupiáñez-Gómez, 2021), los estudiantes manifiestan mayores dificultades al momento de emplear las letras como incógnitas, como valores numéricos generalizados y como variables, ya que en los ejercicios de mayor nivel cognitivo que requieren este tipo de conocimiento para su resolución correcta, fue donde se encontraron las frecuencias mayores de errores. Teniendo en cuenta lo anterior, nuestros resultados coinciden con lo manifestado por Trigueros y Ursini (1998) en cuanto a las grandes dificultades que manifiestan los estudiantes en el manejo de las letras como variables, lo que nos lleva a considerar que hasta la actualidad persisten las deficiencias en cuanto a la enseñanza de las matemáticas en los cursos escolares preuniversitarios, relacionadas con los diferentes usos de las letras en el álgebra.

Por otra parte, considerando el total de estudiantes participantes, se ubicaron 10 estudiantes en un II nivel de entendimiento del uso de las letras en álgebra (18.52%), siguiendo con el porcentaje más alto de 44.44%, lo que equivale a 24 estudiantes ubicados en el III nivel de entendimiento y finalmente el IV nivel de entendimiento donde se esperaba la mayoría de los estudiantes se ubicaran, con un 37.04% lo que equivale a 20 estudiantes del total de la muestra. Esta realidad es preocupante desde el punto de vista universitario, donde se evidencia que la población no ha adquirido las bases matemáticas ni en la formación secundaria ni se han superado tras cursar el primer curso universitario. Este resultado no se puede generalizar, pero sí permite evidenciar una realidad educativa en ambos contextos.

De acuerdo con los enfoques del álgebra, el enfoque más empleado en ambos contextos educativos resultó aquel que está orientado para resolver ecuaciones, donde se trabajó ecuaciones lineales simples. Lo anterior, nos lleva a considerar que dicho enfoque puede ser el que más se puede estar desarrollando en los cursos de matemáticas en los niveles educativo anteriores al nivel universitario en detrimento de los otros enfoques del álgebra mencionados con anterioridad en este trabajo, esto nos lleva a considerar una posible vía de continuidad de este trabajo orientando en el análisis de los materiales didácticos así como en el estudio de los componentes del conocimiento profesional de los docentes en los citados niveles educativos, para documentar si esta inferencia puede tener validez.

También ha sido interesante que en ambos contextos el análisis de los enfoques del álgebra es similar, la diferencia entre los porcentajes de error en los ítems según cada enfoque varía muy poco, sin embargo, los porcentajes de error son más bajos en el contexto mexicano.

En el caso particular, el enfoque del estudio de relaciones entre cantidades, se ubican los dos ítems de mayor error en ambos países, también se debe señalar que en el caso de Costa Rica se detectó otro ítem de alto porcentaje de error ubicado en el enfoque del estudio de estructuras algebraicas, situación que no se evidenció en México.

Es importante destacar que la población mexicana sacó mejores resultados en la aplicación de la prueba, esto se puede deber a que los estudiantes de México pertenecen a diferentes carreras de Ingeniería del Centro Universitario de la Costa Sur, en comparación con los estudiantes de Costa Rica que pertenecen a una Licenciatura en Administración de la Universidad Nacional. Se debe aclarar que la población de administración eran estudiantes en su mayoría repitentes con un mayor acompañamiento académico durante el curso de matemática.

REFERENCIAS

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo* [versión digital pdf]. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Ashlock, R. (2002). *Error patterns in computation: using error patterns to improve instruction*. (9th Edition). Columbus, USA.

Barrón, J., Ruiz, O., Luna, J., Estrada, J. y Loera , E. (2013). Errores matemáticos más comunes de los alumnos de nuevo ingreso en las clases de física y matemáticas de las carreras de ingeniería de la UACJ. *Cultura Científica Y Tecnológica*, (50). Recuperado a partir de http://erevistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt/article/view/933

Bolaños-González, H., y Lupiáñez-Gómez, J. L. (2021). Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario. *Uniciencia*, 35(1), 1-18. https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.1

Bachor, D., (1979), Using Work Samples as Diagnostic Information.*Learning Disability Quarterly*.Vol. 2, No. 1 pp. 45-52. DOI: https://doi.org/10.2307%2F1510838

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 221–239. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-013-9507-1

Brown, S., Findley, K., y Montfort, D. (2007). Student Understanding of States of Stress in Mechanics of Materials. *The International Journal on the Biology of Stress*, (August), 1994-2000.

