Matemáticas, Educación y Sociedad

ISSN: 2603-9982
Matemáticas, Educación y Sociedad
http://mesjournal.es/
editor@mesjournal.es

Vol 6 No 1 (2023) Matemáticas, Educación y Sociedad

Galindo Rivera, O. A. y Falk de Losada, M. (2022). Sobre los modos de pensamiento vectorial vía resolución de problemas. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *6*(1), 1-18

ISSN: 2603-9982

SOBRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO VECTORIAL VIA RESOLUCION DE PROBLEMAS

Oscar Andrés Galindo Rivera, Universidad Antonio Nariño, Colombia.

Mary Falk de Losada, Universidad Antonio Nariño, Colombia.

Resumen

El propósito del presente artículo es el de mostrar a grandes rasgos lo fundamentado en la tesis doctoral del autor principal sobre los avances en la caracterización del Pensamiento Vectorial a través de la resolución de problemas en los estudiantes de ingenierías de la Universidad Antonio Nariño. En las actividades realizadas para tal fin se propuso un conjunto de problemas retadores y no rutinarios, donde salen a la luz cinco modos de pensamiento que caracterizan el Pensamiento Vectorial involucrado en los estudiantes y que se encuentran plasmados en la rúbrica para la caracterización del mismo que hace parte de los resultados de la investigación. Como contraste del aporte teórico de la tesis doctoral, y como elemento innovador del artículo, se muestra una generalización del enfoque basado en la teoría DNR propuesta por Harel (2021), donde se discuten sus llamados atajos inhibidores y catalizadores en relación a algunos conceptos propios de la asignatura.

Palabras clave*: Pensamiento Vectorial, Cálculo Vectorial, Atajos inhibidores y catalizadores.*

On ways of vectorial thinking through problem solving

Abstract

The purpose of this article is to show broadly what is based on the main author's doctoral thesis on the advances in the characterization of Vectorial Thinking through problem solving in engineering students at the Antonio Nariño University. In the activities carried out for this purpose, a set of challenging and non-routine problems was proposed, where five modes of thought that characterize vectorial thinking involved in the students came to light and are reflected in the rubric for its characterization included among the results of the investigation. As a contrast to the theoretical contribution of the doctoral thesis, and as an innovative element of the article, a generalization of the approach based on the DNR theory proposed by Harel (2021) is shown, where its so-called inhibitory and catalyst shortcuts are discussed in relation to some concepts of the course.

Keywords: *Vector Thinking, Vector Calculus. Inhibitory and catalysts shortcuts.*

Recibido: 02/08/2022; Aceptado: 10/04/2023

INTRODUCCION

El Cálculo Vectorial es una rama de las matemáticas que estudia las funciones en varias variables y funciones vectoriales en dos o más dimensiones. Tales funciones aparecen en el dominio de muchas ciencias aplicadas, pues es bien sabido que algunos fenómenos de naturaleza específica de tales ciencias dependen de más de una variable, y las herramientas del cálculo en una variable no son suficientes para realizar el estudio completo del fenómeno que se analiza.

El Cálculo Vectorial tiene sus orígenes durante finales del siglo XVIII y su desarrollo está relacionado con los cuatérnios de Hamilton y con la teoría del potencial (Tait, 1873). Estudios tan importantes en física como la termodinámica, la hidrodinámica, la mecánica de los fluidos desarrollada por Navier y Stokes, y las investigaciones sobre la luz, la electricidad y el magnetismo debidas a Maxwell, ejemplifican en sus teorías el desarrollo de esta rama del cálculo. Con Gibbs se da la notación actual del Cálculo Vectorial al elaborar una versión exclusivamente vectorial con su propio lenguaje, independientemente de los cuatérnios y se establece el Cálculo Vectorial como una disciplina autónoma (Marsden y Tromba, 1991).

Históricamente el Cálculo Vectorial y el Álgebra Lineal tuvieron un desarrollo conjunto también con la teoría electromagnética. Estas teorías se debieron al trabajo de grandes matemáticos y físicos que aportaron sus ideas y al estudio de la problemática de la dirección de cantidades, que tiene sus raíces en la dicotomía entre magnitud y número, presente en Euclides y estudiada después por Descartes con su primera representación de cantidades negativas (Kline, 1990).

Estas ideas planteadas anteriormente constituyen una antesala del concepto de vector, que tuvo su principio en la línea matemática sobre las representaciones de números complejos hecha por Wallis, Wessel, Gauss y Argand, entre otros (Kline, 1990).

En la línea física se destacan los trabajos de Galileo, Newton y Fourier, para mencionar algunos. En estos trabajos se trata de cambiar el esquema aristotélico de la física e iniciar su estudio implementando el método científico, que redundó en algunos métodos vectoriales tales como la descomposición de las fuerzas en componentes con sistemas mecánicos (paralelogramo de fuerzas), en la descripción de la velocidad y aceleración. Además, se favorece el concepto de espacio vectorial y los espacios generados en ellos. Estas ideas dan pie a fomentar un camino hacia el desarrollo del Pensamiento Vectorial (Kline, 1990).

Más recientemente, en el ámbito de la inteligencia artificial (IA), los procesos de Support Vector Machines sobresalen en esta teoría al tener en su base la optimización tomada de métodos del Cálculo Vectorial, donde a su vez el método del descenso por el gradiente aparece como una herramienta para lograr soluciones de manera rápida. Otros procesos en ingeniería biomédica, diseño gráfico, animación, entre otros, hacen resaltar la importancia de esta disciplina como fundamental para el abordaje de resolución de problemas (Stewart, 2018).

Esta descripción inicial pretende evaluar la pertinencia y el impacto de una propuesta teórico-metodológica para el desarrollo del Pensamiento Vectorial (PV) en el curso de Cálculo Vectorial, basado en la resolución de problemas, en los estudiantes de ingeniería de la Universidad Antonio Nariño y la caracterización del Pensamiento Vectorial que efectivamente desarrollan los estudiantes en el proceso.

JUSTIFICACION

En la enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial, al ser una asignatura que se cursa posteriormente a la del cálculo en una variable, se presentan a los estudiantes una gran variedad de nuevos conceptos y de entidades matemáticas abstractas, entre ellas, los conceptos de campo escalar, campo vectorial, divergencia y rotacional. Además, aparecen los intrincados teoremas de Green, Gauss y Stokes, que relacionan conceptos tan importantes como las integrales de línea e integrales de superficie con integrales dobles y triples, tan útiles en los estudios de física, por ejemplo, en electricidad y magnetismo.

En la experiencia del investigador, estos nuevos conceptos presentan dificultades en su comprensión para los estudiantes. Estas dificultades están dadas por el nivel de abstracción de los mismos, las nuevas técnicas de cálculo que se adquieren en la asignatura y el conjunto de asignaturas previas que deben manejar, como son Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de una variable, Geometría Analítica y un limitado razonamiento espacial.

En el ICME 14 se hace referencia a algunas investigaciones sobre la enseñanza – aprendizaje del cálculo, por ejemplo, las que se dieron en el grupo temático de estudio TSG13. Estas investigaciones tienden a concluir que la mayor dificultad de los estudiantes en ese proceso se refleja en la escasa visualización de los fenómenos que conllevan a su modelación y su posterior puesta en la práctica. Los resultados mostrados en el ICME 14 en parte están dados por la falta de comprensión del objeto que se le presenta al estudiante y cómo el docente se lo presenta. Cabe resaltar que las investigaciones sobre enseñanza – aprendizaje del Cálculo Vectorial son muy escasas y la mayoría se refieren a su interacción con el Álgebra Lineal.

Por otra parte, el investigador aduce que algunos estudiantes en su proceso de aprendizaje de los temas del curso de Cálculo Vectorial han visto reflejados cierta clase de comportamientos de estos nuevos conceptos, que se familiarizan con lo que acontece en los vectores o en el Álgebra Lineal en general. Esto revela un intrincado proceso de pensamiento presente en los estudiantes que motivó esta investigación y que permitió estudiar este proceso desde múltiples puntos de vista.

Como resultado de la aplicación de una secuencia de actividades compuestas por problemas cuidadosamente diseñados se logró caracterizar un tipo de pensamiento capaz de involucrar y magnificar la enseñanza - aprendizaje de los temas anteriormente señalados (Pensamiento Vectorial o PV que se entenderá como el *sistema de procesos cognitivos asociados con representaciones y operaciones vectoriales de objetos matemáticos de diversa índole*), que junto a una metodología coherente y una pertinente práctica pedagógica pudo llevar al estudiante de ingeniería a una aplicación exitosa de estos conceptos de la asignatura en la resolución de problemas.

METODOLOGÍA

En la investigación se elaboró una metodología sustentada en un modelo didáctico, Hernández et al. (2014), donde se imbrique la visualización, la manipulación geométrica, la heurística y el uso de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) como herramientas didácticas, para la resolución de problemas retadores; dirigido a fortalecer el proceso de enseñanza - aprendizaje de la construcción robusta de los conceptos propios del curso de Cálculo Multivariado y Álgebra Lineal en los estudiantes de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño.

Población y muestra

La investigación se desarrolló con estudiantes de carreras de Ingeniería de la Universidad Antonio Nariño, lo cual constituye la población. La muestra estuvo constituida por 35 estudiantes del curso de Cálculo Multivariado y Álgebra Lineal, correspondiente a la asignación de los cursos ofrecidos en el semestre al profesor.

Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En el desarrollo de la investigación se utilizaron los siguientes métodos teóricos:

- Histórico-lógico: se empleó con el fin de valorar la evolución y el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería.
- Análisis-síntesis: presente en la investigación para el proceso de diagnóstico, análisis del estado del arte y en los fundamentos teóricos, del proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería, propiciando interpretar y sintetizar los resultados, así como la elaboración de las conclusiones y recomendaciones.
- La observación participante: se utilizó en la observación de clases, para obtener información sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería.
- Encuesta: Se aplicó una encuesta de satisfacción a los estudiantes una vez concluida la aplicación del sistema de actividades.

Fases de la investigación

Para el logro de resultados satisfactorios en el proceso investigativo se definieron las siguientes fases:

Fase 1. Preparatoria. Diseño de instrumentos: observación participante, encuesta a estudiantes y docentes, pretest. Aplicación de instrumentos. Recogida de datos arrojados por instrumentos. Triangulación de instrumentos para concretar el problema de investigación y el objetivo general. Se establece además la metodología de investigación a seguir.

Fase 2. Revisión de la literatura. Determinación el estado del arte sobre el proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial en estudiantes de Ingeniería, para precisar las carencias presentes en las investigaciones, las cuales fueron bases para identificar el aporte teórico y determinar la unicidad del problema.

Fase 3. Construcción del marco teórico. El marco teórico estuvo dado por el pensamiento matemático basado en la visualización, el modelo DNR, la teoría de la resolución de problemas y problemas retadores, referentes sobre la modelación matemática y el contenido matemático sobre el Cálculo Vectorial. El marco teórico propició perfilar las categorías para la construcción del modelo didáctico.

Fase 4. Diseño de aportes teóricos y prácticos. En esta fase se elaboró un modelo didáctico y el sistema de actividades. Los problemas retadores planteados en estas actividades fueron enfocados para sacar a la luz los modos de Pensamiento Vectorial y estudiar sus características.

Fase 5. Trabajo de campo. Esta fase se dirigió a la aplicación del sistema de actividades por lo menos dos veces a través de un estudio piloto, lo cual perfeccionó las actividades y mejoró el modelo didáctico.

Fase 6. Recogida, análisis de la información resultante y evaluación. Recogida y procesamiento de la información, aplicación de encuesta de satisfacción, triangulación de resultados, elaboración de informes y publicación o socialización de resultados.

MARCO TEORICO

Sobre el pensamiento matemático y visualización

En la literatura pertinente el pensamiento matemático como tema de estudio se divide fundamentalmente en dos partes, que son el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). A continuación, se esboza sus similitudes y diferencias, haciendo énfasis en el PMA.

El PMA es aquel que involucra el uso de estructuras cognitivas producidas por un gran crisol de actividades matemáticas que permiten al individuo construir nuevas ideas que se continúan creando y extendiendo hasta su formalización. El PME será entonces aquel pensamiento intuitivo que se puede identificar algorítmicamente o con un proceso de reflexión en el trabajo matemático involucrado.

Para Tall (1990), el máximo representante de esta escuela, el paso del PME al PMA ocurre cuando se trasciende de describir a definir, se pasa de convencer a demostrar de forma lógica basada en esas definiciones, se progresa en la coherencia de las matemáticas elementales a la consecuencia de las matemáticas avanzadas basadas en entidades abstractas que el individuo debe construir a través de definiciones formales y donde se requiere una reconstrucción cognitiva.

Tall (2013) afirma que el pensamiento matemático comienza con los objetos físicos y las operaciones sobre los objetos. Por otra parte, plantea que los orígenes del pensamiento matemático están dados en “cómo la mente a través de conceptos materializados en objetos da origen a las matemáticas”. El pensamiento matemático comienza en la percepción, con el apoyo de la acción sensorio - motora y se desarrolla a través del lenguaje y del simbolismo.

Para Dreyfus (1991) el PMA consiste en una gran variedad de procesos de componentes interactivos, tales como representar, analizar, clasificar, verificar, manipular, traducir, modelar, visualizar, generalizar, conjeturar, inducir, sintetizar, abstraer y formalizar. Los procesos de representar y abstraer son los que más promueven avances en la comprensión y el manejo de situaciones matemáticas complejas. Afirma que la abstracción no es exclusiva del PMA. Se considera que una parte vital del PMA que aplica a esta investigación es la dada por este enfoque.

Como parte de los procesos de componentes interactivos está la visualización, la cual es fundamental para el desarrollo del PMA, en particular el Pensamiento Vectorial. Según Presmeg (2006) cuando una persona crea un arreglo espacial (que ha de entenderse como una serie de imágenes mentales superpuestas a partir de los datos de un problema), existe una guía creativa y visual de tal arreglo que permite procesar, construir y moldear la naturaleza del concepto espacial que está inmerso en el trabajo matemático. Este criterio muestra la forma recíproca de la toma del objeto matemático, de visualizarlo y transformarlo, criterios que son necesarios en el proceso de enseñanza - aprendizaje del Cálculo Vectorial.

Para Arcavi (2003) la visualización permite, además de las anteriores propuestas esbozadas, utilizar herramientas manuales o tecnológicas para alcanzar el propósito de una representación robusta y desarrollar las maneras de comunicación que se deducen de lo hecho en este proceso, lo cual es clave como fin del lenguaje matemático; el de poder expresar los resultados obtenidos de una manera clara y replicable que haga comprender y fortalecer el concepto tratado.

Los rasgos de estas definiciones son muy similares; en ellas se evidencian las operaciones de las imágenes mentales y visuales que se realizan mediante los procesos señalados y justifican plenamente el objetivo de esta investigación.

Una de las estrategias para desarrollar el PMA en el aula en el trabajo propuesto es enfatizar este cambio mental mediante el uso de las TIC, que a través de un software dinámico se permita el estudio de los conceptos propios de la asignatura y asumirlos en su parte geométrica y sus interpretaciones (modo vecto - dinámico)

Sobre la base del PMA en el Cálculo Vectorial algunas ideas que se tuvieron en la investigación fueron encaminadas a ampliar la valoración de la visualización más allá de sus aspectos semióticos y el avance de la caracterización de un Pensamiento Vectorial que permita entender los procesos cognitivos de los estudiantes para la construcción de significado de conceptos.

Es de destacar que el Pensamiento Matemático Elemental y el Pensamiento Matemático Avanzado son bases para el desarrollo del Pensamiento Vectorial.

Fundamentos del modelo DNR de Harel

Este componente se concibe desde la fundamentación teórica realizada por Harel (2008, a, b) en su trabajo del modelo DNR. En este trabajo, Harel (2008, a) plantea como propósito principal de la educación matemática el desarrollar el razonamiento matemático del estudiante, razonamiento que se compone de formas de entender y formas de pensar. El DNR basa su fundamentación en tres componentes: La Dualidad (D), la Necesidad (N) y el Razonamiento Repetido (R).

Tal escuela de pensamiento surge de dar sentido a las respuestas de cuál es la matemática que se debe enseñar en las escuelas y de cómo se debería enseñar, para lo cual existen como guía de desarrollo la enseñanza, la integridad de los contenidos (integridad matemática) y la necesidad intelectual que se crea en el estudiante.

Sobre la integridad matemática, hay que destacar que ella determinará las formas de entender y de pensar en el tiempo, pues ellas se transformarán y desarrollarán en el contexto de la práctica matemática, identificando, reconociendo y promoviendo estas formas en el pensamiento de los estudiantes, lo que redundará en la elaboración e implementación de currículos que estarán basados en la demostración matemática, que es uno de los principales objetivos de la educación matemática universitaria.

En cuanto a la necesidad intelectual del estudiante, será la forma como él entiende el cómo y el porqué de cierto conocimiento y el modo en el que acepta su existencia y quiere dominarlo. En esta interacción se evidencia la forma de entender del estudiante y la manera en la que nace la necesidad de realizar su descripción, junto a una justificación epistemológica que la validará y la hará avanzar a una forma de aprender.

Como estructura para el proceso de aprendizaje de las matemáticas, la Dualidad (D) hace referencia a la dupla conformada por las formas de entender (el significado e interpretación particular que una persona da a un concepto y sus relaciones. Una solución particular a un problema y la evidencia particular que una persona ofrece para establecer o refutar una afirmación matemática) y formas de pensar (que involucra tres categorías que se interrelacionan: creencias, enfoques de solución de problemas y esquemas de demostración).

La existencia de una Necesidad (N) intelectual es ese “algo” encargado de orientar y motivar a los estudiantes durante el proceso de aprendizaje como origen de la construcción de nuevos conocimientos y el desarrollo de formas de entender y de pensar matemáticamente.

El Razonamiento Repetido (R) facilita la interiorización y organización del conocimiento en cada estudiante. En la propuesta DNR, Harel sostiene que a partir de la necesidad intelectual (situación matematizable) y el actuar del estudiante se tienen que dar primero las formas de entender, para luego desarrollar las formas de pensar.

En su segundo trabajo, Harel (2008, b) amplia de manera considerable su teoría del DNR del proceso de aprendizaje al proceso de enseñanza, viéndolo como una unidad en sí para la educación matemática.

En este sentido, el autor propone que el docente, en su calidad de actor principal del proceso de enseñanza, tenga suficiente dominio y claridad de la integridad matemática, discutida anteriormente, y que responde a la situación de cuál es la matemática que se debe enseñar en las escuelas.

Se muestra cómo el docente en sus prácticas de enseñanza – aprendizaje deba tener su propio modelo DNR enmarcado en sus principios fundamentales y que le permita planear, preparar, ejecutar y evaluar cada una de sus clases, que lo conduzcan a desarrollar el pensamiento matemático en sus estudiantes, respondiendo a la situación de cómo se debe enseñar la matemática en la escuela.

El modelo DNR tiene su desarrollo actuando en tres categorías generales de la educación matemática: cuatro premisas, seis conceptos y sus afirmaciones. Las premisas matemáticas son el conjunto de saberes disciplinares, junto a sus formas de entender y sus formas de pensar.

Las premisas del aprendizaje serán las que tienen la relación conocimiento – saber, que es el resultado de la resolución de problemas asociados a una situación específica y que además tiene el proceso de transferencia de las formas de entender a las formas de pensar, que son independientes, pero se garantiza tal transferencia.

Las premisas de enseñanza son las que orientan el aprendizaje, pues no todos los conocimientos matemáticos se adquieren espontáneamente, sino que hace falta un instructor para tal fin.

Las premisas ontológicas son las que se ven influenciadas por algún punto de vista personal o alguna creencia propia de las matemáticas que hacen tener una necesidad intelectual, permitiendo hacer las orientaciones e interpretaciones intrínsecas entre docente y estudiante.

Los conceptos que propone Harel (2008) son sobre los que se basa fundamentalmente su modelo DNR y que son los puntos de interrelación del proceso de enseñanza – aprendizaje que llevan al docente a tener las herramientas para realizar el seguimiento respectivo del aprendizaje de sus estudiantes.

El concepto de las acciones mentales son las respuestas a una causa, incitada por una necesidad intelectual que deriva en la representación del concepto de formas de entender, que generan un conjunto de características de cognición que dan pie al concepto de formas de pensar, relacionadas a la acción mental que se ha hecho.

El concepto del aprendizaje el autor lo define como "… el proceso continuo de desequilibrio, en las fases de equilibrio, manifestado en las necesidades intelectuales y psicológicas, y en las formas de entender o de pensar que se utilizan en la construcción de una nueva fase" (Harel, 2008).

El concepto de la base de conocimientos del docente es la fundamentación y el dominio de los conocimientos disciplinares que el docente conoce y domina y que promoverá en sus estudiantes el aprendizaje (detección y corrección de problemas de cognición, junto a la organización y conservación de conocimientos), más la fundamentación pedagógica necesaria para planificar y ejecutar la clase.

El concepto de la práctica docente está basado en los conceptos de las acciones del docente, y como característica especial, de las formas de enseñar. Se puede pensar como el principio de dualidad lo reflejado en los recursos que el docente lleva al aula, los cuales le permitan interactuar con los estudiantes en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Por último, la categoría de las afirmaciones corresponde al resultado de la implementación de los tres principios del modelo DNR. La interacción entre las formas de entender y las formas de pensar dan un contraste que resulta en dar una visión más amplia del pensamiento matemático y sugiere un cambio en las metodologías de enseñanza alternativas. Este tipo de pensamiento es clave para la implementación de las actividades programadas en el aula de esta investigación, pues resulta ser un excelente modelo que puede ser verificable en el tiempo.

En el presente artículo se realizará un contraste del enfoque de este modelo que se ha descrito con el del Pensamiento Vectorial, del cual se ampliará la visión de los modos de pensamiento de estos dos apartados para el Cálculo Vectorial.

LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DEL CÁLCULO MULTIVARIABLE DESDE LA PERSPECTIVA DEL DNR

En el artículo "The Learning and Teaching of Multivariable Calculus: A DNR Perspective" del autor Harel (2021) se expone los diferentes fenómenos del aprendizaje y la enseñanza del cálculo multivariable, basado en DNR. El objetivo de este artículo es abordar la pregunta "¿Cómo se tratan ciertos conceptos fundamentales de cálculo multivariable (MVC) en la instrucción actual y cómo se tratarían en la instrucción basada en DNR" (Harel, 2021, p.3). Estos conceptos se analizan mediante diferentes fenómenos presentados en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo multivariable en temas mencionados por el autor como linealización, derivada total, regla de la cadena, diferenciación implícita y producto cruz. Este estudio se basa en condiciones específicas buscando la necesidad de los estudiantes por aprender matemáticas mediante prácticas, organización y retención de los conocimientos aprendidos.

En la segunda sección del artículo, el autor analiza la relación enseñanza – aprendizaje del cálculo multivariable centrándose en los conceptos de linealización, derivada total, regla de la cadena, diferenciación implícita y producto cruz establecidos en ese orden. Este análisis es organizado por medio de los tres principios fundamentales de la tercera premisa "DNR" integrado con el método de enseñanza - aprendizaje tradicional. En el análisis por temáticas el autor establece que el concepto de linealización debe estar diseñado en el DNR buscando relaciones entre la comprensión y la forma de pensar, "un examen del tratamiento del concepto de linealización revela dos problemas: (a) escasa atención al concepto y (b) enfoque prácticamente exclusivo en su interpretación geométrica" (Harel, 2021, p.6).