Castillo-Sánchez, M., Gamboa-Araya, R., y Hidalgo-Mora, R. (2020). Factores que influyen en la deserción y reprobación de estudiantes de un curso universitario de matemáticas. *Uniciencia*, 34(1), 219-245. http://dx.doi.org/10.15359/ru.34-1.13

Chi, M. T. H., y Roscoe, R. D. (2002). The process and challenges of conceptual change. In M. Limon y L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practic*e (pp. 3-27). Dordrecht: Kluwer. https://education.asu.edu/chi-m-t-h-roscoe-r-d-2002-processes-and-challenges-conceptual-change-m-limon-and-l-mason-eds-0.

Documento base del Bachillerato General. (2018). *Boletín oficial del Estado*. https://www.dgb.sep.gob.mx/informacionacademica/pdf/Doc_Base_22_11_2018_dgb.pdf

Dodera, G., Bender, G., Burroni, E. y Lázaro, M. (2014). Errores, actitud y desempeño matemático del ingresante universitario. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (38), 69-84.

Escuela de Matemática. (2017). *Carta al estudiante del curso de servicio MAT001 Matemática General*. Universidad Nacional, Costa Rica: Documento no publicado.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Gamboa Araya, R., Castillo Sánchez, M., e Hidalgo Mora, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades Investigativas en Educación*, 19(1), 104-136. 10.15517/AIE.V19I1.35278

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel.

García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. Lupiáñez, J. L., Cañadas, M. C., Molina, M., Palarea, M., & Maz, A. (Eds.). *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática*, 145-155. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2018/1/GarciaSegoviaLupianez2011.pdf.

García, J. (2016). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas* (Doctoral dissertation, Tesis doctoral). Universidad de Granada, España. https://digibug.ugr.es/handle/10481/43529

Godino, J., y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática

Hiebert, J., y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Küchemann, D. (1980). *The understanding of generalized arithmetic (algebra) by secondary school children*. Doctoral dissertation, Chelsea College, University of London.

Mason, L. (2002). c, in M. Limón y L. Mason (Eds.), Reconsidering conceptual change. *Issues in theory and practice* (pp. 301-336), Dordrecht (NL), Kluwer

Matz, M. (1982). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In D. Sleeman y J.S. Brown (Eds.), *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 25-50). New York: Academic Press.

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de estudio de Matemática*.

Payne, S. J. and Squibb, H. R. (1990), Algebra Mal-Rules and Cognitive Accounts of Error. *Cognitive Science*, 14: 445–481. https://doi.org/10.1016/0364-

0213(90)90019-S

Resnick, L., S. Omanson (1987). Learning to understand arithmetic. *Advances in instructional psychology*, 41-95.

Saucedo, G. (2007). Categorización de Errores Algebraicos en Alumnos Ingresantes a la Universidad. Itinerarios Educativos, 1(2), 22-43. https://doi.org/10.14409/ie.v1i2.3898

Silver, E. A. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 181-197). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum

Stavy, R. y Tirosh, D. (2000). *How Students (Mis-) Understand Science and Mathematics: Intuitive Rules*. Teachers College Press. New York.

Townsend, B. (2005). *Examining secondary students' algebraic reasoning: flexibility and strategy use*. [Tesis de doctorado inédita]. Universidad de Missouri-Columbia.

Ursini, S., y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3),5-38. [fecha de Consulta 2 de enero de 2021]. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40518302

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, pp. 8-19). Reston, VA: NCTM. http://www.math.wisc.edu/~kwon/135Spring2014/alg.pdf

VanLehn, K. (1990). *Mind bugs: origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass: MIT Press.

Vosniadou, S. y Verschaffel, L. (2004) Extending the Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching. In L., Verschaffel and S. Vosniadou (Guest Editors), *Conceptual Change in Mathematics Learning and Teaching, Special Issue of Learning and Instruction*, 14, 5, 445-451. https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014

José García-Suarez
Universidad de Guadalajara, México
jose.gsuarez@academicos.udg.mx

Helen Bolaños-González
Universidad Nacional, Costa Rica
hellen.bolanos.gonzalez@una.ac.cr

MES