El concepto de linealización determina que este es fundamental en todo proceso de cálculo donde el límite del cociente de diferencias, es su definición básica y donde, según el autor, "si este límite existe, entonces su valor, denotado por f'(a), es la derivada de f en $x = a$" (Harel, 2021). Después de indagar con algunos instructores, Harel identifica que durante el curso de cálculo multivariable no se imparten más conocimientos sobre este tema sino únicamente los establecidos para cumplir con el plan de trabajo del curso; la justificación que generalmente se da de esto es que para los estudiantes es una definición abstracta y la falta de comprensión.

En el enfoque exclusivo de la interpretación geométrica, el autor revela que existe un problema con el concepto de linealización y la interpretación grafica de ésta. Según lo afirma Harel (2021), "la doctrina dominante en la enseñanza del cálculo parece basarse en la representación simbólica acompañada de la ilustración geométrica, con una atención insignificante a la configuración física de las covariaciones cuantitativas" (p.8). Finalmente en la linealización la importancia de esta área debe ser construida por los estudiantes quienes se deben involucrar constantemente, al igual que el razonamiento para dar soluciones y transformar relaciones no lineales entre variables.

En los conceptos de la derivada total, la regla de la cadena y la diferenciación implícita, el autor manifiesta que se debe tener la capacidad de aplicar, organizar y reestructurar el conocimiento en jerarquías y tener la capacidad de recordar y retener el conocimiento en tiempos prolongados; de igual manera menciona cómo estos "construyen entendimientos estables [y formas de pensar] construyéndolos repetidamente de nuevo ... para construir un esquema, los estudiantes deben participar repetidamente en el razonamiento que se solidificará en ese esquema para tener ocasiones de desarrollar las imágenes que lo sustentan" (Thompson et al., 2014, pág.12).

Por otro lado, Harel (2021) incluye los "atajos" que toman los estudiantes y los cataloga como inhibidores, los cuales corresponde a que, si un estudiante aplica su razonamiento repetidamente llegará a un punto de no avanzar con ese razonamiento matemático, o como catalizadores que se refieren a que un estudiante abrevia procesos mientras construye su pensamiento conceptual; esto se encuentra textualmente en la siguiente afirmación:

> "I distinguish between two forms of "shortcuts", inhibition and catalyst, depending on the learning process through which the students acquire the shortcut. A shortcut is an inhibition if it is introduced to students before they had repeatedly applied the reasoning process underlying it to the point that they have encapsulated that process. I dubbed such a shortcut inhibition because its practice inhibits mathematical growth. The criterion for such an encapsulation is what defines a catalytic shortcut. Namely, a shortcut is a catalyst when one is able to carry out an abbreviated form of a process while constructing in thought the abridged conceptual links underlying the process. (Harel. 2021)

Con relación a los atajos inhibidores y catalizadores del concepto la regla de la cadena, por lo general en el material bibliográfico de cálculo multivariado se omiten las definiciones de derivadas totales de la transformación de matrices y por ello se carecen de herramientas para la regla de la cadena como se evidencia en la fórmula presentada por Harel (2021, p.10) y "cualquiera que sea la trayectoria que uno elija para llevar a cabo este proceso."

Después de detallar todas las observaciones realizadas por el autor, se piensa que la comprensión matemática de los estudiantes se genera después del aprendizaje de procedimientos básicos matemáticos para poder pensar y analizar. Como ejemplo de lo anterior se tiene el estudio de Kwon et al. (2015) sobre argumentación, donde estudiantes de pregrado demuestran que la filosofía del pensamiento es relevante en el estudio del cálculo multivariado. De igual manera, el trabajo de Yerushalmy (1997) presenta el aprendizaje de estudiantes de séptimo en la comprensión de funciones de una sola variable y varias variables.

AVANCE EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VECTORIAL

Como parte del aporte teórico de la tesis doctoral del investigador principal del presente artículo, se manifestaron en el aula cinco modos de Pensamiento Vectorial, los cuales permitieron esbozar una rúbrica de caracterización del pensamiento la cual se puede observar en la Figura 1 donde se ve involucrado en la resolución de los problemas consagrados en ocho actividades ajustadas para tal fin.

Esta rúbrica es uno de los resultados más importantes de la investigación, la cual se construyó observando en el trabajo de los estudiantes en el aula los modos de entender y de pensar en la solución de un problema específico de la asignatura (recordando lo descrito por Harel (2021)). El análisis que se realizó de estas soluciones vislumbró que algunos estudiantes relacionaban un problema y su solución en un lenguaje puramente vectorial, cuyas consecuencias mostraban que había ciertos modos de pensar que no estaban contemplados en un análisis inicial.

Algunos de estos modos de pensamiento fueron similares a los del trabajo de Sierpinska (2000) y a los modos de pensar en Álgebra Lineal (Dorier, 1995), donde se ajustaron, modificaron y generalizaron a los requerimientos de lo observado en el curso de Cálculo Vectorial. A continuación se da una breve descripción de tales modos de Pensamiento Vectorial.

El modo vecto – algorítmico manifiesta la utilización del álgebra vectorial para darle solución a un problema. Es el modo más recurrente observado en las soluciones dadas por los estudiantes. En este modo de pensamiento se encuentran, por ejemplo, el uso de los algoritmos vectoriales como productos o determinantes, el álgebra del producto de cuatérnios, etc.

El modo vecto – dinámico manifiesta la utilización de herramientas tecnológicas de geometría dinámica para visualizar un problema o para entender algún concepto teórico que acarree resolver un problema (Donevska, 2016). En este modo se encuentran el uso de las construcciones de los productos vectoriales, curvas y superficies orientadas, campos vectoriales, etc.

El modo vecto – estructural manifiesta la utilización de estructuras vectoriales, tales como axiomas o teoremas propios, para transformar un problema y darle solución. Como ejemplo de tales modos podemos mencionar el uso de axiomas propios de los espacios vectoriales, las desigualdades de magnitud y producto escalar, etc.

El modo de orientabilidad manifiesta la necesidad de un tipo de orientación (por ejemplo productos vectoriales, áreas o volúmenes con signo, álgebra de formas diferenciales,…) que se usa para darle sentido a la solución de un problema. Así se puede mencionar el uso de esquemas de orientación que permitan darle sentido a una operación vectorial, el uso de los vectores tangentes y normales para caracterizar una recta o un plano respectivamente, etc.

El modo de generalización manifiesta la necesidad de ampliar u observar la solución de un problema desde otros puntos de vista para así proponer otros problemas y darles solución. Se observa por ejemplo el uso de este modo para complementar o expandir una construcción geométrica o un algorítmo efectivo que resulte útil para replicarlos, etc.

Cabe resaltar la importancia de estos modos de pensamiento en el trabajo con los estudiantes a la vez que tan solo es un avance para lograr una caracterización del Pensamiento Vectorial.

RÚBRICA PARA LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO VECTORIAL					
	1. Modo vecto-algorítmico	***2.*** Modo vecto-dinámico	***3.*** Modo vecto-estructural	***4.*** Modo de orientabilidad	***5.*** Modo de generalización
	0	0	0	0	0
	PARÁMETROS DE EVALUACIÓN				
PARÁMETROS DE EVALUACIÓN	***1.1.*** Recurre a una estrategia algorítmica eficiente y efectiva para resolver un problema.	***2.1.*** Por medio de herramientas tecnológicas visualiza completamente la situación problema.	***3.1.*** Reconoce la estructura vectorial implícita en un problema.	***4.1.*** Aplica la orientación del objeto geométrico subyacente a la solución de un problema.	***5.1.*** Propone algún algoritmo vectorial alternativo al desarrollado en clases.
	1.2. Presenta el desarrollo de la actividad con el proceso algorítmico correcto.	***2.2.*** Utiliza los vectores elaborados con geometría dinámica para dar solución a un problema.	***3.2.*** Propone una manera vectorial para formular la solución de un problema.	***4.2.*** Reconoce la orientación como factor determinante en una solución.	***5.2.*** Muestra otro tipo de construcción geométrica para visualizar un problema.
	1.3. Demuestra dominio de los procesos algorítmicos vistos con antelación a la actividad desarrollada.	***2.3.*** Construye situaciones geométricas que involucran vectores.	***3.3.*** Recurre a esquemas vectoriales para dar solución a un problema.	***4.3.*** Muestra una orientación al análisis de un esquema vectorial dado.	***5.3.*** Modifica una estructura vectorial dada que sirva para dar solución a un problema.
	1.4. Utiliza los algoritmos vectoriales para construir una solución de un problema.	***2.4.*** Conceptualiza el cálculo vectorial desde su faceta dinámica.	***3.4.*** Transforma un problema dado para resolverlo con estructuras vectoriales.	***4.4.*** Entiende la relación entre la orientación y una estructura vectorial dada.	***5.4.*** Conjetura diversos tipos de orientación distinta a la estándar.

Figura 1. Rúbrica de caracterización del Pensamiento Vectorial.

RESULTADOS

A la luz de las evidencias de la implementación del sistema de actividades y teniendo en cuenta el marco teórico mencionado con anterioridad, se obtuvo que:

El 35% de los estudiantes que resolvieron los problemas extra-clase mostraron nuevas formas de pensar algunos problemas propuestos desde el enfoque del Pensamiento Vectorial, dando así una oportunidad de mejora en este sentido. Estos problemas extra-clase conllevaban un alto nivel de complejidad en su solución y movilizaban gran parte de los conceptos del curso, donde las estrategias recurridas por los estudiantes para su solución mostraban más de una forma de pensar, por lo que la Dualidad (D) esbozada por Harel (2008) adquiere una generalización dada por los modos de pensar vectorialmente.

El 83% de los estudiantes usaron adecuadamente las herramientas y plataformas tecnológicas para la visualización de los problemas y sus soluciones, trabajando desde la práctica. De esta forma se manifestó de manera general el modo vecto - dinámico y el modo de orientabilidad en la solución de los problemas sugeridos, dando así paso a nuevos tipos de problemas conjeturales y soluciones planteadas por los estudiantes, lo que también manifiesta el modo de generalización del Pensamiento Vectorial.

El 74% de los estudiantes desarrollaron notaciones del Cálculo Vectorial que permitió optimizar las formas de entender y las formas de pensar de un problema particular, lo que contrasta con la teoría DNR de Harel (2008) al trabajar cada problema desde un punto de vista vectorial, donde la notación y métodos de solución de un problema particular quedaban enmarcados en el modo vecto-algorítmico y vecto – estructural y el modo de orientabilidad del Pensamiento Vectorial.

El 92% de los estudiantes se empoderó de las herramientas del Pensamiento Vectorial para la modelación de un problema específico, dando otro énfasis en la solución de los mismos. Esto se logró, por ejemplo, con ayuda de las herramientas tecnológicas al dinamizar un problema, o al aplicar algoritmos netamente vectoriales para la solución de un problema, o al ver la necesidad de recurrir a un esquema orientado para la aplicación de conceptos del curso (como por ejemplo el producto vectorial o el álgebra de formas diferenciales), o al ver que el problema podría complementarse con la solución de otro problema análogo asociado a él, lo que enmarca el uso de los modos de pensar vectorialmente.

El 74% de los estudiantes notaron un cambio de paradigma de enseñanza – aprendizaje del Cálculo Vectorial a través del Pensamiento Vectorial y sus rúbricas de caracterización, lo cual se llevó a cabo mostrando el trabajo clásico de los libros de texto y contrastándolo con los modos de Pensamiento Vectorial. En este contraste se utilizaron los libros de Stewart (2018) y Marsden y Tromba (1991), junto con las ideas plasmadas en el aula por el investigador y los estudiantes, quienes analizaban y sintetizaban las formas óptimas de pensar y de entender un problema dado, de nuevo contrastando con la teoría DNR de Harel (2008).

Como un producto de los resultados de esta investigación, que no está contemplada en la tesis doctoral del autor principal, y del cual determina uno de los objetivos principales de este artículo, es el de dar un contraste entre el Pensamiento Vectorial y la perspectiva de la teoría DNR para el Cálculo Multivariable desarrollada por Harel (2021) en su artículo y del cual son analizados algunos conceptos de la asignatura.

Cabe resaltar que en la tesis doctoral se abordaron los mismos conceptos y más, pero mostrados desde un enfoque puramente vectorial, lo que conllevó a una comprensión significativa de los mismos y a su posterior puesta en práctica.

Sobre el producto cruz cabe mencionar que el mismo se observó bajo la lupa de los modos de Pensamiento Vectorial descritos en la rúbrica de caracterización, el cual también es analizado bajo la óptica de los modos de pensar en Álgebra Lineal por Guerra y Parraguez (2019). El mismo se definió usando el álgebra de los cuatérnios dada por Hamilton y estructurada de la siguiente forma:

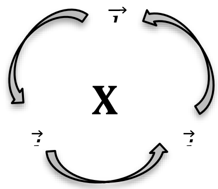
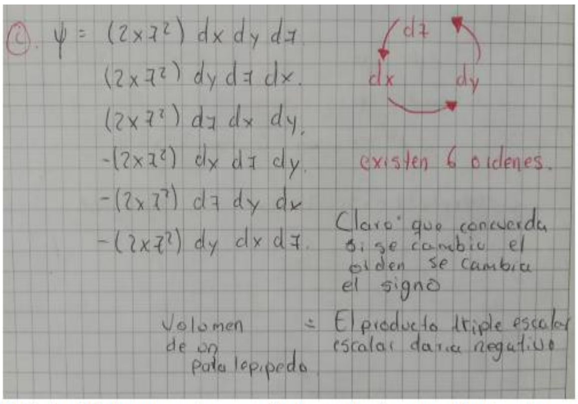


Figura 2. Esquema orientable del producto vectorial.

Lo anterior puso en manifiesto todas las propiedades de este producto, incluidas las geométricas y estructurales, más las propiedades de orientabilidad tanto de la estructura como del cálculo del mismo. Como contraste a lo indicado por Harel (2021), se podría pensar que la forma de inducir este concepto es un atajo catalizador, pues el mismo permitió, por ejemplo, motivar los campos rotacionales y el álgebra de las formas diferenciales, las cuales no hubieran sido posibles sin la ayuda de este importante concepto mostrado desde su faceta vectorial.

Pero lo anterior va mucho más allá de ser un atajo, pues la parte geométrica y estructural, que muchos autores exponen de manera ambigua y sin conexión con otros conceptos del curso Stewart (2018) y Tromba (1991), se muestran de manera natural, sin la necesidad de formulaciones abstractas ni de notaciones que violan un principio de forma establecido.

A modo de ejemplo se planteó un problema de formas diferenciales que versa: Dé los otros órdenes de la 3 - forma ψ. ¿Concuerda esto con lo visto anteriormente en el triple producto escalar de vectores? Justifique.



RTA// Existen 6 órdenes, y claro que si concuerda si se cambia el orden se cambia el signo, el producto triple escalar (que da volumen de un paralelepípedo) daría negativo.

Figura 3. Problema que representa el modo vecto – estructural.

A lo que los estudiantes acuden al esquema introducido para el producto vectorial y lo utilizan para generalizar las propiedades de las formas diferenciales, además de hacer conexiones geométricas y estructurales.

Cabe recalcar que la forma de introducir el producto vectorial de esta manera indujo la transición fluida entre medidas con signo, interacción de curvas o superficies con campos vectoriales, y otras más.

Sobre los demás conceptos abordados por Harel de las derivadas multivariables, lo mostrado en la tesis doctoral usando el Pensamiento Vectorial, motivó la definición de derivada total desde el punto de vista de los modos de pensar vectorialmente, lo cual implicó la introducción de los demás conceptos de forma vectorial.

Es así que, con base en la definición del concepto de derivada total para una función $w = f(x, y, z)$, motivada por sus razones geométricas y estructurales, se muestra como:

$$\partial w = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \langle f_x, f_y, f_z \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle = \nabla f(\vec{r}) \cdot \partial \vec{r}$$

Lo cual revela el carácter puramente vectorial de la definición, observando una conexión entre la regla de la cadena estudiada en cursos anteriores, lo que hace empoderar la definición del concepto y aplicarlo a los demás temas como son: Linealización y planos tangentes; Superficie de nivel de w ($\partial w = 0$) y $\partial \vec{r}$ lineal.

Regla de la cadena: Tomar a w como función de las variables principales t y s, lo que modifica la última versión de la derivada total mostrada (asemejándose al trabajo realizado por Dray & Manogue (1999) y (2003).

Derivada implícita: Tomando la primera versión y derivando con respecto a una variable independiente específica.

Derivada direccional: Tomando a $\partial \vec{r}$ como constante.

A la luz de lo indicado por Harel, de nuevo se diría que el concepto de derivada total de una función es un atajo catalizador, dado los conceptos subyacentes que se desprenden, pero claro que todo ello depende de un estudio de las curvas y superficies para cerrar el ciclo formal detallado por Harel (2021), los cuales constan de las fases preformal, formal y posformal.

Esta presentación de los temas anteriores no es común en los libros de texto, lo que al parecer del investigador deja de lado el formalismo recargado de notación confusa e inconexa a los demás temas del curso, lo que Harel ataca en su artículo y es el germen de los atajos inhibidores.

A manera de ejemplo se planteó el siguiente problema: *Por la estructura de los materiales que conforman una caja, su longitud, su ancho y su altura varían con el tiempo. En cierto instante las medidas de la caja son de dos metros su longitud y de tres metros su ancho y su altura. Se observa que la longitud y el ancho de la caja aumentan a razón de 2 m/h y que su altura disminuye a razón de 1m/h. En el momento que se tomaron las variaciones de las medidas, determine las razones a las que cambian el volumen de la caja y el área lateral de la caja.*

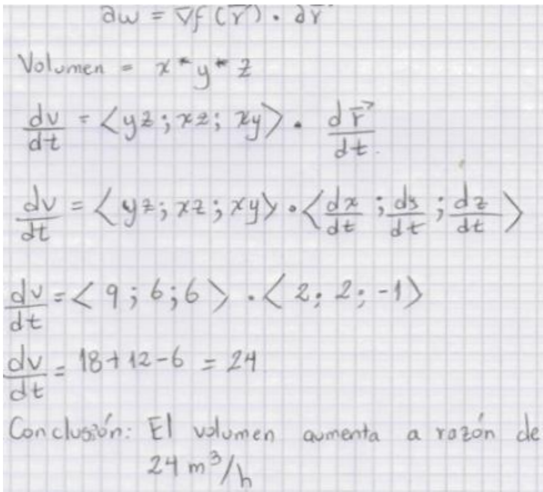


Figura 4. Problema que representa el modo vecto – algorítmico.

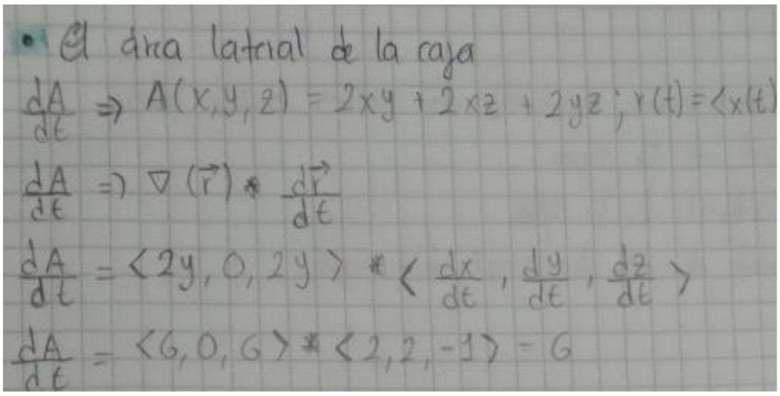


Figura 5. Problema que representa el modo vecto – algorítmico.

En este problema típico sobre regla de la cadena en varias variables, se nota que los estudiantes utilizan la notación deducida por la derivada total mostrada anteriormente y la aplican para resolver el problema. Nótese la sugestión del Pensamiento Vectorial involucrado en esta solución. El problema se complementó con el análisis geométrico y dinámico de la situación involucrada, lo que trajo consigo otro tipo de problemas que de nuevo hacía uso de la forma vectorial de esta derivada total, lo que lo descataloga únicamente como un atajo catalizador.

CONCLUSIONES

Las TIC permiten avanzar en la caracterización del Pensamiento Vectorial

Los modos de pensar vectorialmente muestran la necesidad de un cambio de paradigma entre lo que se imparte en un curso de Cálculo Vectorial y lo que se viene realizando actualmente con las herramientas tecnológicas disponibles, ya que se ha evidenciado el empoderamiento del estudiante en la formación de los conceptos del curso y su posterior aplicación. Lo anterior se enmarca mayormente en la visualización como mediador entre las formas de pensar vectorialmente, lo que se decanta en el modo vecto – dinámico.

La orientabilidad es un rasgo característico del Pensamiento Vectorial

En muchas investigaciones sobre la enseñanza – aprendizaje del Álgebra Lineal se hace una extrapolación entre sus modos de pensar identificados por Sierpinska (2000) y los que existen para el Cálculo Vectorial, como por ejemplo los que están enmarcados en la teoría DNR de Harel (2021). En esta investigación se evidenció otro modo de pensar vectorialmente que induce una orientación geométrica o estructural, que, si bien se puede analizar desde el Álgebra Lineal, en el curso de Cálculo Vectorial adquiere una relevancia importante al analizarse desde su faceta dinámica, y que los estudiantes construyen el significado de muchos conceptos del curso, donde algunos generalizan resultados estudiados en cursos anteriores, como lo es, por ejemplo, el Teorema Fundamental del Cálculo.

El Pensamiento Vectorial como generalizador en el marco del DNR

En esta investigación se realizó una caracterización de los modos de pensar vectorialmente que encierra lo propuesto por Harel y lo generaliza. Vale la pena aclarar que lo propuesto en este artículo no está basado en una coherente interpretación de los demás conceptos previos al curso de Cálculo Vectorial, por lo que la generalización prevista no está referenciada en este preconcepto.

Se concuerda con Thompson (2017) acerca de la necesidad de introducir los conceptos básicos del Cálculo a partir de mucho más antes en secundaria, pues el cambio de paradigma matemático se hace innovador al estudiar los conceptos de incrementos y la matemática del movimiento.

En la experiencia del investigador, muchas veces los estudiantes mantienen ciertos obstáculos, que pueden ser didácticos, epistemológicos o de otra índole, y algunos docentes tienden a pensar que los estudiantes ya tienen tales conceptos bien desarrollados por lo que avanzan sin detenerse en tales obstáculos.

Es por lo anterior que se debe reflexionar, además de ello, en llevar un texto acorde con las necesidades del curso. Un texto que motivó mucha de la notación usada en la tesis doctoral fue el de Thompson (1914), que al parecer del investigador merece la atención de la comunidad de educadores matemáticos. Temas como las reglas de las derivadas demostradas por medio de cantidades infinitamente pequeñas que son negligibles, y la geometría de estos diferenciales, hacen ver al estudiante que se puede comprender tales construcciones sin la necesidad de formalismos que obscurecen el horizonte de la solución de algún problema. Con un lenguaje poco tradicional, la exposición de los temas se hace agradable y no empaña la veracidad y la elegancia de los resultados. Lo anterior redundará en el empoderamiento de los diversos conceptos de la asignatura por parte de los estudiantes y los replicarán en los cursos mencionados anteriormente en la introducción del presente artículo.

Resta por explorar las demás facetas del Pensamiento Vectorial y sus modos de pensamiento, lo cual será el insumo de próximas publicaciones sobre el tema y de las cuales se mostrarán sus utilidades en la caracterización de este tipo de pensamiento matemático.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003). *The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 52(3), 215–241

Donevska, A. (2016). *Thinking modes, with or without technology?* 13th International Congress on Mathematical Education. Hamburg.

Dorier, J. L. (1995). *A general outline of the genesis of vector Space theory.* Historia Matematica, 22 (3), 227-261.

Dray, T & Manogue, C. A. (1999). *The vector calculus gap*, PRIMUS 9, 21–28

Dray, T & Manogue, C. A. (2003). *Using differentials to bridge the vector calculus gap*, College Math. J. 34, 283–290

Dreyfus, T. (1991). *Advanced mathematical thinking processes.* In Tall, D. (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, (pp.3-21). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Guerra, R. y Parraguez, M. (2019). *Comprensión del producto vectorial desde los modos de pensamiento: El caso de profesores en formación inicial. Comunicación*. XV CIAEM-IACME, Medellin, Colombia.

Harel, G. (2008 a). *DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focus on Proving, Part I*, ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 40, 487-500.

Harel, G. (2008 b). *DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II*, ZDM— The International Journal on Mathematics Education, 893-907.

Harel, G. (2021). *The learning and teaching of multivariable calculus: A DNR perspective*, ZDM—Mathematics Education, Springer.

Hernández, Sampieri, R., Fernández C. y Baptista L, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. Sexta Edición. México: McGrawHill / Interamericana Editores S.A. de C.V.

Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Vol. 2. New Ed Edition.

Kwon, N., Bae, Y. & Oh, N. (2015). *Design researchon inquiry – based multivariable calculus: Focusing on students´ argumentation and instructional design*. ZDM mathematics Education, 47(6)

Marsden, J.E. and Tromba, A.J. (1991). *Cálculo vectorial (3a ed.)*. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, SA. Ortega, J.

Presmeg, N. C. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics.* In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sierpinska, A. (2000). *On some aspects of students´ thinking in Linear Algebra*. En Dorier, J.L. (Eds.), The teaching of Linear Algebra in question (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stewart, J. (2018). *Calculus of several variables. Early Transcendents*. Seventh edition. Brooks-Cole/Cengage Learning.

Tait, G. P. (1873). *Elementary Treatise on Quaternions*. País: Oxford.

Tall, D. (1990). *Inconsistencies in the learning of calculus and analysis*. Focus 12 (3 y 4), 49-63

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge.

Thompson. S. P. (1914). *Calculus Made Easy: Being a Very-Simplest Introduction to Those Beautiful Methods of Reckoning which Are Generally Called by the Terrifying Names of the Differential Calculus and the Integral Calculus*. New York: MacMillan Company, 2nd Ed.)

Thompson, P.W & Carlson, M.P (2017). *Variation, covariation and functions: fundamental ways of thinking mathematically*. In J. Cai (Ed.), Compendium for research in mathematics education (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oscar Andrés Galindo Rivera
Universidad Antonio Nariño, Colombia
ogalindo@uan.edu.co

Mary Falk de Losada
Universidad Antonio Nariño, Colombia
director.doctoradoem@uan.edu.co

ISSN: 2603-9982

Matias Mororó, F. N., Vieira Alves, F. R., Fernandes Fontenele, F. C. , y Teófilo de Sousa, R. (2023). Funciones de primer grado y Teoría de las Situaciones Didácticas: una experiencia en la Educación Básica brasileña. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 6*(1), 19-39

FUNCIONES DE PRIMER GRADO Y TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS: UNA EXPERIENCIA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA BRASILEÑA

Francisca Narla Matias Mororó, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Brasil

Francisco Régis Vieira Alves, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Brasil

Francisca Cláudia Fernandes Fontenele, Universidade Estadual Vale do Acaraú, Brasil

Renata Teófilo de Sousa, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Brasil

Resumen

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra aún presentan algunos obstáculos, como la mecanización del conocimiento y la dificultad en la comprensión del lenguaje algebraico. Por tanto, el objetivo de este estudio es describir una práctica docente sobre el contenido de funciones del 1° grado, con un aporte desde la Teoría de las Situaciones Didácticas en el contexto de la enseñanza remota. Se utilizó como metodología la Ingeniería Didáctica, con un grupo de veinticinco estudiantes participando en un proyecto de complementación pedagógica, que ofrece clases de matemáticas en horario extracurricular. Al utilizar la Teoría de Situaciones Didácticas para el experimento, el software GeoGebra fue considerado como una herramienta de apoyo para la etapa de institucionalización. Se entendió, por tanto, que la Teoría de las Situaciones Didácticas representa una teoría didáctica significativa en el contexto de las funciones polinómicas de 1er grado y el desarrollo del pensamiento algebraico, especialmente de cara a la enseñanza a distancia, en la que se plantea la necesidad de incentivar a los estudiantes a ser activos en su aprendizaje, se volvió aún más esencial.

Palabras clave: *Teoría de las Situaciones Didácticas; Ingeniería Didáctica; Enseñanza de álgebra; GeoGebra.*

1st degree functions and Theory of Didactic Dituations: an experience in Brazilian Basic Education

Abstract

The teaching and learning of algebra still have some obstacles, such as the mechanization of knowledge and the difficulty in understanding the algebraic

Recibido: 10/08/2022; Aceptado: 10/04/2023

language. Therefore, the objective of this study is to describe a teaching practice on the content of functions of the 1st grade, with a contribution from the Theory of Didactic Situations in the context of remote teaching. Didactic Engineering was used as a methodology, with a group of twenty-five students participating in a pedagogical complementation project, which offers mathematics classes in extracurricular hours. By using the Theory of Didactic Situations for the experiment, the GeoGebra software was considered as a support tool for the institutionalization stage. It was understood, therefore, that the Theory of Didactic Situations represents a significant teaching theory in the context of polynomial functions of the 1st degree and the development of algebraic thinking, especially in the face of remote teaching, in which the need to encourage students to be active in their learning, it became even more essential.

***Keywords**: Theory of Didactic Situations; Didactic Engineering; Teaching Algebra; GeoGebra.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas en Brasil, como reflejo de lo ocurrido en otras partes del mundo, pasó por muchas transformaciones y reestructuraciones curriculares. Al mirar, sin embargo, sobre la enseñanza del álgebra en el contexto de la Educación Básica, especialmente dirigida a la Enseñanza Básica, es necesario comprender cómo los documentos rectores de la educación en el país tratan la enseñanza y el currículo de este campo del saber en esta etapa de escolaridad (Gil, 2008).

Los Parámetros Curriculares Nacionales presentaban el álgebra incorporada en un bloque denominado Números y Operaciones, en el que su función era resolver problemas, construir abstracciones y generalizaciones. En este caso, la enseñanza del álgebra fue enfatizada en el 3° y 4° ciclo de la Enseñanza Fundamental, hoy representada por el ciclo del 6° al 9° año de escolaridad, que en Brasil comprende estudiantes de 11 a 15 años (Brasil, 1997).

Con la publicación de la Base Curricular Común Nacional (BNCC, acrónimo en portugués) para la Enseñanza Infantil y Fundamental, el currículo de álgebra ganó énfasis, teniendo una unidad temática exclusiva, y estando presente en todo el curso de la Educación Básica, desde los inicios hasta los años finales. Sin embargo, el octavo grado (8º grado) es la etapa escolar en la que hay mayor predominio de temas relacionados con el álgebra (Brasil, 2018).

Mientras tanto, al analizar los resultados de las evaluaciones externas, como el Sistema de Evaluación de la Educación Básica (SAEB, acrónimo en portugués), hay un retraso en el aprendizaje de las matemáticas. Investigaciones de Ando (2012) y Lopes (2021), entre otros, muestran que tal brecha en la enseñanza de las matemáticas se acentúa en los contenidos relacionados con el álgebra.

Entendiendo, sin embargo, la voluminosa cantidad de temas relacionados con el álgebra, se decide limitar este estudio a las funciones de primer grado, ya que también presenta obstáculos en su aprendizaje. Algunos de estos obstáculos son la dificultad para comprender situaciones problema que utilizan tales conocimientos, el obstáculo para percibir una identificación/asociación entre las variables y/o la comprensión de los elementos que caracterizan la representación geométrica de una función, por ejemplo (Kuhn y Lima, 2021; Lima, 2017).

Ante ello, hay la necesidad de realizar estudios que consideren estos obstáculos y que favorezcan los subsidios para la construcción de nuevas prácticas docentes, así como el uso de herramientas que colaboren con el aprendizaje, especialmente en el escenario educativo actual y en el contexto de pandemia. Así, el objetivo de este trabajo es describir una práctica docente sobre el contenido de las funciones de primer grado, con el aporte de la Teoría de las Situaciones Didácticas en el contexto de la enseñanza remota.

Es en este sentido, y considerando la importancia de desarrollar prácticas didácticas que fomenten el papel activo y participativo del alumno, que se optó por la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986). Esta teoría de la enseñanza, en general, propone que el aprendizaje ocurre en virtud del contacto del alumno con una situación dentro de un *milieu* (interacciones con los pares, el contexto del aula) y un sistema de enseñanza.

La realización de una Situación Didáctica considera cuatro etapas en el camino del aprendizaje, en las que tres de ellas se centran en las construcciones de los estudiantes (acción, formulación y validación) y una última (institucionalización), en el trabajo del docente. En la etapa de institucionalización de este trabajo, en particular, se utilizó como herramienta metodológica el software GeoGebra, con el propósito de favorecer la visualización del contenido por parte de los estudiantes, así como la comprensión del concepto formalizado por parte del docente.

El software GeoGebra es una herramienta matemática dinámica gratuita, que permite la construcción de diferentes objetos y favorece la comprensión de las relaciones entre geometría, álgebra y cálculo. GeoGebra surgió en 2001, presentado en la tesis doctoral de Markus Hohenwarter, construido para ser utilizado para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Carneiro, 2014), siendo utilizado hoy también en otras áreas del conocimiento.

El dinamismo que ofrecen las herramientas de GeoGebra proporciona el uso de diferentes representaciones en una sola interfaz con movimiento e interacción, haciendo que el uso de este software en el aula contribuya como un potencial apoyo en la enseñanza, especialmente en matemáticas (Diaz-Urdaneta et al., 2019).

Para el desarrollo de este trabajo se utilizó como metodología la Ingeniería Didáctica, considerando especialmente las especificidades de la realización de secuencias didácticas en el aula, es decir, los aspectos específicos de los conceptos matemáticos y las cuestiones didácticas (Artigue, 1996).

El público objetivo de este trabajo fue un grupo de veinticinco estudiantes, matriculados en el 8º y 9º año de la Enseñanza Fundamental, que corresponde al grupo de edad de 13-14 años. Los alumnos forman parte de la red de educación municipal de la ciudad de Pires Ferreira, Ceará, Brasil, y participan de un proyecto de complementación pedagógica, dirigido a la enseñanza de las matemáticas, que se desarrolla en horario extracurricular, los sábados, por la mañana.

Las siguientes secciones presentan la Teoría de las Situaciones Didácticas, fundamento teórico de este trabajo, y la Ingeniería Didáctica (DE) como metodología de investigación. Los demás apartados están organizados a partir de los presupuestos de la DE, con sus cuatro fases, que son los análisis preliminares (estudio teórico sobre la enseñanza del álgebra y funciones), análisis a priori (concepción de la situación didáctica), experimentación (desarrollo de la didáctica, recolección y presentación de datos) y el análisis a posteriori y validación (análisis de la acción de los sujetos con énfasis en los procesos epistemológicos, didácticos y cognitivos).

MARCO TEÓRICO

En esta sección traemos una breve presentación de la teoría de Brousseau (1986): la Teoría de las Situaciones Didácticas, que guió la práctica de este trabajo.

La noción de situación didáctica fue propuesta por Brousseau (1986), en la que el autor explica que el desarrollo del aprendizaje en matemáticas ocurre a través del establecimiento de una relación entre el estudiante, el profesor, el medio y el conocimiento.

Según Brousseau (1986), una situación didáctica es un conjunto de situaciones, sean éstas explícitas o implícitas, que se dan entre el alumno, o un grupo de ellos, un espacio para el desarrollo de la acción (*milieu*) y un espacio educativo. sistema, teniendo como objetivo que el alumno construya conocimientos/aprendizajes, a través de un ambiente propicio debidamente estructurado por el docente.

Por lo tanto, al analizar una situación didáctica, es posible conocer procesos que se originan en la construcción de contenidos e identificar obstáculos en el aprendizaje. De hecho, la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) además de contribuir al aprendizaje de los estudiantes, también incentiva el trabajo del docente, al permitirle reconstruir su práctica y ampliar su repertorio matemático específico (Sousa et al., 2020; Freitas, 2008).

El desarrollo de una situación didáctica se estructura en fases o dialécticas que son situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización. Estas situaciones se pueden describir brevemente, con base en Brousseau (1986), de la siguiente manera:

- *situación de acción*: parte de un conocimiento operativo, donde el alumno se compromete a resolver un problema y selecciona procedimientos matemáticos ya interiorizados por él para intentar resolverlo;
- *situación de formulación*: hay acción sobre el medio ambiente, mediante el uso de modelos matemáticos explícitos y la interacción con otros estudiantes;
- *situación de validación*: esta situación requiere que los estudiantes utilicen mecanismos para probar sus conjeturas, con discusiones entre pares para una socialización de las diferentes estrategias para resolver el problema;
- *situación de institucionalización*: momento en que se da el paso de lo subjetivo a lo referencial, la universalización del saber, a partir de lo expuesto por los estudiantes en las etapas anteriores. En esta fase, el docente muestra sus verdaderas intenciones didácticas.

Brousseau (1986) explica que en una situación didáctica pueden estar involucradas muchas otras cuestiones, una de las cuales es la situación didáctica, compuesta por las tres primeras dialécticas descritas anteriormente. Almouloud (2007) define que una situación didáctica es un momento donde el alumno trabaja de forma independiente, sin intervención directa del docente, aunque el docente tenga un propósito e intención pedagógica acorde a lo que quiere enseñar.

Como se vio en la sección anterior, la construcción del aprendizaje en álgebra depende de la interiorización y reconstrucción de significados por parte del estudiante. Así, se justifica el uso de TSD para la construcción de la situación didáctica descrita en el siguiente apartado, en el que traemos una propuesta sobre las funciones del 1° grado, ya que esta teoría de la enseñanza le permite al estudiante construir caminos, reflexionar y evaluar sus opciones.

En el contexto de este trabajo, el TSD se utilizó para la planificación y construcción del experimento, así como para orientar el desarrollo de la situación didáctica (que se describirá en el análisis a priori). La situación didáctica se estructuró con la intención de favorecer el aprendizaje del concepto de función de primer grado. Se justifica el uso de la Teoría de las Situaciones Didácticas, considerando la necesidad de aplicar modelos de enseñanza que permitan a los estudiantes construir conocimientos matemáticos, a través de la interacción con el sistema de enseñanza y el medio, orientando su aprendizaje.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada para la realización de este trabajo fue la Ingeniería Didáctica (DE). La Ingeniería Didáctica (DE) es una metodología de investigación derivada de los estudios de Didáctica de las Matemáticas en Francia. DE propone una investigación del aprendizaje en matemáticas centrada en el sistema didáctico, es decir, en el alumno, el docente, el saber en juego y el entorno. Es precisamente en este aspecto que la Ingeniería Didáctica es una herramienta metodológica relevante para los logros didácticos, pues busca favorecer las condiciones que conducen al aprendizaje (Alves y Dias, 2017).

La DE se organiza en cuatro etapas de desarrollo, que son: análisis preliminar; análisis a priori; experimentación; análisis a posteriori y validación. Vale la pena señalar que, si bien cada una de estas etapas tiene sus especificidades, no ocurren por separado, sino de manera interconectada, y aspectos de una etapa pueden resumirse en otra. Brevemente, es posible presentar las características de cada una de las etapas de la Ingeniería Didáctica, a continuación, con base en Artigue (1996):

- *análisis preliminar*: se plantean estudios teóricos que permiten identificar obstáculos epistemológicos, cognitivos y didácticos relacionados con el objeto matemático de interés;
- *concepción y análisis a priori*: hay una delimitación de variables didácticas (problemas, recursos, etc.), estructuración de la secuencia didáctica, así como la predicción de situaciones, conductas y obstáculos que pueden presentarse en la etapa posterior;
- *experimentación*: momento en que tiene lugar la acción didáctica y se recogen los datos para su posterior observación;
- *análisis a posteriori y validación*: el estudio de los datos recogidos se realiza para validar (o refutar) las hipótesis didácticas previamente establecidas, comparando los resultados obtenidos con lo previsto en el análisis a priori.

En el contexto de este trabajo, los pasos propuestos por la Ingeniería Didáctica quedaron constituidos de la siguiente manera: en los análisis preliminares, se realizó un estudio sobre la enseñanza del álgebra en Brasil, con especial foco en la enseñanza de las funciones polinómicas de primer grado; en el análisis a priori se desarrolló la situación didáctica y predicciones sobre el posible comportamiento de los estudiantes frente a esta en el contexto remoto; en la experimentación (resultados) se desarrolló la situación didáctica planificada y se recolectaron los datos; y en el posterior análisis y validación (discusión) se analizó el experimento desarrollado, destacando las esferas epistemológica, didáctica y cognitiva.

ANÁLISIS PRELIMINAR

Esta es la primera fase de la Ingeniería, donde traemos al análisis preliminar. Según Almouloud y Silva (2012), una investigación que sigue como metodología la Ingeniería Didáctica, trae en su análisis preliminar los aspectos teóricos generales, así como una investigación del objeto matemático de interés, especialmente sobre tres enfoques: el epistemológico, que trata de las concepciones sobre la enseñanza y sus resultados; el cognitivo, que se relaciona con los obstáculos que enfrentan los estudiantes; y la didáctica, que apunta perspectivas que fundamentan la planificación de logros didácticos.

Así, en este trabajo, el análisis preliminar se construyó a partir de un levantamiento teórico sobre la enseñanza del álgebra y la enseñanza de funciones de primer grado, considerando la identificación de obstáculos de aprendizaje y cómo los documentos de orientación educativa en Brasil tratan el tema. También se discute la Teoría de las Situaciones Didácticas, teoría didáctica escogida para la estructuración de la situación didáctica y el desarrollo de la etapa de experimentación.

Enseñanza de álgebra y funciones de primer grado

En la Base Curricular Común Nacional (BNCC), la unidad temática Álgebra tiene como objetivo desarrollar el pensamiento algebraico, fundamental para el uso de modelos matemáticos para la resolución de problemas, comprensión, representación, validación y adecuación de los resultados obtenidos a los supuestos de la situación problema (Brasil, 2018).

Por lo tanto, considerando la esfera cognitiva, para que el estudiante desarrolle estas habilidades es necesario que establezca articulaciones mentales capaces de identificar la relación de dependencia entre diferentes cantidades, además de interpretar, crear y transmitir información a través de representaciones simbólicas que puedan ser utilizadas. resolver problemas un problema matemático, entendiendo el significado de los resultados obtenidos (Ribeiro y Cury, 2015; House, 1995).

Para ello, el alumno necesita comprender elementos epistemológicos de la enseñanza del álgebra como el lenguaje y, en particular, el lenguaje algebraico. Según Souza et al. (2022) la interpretación del lenguaje simbólico es uno de los factores que contribuyen a que los estudiantes tengan alguna dificultad en el aprendizaje del Álgebra, ya que dicho lenguaje requiere un cierto grado de abstracción por parte del estudiante que quizás no haya desarrollado en grados anteriores. Gil (2008), por ejemplo, explica que el lenguaje algebraico está compuesto de formalismos y abstracciones que a veces, a los ojos de los estudiantes, parecen algo incomprensible.

En este sentido, Moysés (2006) y Kaput (2008) reflejan que el lenguaje matemático ya está estructurado cuando el alumno se enfrenta a representaciones simbólicas en la escuela. Es en este contexto que la figura del docente es fundamental. Corresponde al docente mediar, a través de acciones e intervenciones didácticas, el proceso de interiorización de estos símbolos por parte de los alumnos.

Al considerar la relación entre el docente y el alumno, es posible comprender que la construcción del conocimiento no ocurre a través de la reproducción o la copia. Por el contrario, es necesaria una transformación, una incorporación de estructuras y funciones, para que se produzca una interiorización de lo aprendido (Moysés, 2006).

Delimitándonos a la enseñanza de ecuaciones y funciones de 1° grado, es necesario recurrir a la BNCC para analizar cómo este documento guía presenta, organiza y distribuye el desarrollo de este contenido en los últimos años de la enseñanza fundamental.

La BNCC presenta la introducción de ecuaciones polinómicas de 1° grado en el 7° año de la enseñanza fundamental, buscando que el alumno sea capaz, además de resolver, de elaborar problemas que puedan ser representados por este tipo de ecuaciones. La enseñanza de funciones está prevista para el final de este ciclo, en el 9º año. Se advierte que existe una progresión de la enseñanza propuesta por el documento, con la profundización de las competencias esperadas para los siguientes años de escolaridad, en la que se enfatiza el uso de representaciones gráficas y el establecimiento de relaciones entre variables involucradas en una situación problema (Brasil, 2018).

Año/grado	Unidad temática	Objetos del conocimiento	Habilidad
7º año	Álgebra	Ecuaciones polinomiales de 1er grado.	(EF07MA18) Resolver y elaborar problemas que puedan ser representados por ecuaciones polinómicas de primer grado, reducibles a la forma ax + b = c, haciendo uso de las propiedades de igualdad.
8º año	Álgebra	Asociación de una ecuación lineal de 1er grado a una recta en el plano cartesiano.	(EF08MA07) Asociar una ecuación lineal de primer grado con dos incógnitas a una recta en el plano cartesiano.
9º año	Álgebra	Funciones: representaciones numéricas, algebraicas y gráficas.	(EF09MA06) Comprender las funciones como relaciones de dependencia unívocas entre dos variables y sus representaciones numéricas, algebraicas y gráficas y utilizar este concepto para analizar situaciones que impliquen relaciones funcionales entre dos variables.

Tabla 1. Ecuaciones y funciones polinómicas de 1er grado distribuidas por año escolar. Fuente: Adaptado de Brasil (2018).

Considerando la necesidad de desarrollar una enseñanza que favorezca la construcción del conocimiento matemático y la participación de los estudiantes, en la siguiente sección discutimos la Teoría de las Situaciones Didácticas, que fundamenta el desarrollo de este trabajo.

ANÁLISIS A PRIORI

Esta es la segunda fase de ingeniería, donde traemos el análisis a priori y la construcción del experimento. Según Artigue (1988), en la etapa de análisis a priori, el investigador toma la decisión de actuar sobre las variables u obstáculos identificados en el análisis preliminar. El propósito de este paso es determinar cómo las elecciones realizadas pueden predecir el comportamiento del estudiante.

De hecho, se optó por el diseño de una situación didáctica basada en TSD y con el aporte del software GeoGebra, como herramienta auxiliar en la fase de institucionalización. También realizamos una predicción del comportamiento de los estudiantes ante la situación didáctica propuesta.

Situación Didáctica

La organización de la situación didáctica propuesta en este trabajo se basa en una situación-problema adaptada del Portal de Matemáticas, elaborado por el Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) y puesto a disposición en el módulo Función Afín. La concepción de la situación se basó en la identificación de obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes, especialmente en lo que respecta a la comprensión del concepto y las representaciones (algebraicas y gráficas) de una función en el nivel educativo propuesto.

IMPA (Ejercício de Función afin – adaptado) El costo total, por mes, de un servicio de fotocopias, con copias A4, se compone de un costo fijo más un costo variable. El coste variable depende, de forma directamente proporcional, del número de páginas reproducidas. En un mes en que este servicio hizo 50000 ejemplares, su costo total fue de R$ 21000,00; mientras que en un mes en que se hicieron 20000 ejemplares, su costo total fue de R$ 19200,00. ¿Cuál es el costo de producir cada copia? ¿Cuál es el monto del costo fijo? ¿Cuál es el costo del servicio si se producen 90000 copias? ¿Qué relación algebraica puedes establecer entre estos valores?

Tabla 2. Situación didáctica propuesta. Fuente: Adaptado del Portal de Matemáticas (2021).

Ante esta situación didáctica, esperamos que los estudiantes en *situación de acción* identifiquen inicialmente la información relevante para la resolución. Es decir, se espera que enumeren el costo mensual de la empresa y el número de copias producidas, en los dos meses presentados en su descripción. Es posible que los estudiantes construyan una relación a partir de una tabla, como se ejemplifica en el Cuadro 3:

Costo del mes (R$)	**Cantidad de copias producidas**
21000	50000
19200	20000

Tabla 3. Posible modelo de organización de datos.

Luego, en la *situación de formulación*, pretendemos que los estudiantes comparen los datos de los dos meses, calculando la diferencia entre ellos y dándose cuenta de que, a partir de ahí, sería posible descubrir el costo de producción de cada una de las copias dividiendo por el diferencia entre los totales de coste y la diferencia entre los totales de copia. Un ejemplo de un algoritmo desarrollado por los estudiantes en esta etapa podría ser:

Diferencia entre costos = R$ 30000,00

Diferencia entre el número de copias = R$ 1800,00

$1{,}8/30000$ = *R$ 0,06 (costo de cada copia)* (*)

Con este resultado, esperamos que los estudiantes comprendan que, al realizar el producto entre este valor y el número de ejemplares de uno de los meses presentados, el resultado obtenido consiste en el valor total del costo de los ejemplares y, en consecuencia, mediante una resta, el valor del costo fijo. Aquí ejemplificamos un posible modelo a ser presentado por los estudiantes:

$$0{,}06\ x\ 50000 = 3\ (costo\ de\ producción\ de\ 50000\ copias) \qquad (**)$$

$$21000 - 3000 = 18000\ (valor\ del\ costo\ fijo) \qquad (***)$$

A partir de esta etapa, para la situación de validación, se pretende que los estudiantes resuelvan el siguiente ítem solicitado en el desafío: identificar el valor de costo de la empresa, si se produjeran 90.000 copias. Así, una posibilidad de representación desarrollada por los estudiantes puede ser:

$$90000\ x\ 0{,}06 + 18000 = 23400 \qquad (****)$$

Esperamos que la mayoría de los estudiantes no pudiera o tuviera dificultades para resolver el último ítem propuesto, es decir, la construcción de una expresión algebraica que pudiera representar la situación. Para la *situación de institucionalización*, nuestra intención fue utilizar construcciones posiblemente desarrolladas por los estudiantes, como se describe anteriormente, para formalizar el concepto de función de 1er grado, presentando sus elementos esenciales. Para esta conceptualización, presentamos como referencia el libro Fundamentos de Matemáticas Elementales de Iezzi (2013).

Para apoyar esta etapa del TSD, se pretendió utilizar el software GeoGebra como forma de realizar construcciones de los modelos algebraicos desarrollados, con la intención de brindar a los estudiantes una visión concreta de lo discutido teóricamente.

Al final del desarrollo de la situación didáctica, se esperaba que los estudiantes comprendieran las nociones de coeficiente de variación (angular) y coeficiente fijo (lineal), así como la relación de dependencia entre variables (características elementales de una función de primer grado).

RESULTADOS

Esta es la tercera fase de la Ingeniería: la experimentación. La aplicación de la situación didáctica planificada en el análisis a priori se realizó en una reunión remota de tres horas/clase y se realizó a través de la plataforma de videoconferencia Google Meet. Participaron 25 estudiantes, de ambos sexos, con edades comprendidas entre 13 y 15 años. En la etapa de institucionalización se utilizó como recurso metodológico el software Geogebra. Para el análisis y descripción del desarrollo de la situación didáctica se utilizó la grabación de la convocatoria y los registros fotográficos tomados por los estudiantes y compartidos con los autores.

Los estudiantes son parte de un proyecto de complementación pedagógica, llamado Proyecto Cactus, que ofrece clases de matemáticas. Este proyecto se desarrolla en horario extracurricular, los sábados por la mañana. Los estudiantes participantes están matriculados regularmente en clases de 8º y 9º grado en la red de educación municipal en Pires Ferreira, Ceará, Brasil. El proyecto se lleva a cabo en línea, desde 2020, y tiene como objetivo brindar a los estudiantes de los últimos años de Educación Primaria un mayor contacto con las matemáticas, como una forma de complementar la enseñanza regular. Para participar en este proyecto, los estudiantes son invitados por sus respectivas escuelas.

En la descripción de esta etapa, utilizamos los términos A1 a A25 para referirnos a los estudiantes por razones éticas, con el fin de preservar la identidad de los estudiantes. La utilización de índices (1 a 25) ocurrió según el orden de participación de los sujetos. Antes de comenzar a aplicar la situación didáctica propiamente dicha, se realizaron algunos trámites, tales como (a) brindar el link de acceso a la sala virtual de Google Meet para los estudiantes, a través del grupo de estudiantes en la aplicación de mensajería WhatsApp; (b) los estudiantes fueron recibidos virtualmente en la sala de Google Meet y se estableció el contrato didáctico.

Según Brousseau (2011) el contrato didáctico es un conjunto de posturas del docente que son esperadas por los alumnos, así como una serie de comportamientos de los alumnos, por los cuales el docente espera. Es a través del contrato didáctico que se establece la relación didáctica. En el caso de este experimento, el contrato didáctico tenía los siguientes puntos:

- reforzamos la importancia de la participación de los alumnos y solicitamos su esfuerzo para resolver la situación propuesta;
- pedimos a los alumnos que registraran, a través de fotografías, el paso a paso de la resolución de la situación llevada a cabo por cada uno de ellos;
- Pedimos a los alunos para compartir sus registros fotográficos realizados vía WhatsApp.

Inicialmente, la situación didáctica se presentó a los estudiantes a través de la herramienta de “presentación en pantalla” de Google Meet (Figura 1). El docente presentó el problema a los estudiantes y les pidió que trataran de resolverlo individualmente, utilizando su comprensión y la información disponible para ellos:

Figura 1. Presentación de la situación didáctica a los estudiantes. Fuente: Datos de la investigación (2021).

A partir de ese momento se produjo la situación de acción, en la que los estudiantes se comprometieron a resolver el problema propuesto, poniendo a prueba instrumentalmente los conocimientos ya adquiridos para obtener una respuesta, aunque estos no fueran plenamente válidos para la solución final. Como lo expresa Freitas (2008), una situación de acción ocurre cuando el estudiante está decidido a encontrar una solución al problema, aunque no haya una formalización de ideas.

El estudiante A1 presenta inicialmente su razonamiento (Figura 2), sin embargo, agrega que no sabe cómo proceder con la resolución, ni entiende claramente la representatividad de los resultados de sus cálculos. En este sentido, House (1995) en su obra “Álgebra: ideas y preguntas”, dice que un gran obstáculo que enfrentan los estudiantes está relacionado con la poca habilidad para utilizar los conocimientos ya adquiridos en situaciones nuevas o inesperadas.

En su descripción al grupo, el alumno A1 explica que calculó la relación entre los costos de cada mes presentado, en relación con el total de copias producidas. Según él, esperaba obtener un valor equivalente por las dos razones, que sería el costo de producir una copia, pero no tuvo éxito en este intento. Mira en la figura 2:

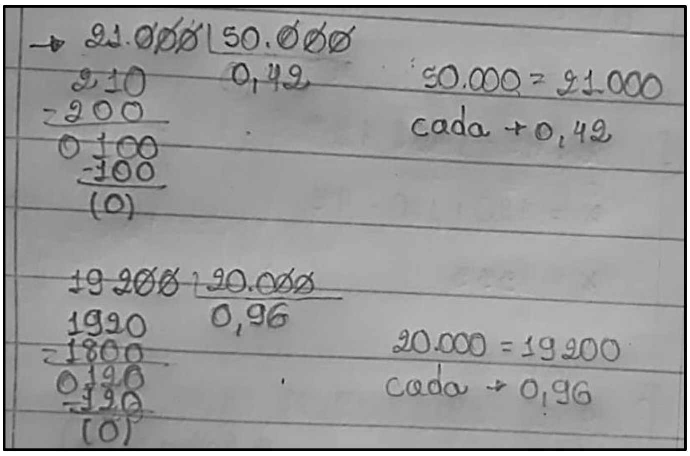


Figura 2. Representación del alumno A1.

Esta etapa característica alude a la situación de formulación, donde el estudiante ya expresa modelos matemáticos explícitos, aunque no formalizados y/o completos. En esta etapa, existe una interacción entre los estudiantes, que puede darse de forma oral o escrita. Así, el objetivo de esta etapa es intercambiar informaciones. Una situación de formulación relaciona al menos dos o un grupo de estudiantes y conocimientos. El conocimiento formulado por un estudiante puede beneficiar a otro estudiante que lo utiliza para complementar sus ideas y tomar nuevas decisiones (Santos y Alves, 2017; Sousa et al., 2021).

El estudiante A2, impulsado por la exposición del estudiante A1, presenta sus conjeturas para la solución, explicando que, al igual que el estudiante A1, también calculó la relación entre los valores presentados en la pregunta, en este caso entre el número de copias y el valor total del costo de la empresa. Al darse cuenta de que los valores no eran coincidentes, así como la percepción de A1, decidió calcular un promedio entre estos valores (Figura 3). Pero concluyó su exposición afirmando que cree que el valor resultante fue demasiado alto para representar el costo de producir una copia:

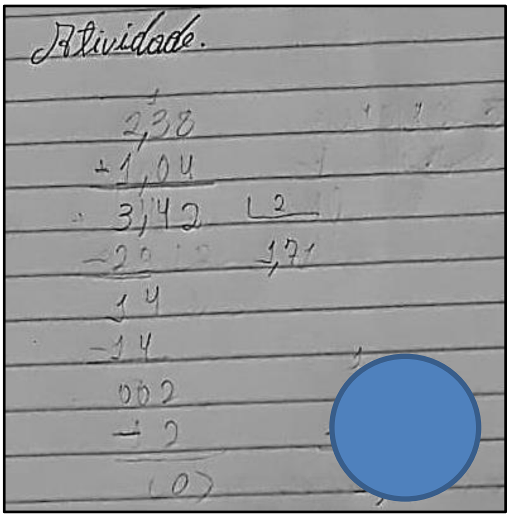


Figura 3. Representación del alumno A2.

Para colaborar con las discusiones en la situación de formulación, el docente preguntó a los estudiantes cómo estaban considerando el valor del costo fijo dentro de sus cálculos. Así, el estudiante A3 comentó que creía que el valor de costo fijo estaba incluido dentro de los valores de costo de los dos meses presentados en la descripción del problema. A3 continuó revelando que realizó restas para identificar la diferencia entre los costos de las dos situaciones presentadas y una comparación entre las cantidades de copias producidas.

Seguidamente, el estudiante A4 comentó que realizó el mismo procedimiento y que, teniendo estos resultados, realizó una división, considerando como dividendo la diferencia entre el número de copias y como divisor la diferencia entre los costos totales. El estudiante también comentó que cree que el resultado no es válido, ya que obtuvo un valor muy expresivo, que según él, no puede representar el valor de costo de una sola copia.

De nuevo, el profesor pregunta, estimulando la reflexión de los estudiantes, sobre la relación entre estas diferencias encontradas. El estudiante A3 toma nuevamente su posición, expresando que la división que se debe realizar es utilizando como dividendo el valor obtenido como diferencia entre los valores de costo, y como divisor la diferencia entre el número de copias, informando que es el costo valor que debe distribuirse en relación con el número de copias, como muestra la Figura 4:

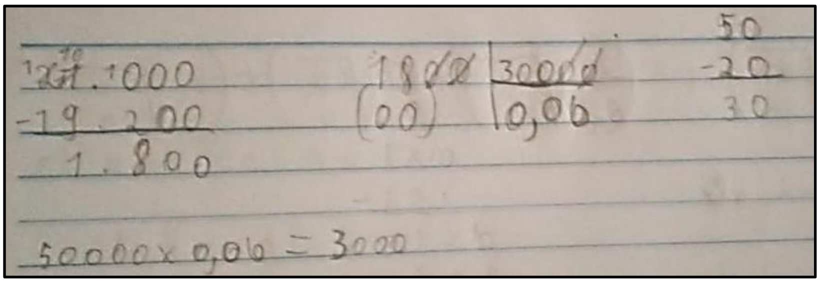


Figura 4. Representación del estudiante A3.

A partir de ahí comienza la situación de validación, donde los estudiantes ya comienzan a probar o refutar las proposiciones, enunciados o modelos matemáticos construidos en las fases anteriores, dialogando entre parejas. Según Almouloud (2007), en esta etapa el alumno debe mostrar el modelo que ha creado y justificar su validez, pudiendo los destinatarios presentar consultas e incluso rebatir sus resoluciones.

En ese sentido, el estudiante A5, a partir de las discusiones de sus compañeros, y del resultado expresado por A3, presenta un modelo matemático (Figura 5) que permitió identificar el valor del costo fijo. El estudiante demuestra que el valor del costo total de uno de los meses descritos en el problema es igual al valor del costo fijo más el producto entre el número de copias, también presentado en el problema, con el valor del costo de cada copia, presentado por A3:

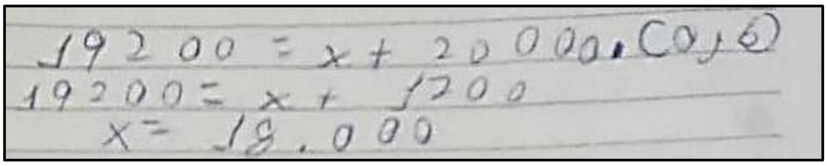
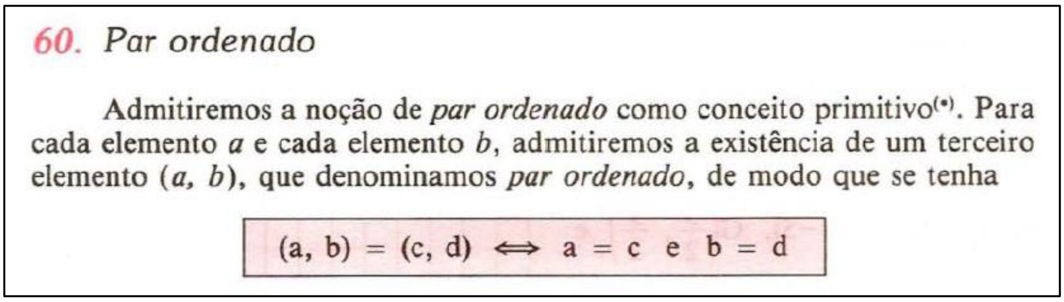


Figura 5. Modelo matemático presentado por el estudiante A5.

Los estudiantes, a pesar de las nociones construidas, no fueron capaces de establecer realmente un modelo matemático que representara una relación entre las variables (función polinomial de 1er grado). A partir de este punto, el profesor inició la situación de institucionalización, en la que desarrolló una formalización y universalización del objeto de estudio, extrapolando las limitaciones y especificaciones del problema estudiado. En esta situación, el conocimiento tiene la función de establecer una referencia global, que va más allá de un contexto personal y localizado (Freitas, 2008).

Para la situación de institucionalización se utilizó el software GeoGebra con el fin de auxiliar en la construcción de una representación gráfica de la función de 1er grado descrita en el problema. Además, se buscó favorecer la percepción de la relación que se establece entre las variables y la construcción de un modelo matemático que represente dicha relación.

Antes de formalizar el concepto de función de 1er grado, era necesario volver a la definición de par ordenado. En este caso, el docente utilizó la definición propuesta por Iezzi (2013, p. 65), como se muestra en la Figura 6:


60. *Par ordenado*

Admitiremos a noção de *par ordenado* como conceito primitivo(•). Para cada elemento a e cada elemento b, admitiremos a existência de um terceiro elemento (a, b), que denominamos *par ordenado*, de modo que se tenha

$$\boxed{(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d}$$

Figura 6. Definición de par ordenado. Fuente: Iezzi (2013, p. 65).

Luego, hubo una reflexión entre los estudiantes, mediada por el profesor, sobre la relación de dependencia entre las variables, para luego construir los dos pares ordenados a partir de los datos presentados e insertarlos en el campo de entrada del GeoGebra.

A partir de las notas de los estudiantes sobre la alineación de los puntos marcados en la ventana de visualización, se utilizó la herramienta “recto” en GeoGebra para conectar estos puntos, proyectando en la ventana de álgebra la función polinomial de 1er grado que representa la situación descrita en el problema. Esta función permite visualizar nuevos puntos pertenecientes a la línea, es decir, pares ordenados que cumplen con la relación entre la producción de copias y el costo total de la empresa, como se muestra en la Figura 7:

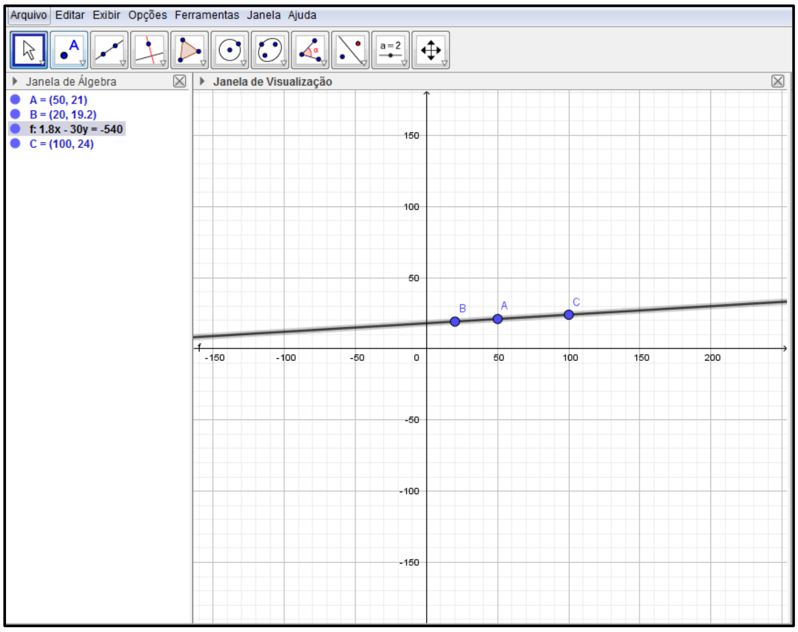
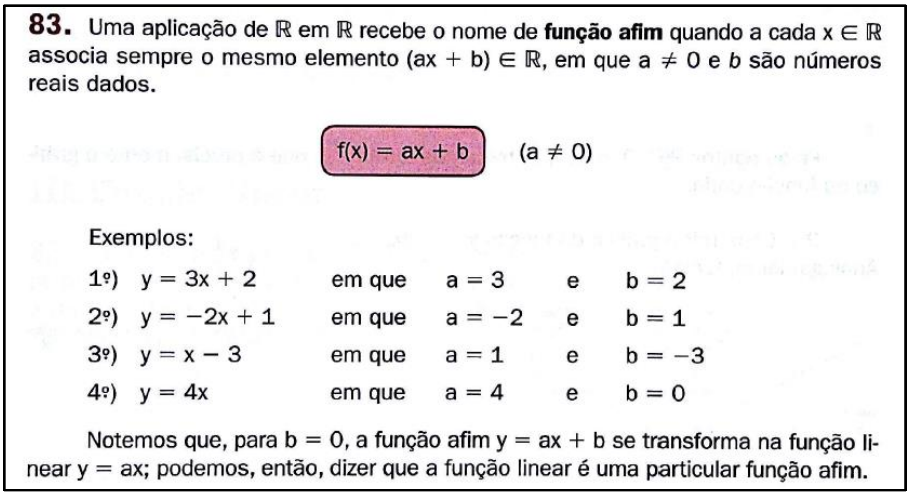


Figura 7. Representación geométrica de puntos.

En esta concepción, el docente instituye nuevos puntos pertenecientes a la función (línea), que se adecuan a las condiciones del problema. Y así, fue necesario presentar la definición de función afín (función polinomial de 1er grado) propuesta en la misma obra didáctica, destacando los términos y elementos de este tipo de representación, como se muestra en la Figura 8:



83. Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de **função afim** quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$ e b são números reais dados.

$$\boxed{f(x) = ax + b} \quad (a \neq 0)$$

Exemplos:

1º)	$y = 3x + 2$	em que	$a = 3$	e	$b = 2$
2º)	$y = -2x + 1$	em que	$a = -2$	e	$b = 1$
3º)	$y = x - 3$	em que	$a = 1$	e	$b = -3$
4º)	$y = 4x$	em que	$a = 4$	e	$b = 0$

Notemos que, para $b = 0$, a função afim $y = ax + b$ se transforma na função linear $y = ax$; podemos, então, dizer que a função linear é uma particular função afim.

Figura 8. Definición de una función de primer grado (o función afín). Fuente: Iezzi (2013, p.100).

En este punto de la situación didáctica, también fue valiosa la explicación del docente sobre el concepto de dominio de una función, pues en el caso del problema presentado, el dominio es compuesto por el conjunto de los números enteros no negativos, es decir, no se admiten números negativos ya que representa precisamente la cantidad de copias producidas. Un registro del concepto utilizado se muestra en la Figura 9:

76. Domínio

Chamamos de *domínio* o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções:

domínio = conjunto de partida

isto é,

$$D = A.$$

Figura 9. Concepto de dominio de una función. Fuente: Iezzi (2013, p. 88).

Con esta información se tomó como base el modelo propuesto por el estudiante A5 indicado en la Figura 5, construido con el objetivo de calcular el valor del costo fijo, para subsidiar la construcción de dos ecuaciones, utilizando los datos ya presentados en el problema y teniendo como incógnitas los coeficientes de la función polinomial de 1er grado (a y b). Se estableció una relación similar a la desarrollada por el estudiante A5, es decir, el producto entre el número de copias (el término x, variable independiente) y su coeficiente a, más el término independiente b sería igual al costo total (el término y, variable dependiente).

Con las ecuaciones construidas se hizo una reflexión sobre la construcción de un sistema y su resolución, y así se logró desarrollar un modelo algebraico (función de 1er grado) que representó el costo de producción de copias por parte de la empresa. Es importante resaltar que los estudiantes ya tenían conocimientos previos sobre la resolución de un sistema de ecuaciones de 1er grado.

A partir de ahí, el profesor retomó el uso del software GeoGebra, comprobando junto a los alumnos que la representación gráfica de las dos ecuaciones establecidas era nuevamente de líneas rectas. Para ello, en el campo de entrada en GeoGebra, se digitaron las ecuaciones:

$$50x + y = 21000 \qquad (****)$$

$$20\,x + b = 19200 \qquad (*****)$$

Se discutió nuevamente con los estudiantes el significado atribuido a la relación de pertenencia de un punto a una línea y su ecuación. Por tanto, se advirtió que el punto que pertenecía a las dos rectas sería precisamente el par ordenado que satisfaría el sistema construido. Para verificar este punto, el docente utilizó la herramienta de intersección de dos objetos, como se muestra en la Figura 10:

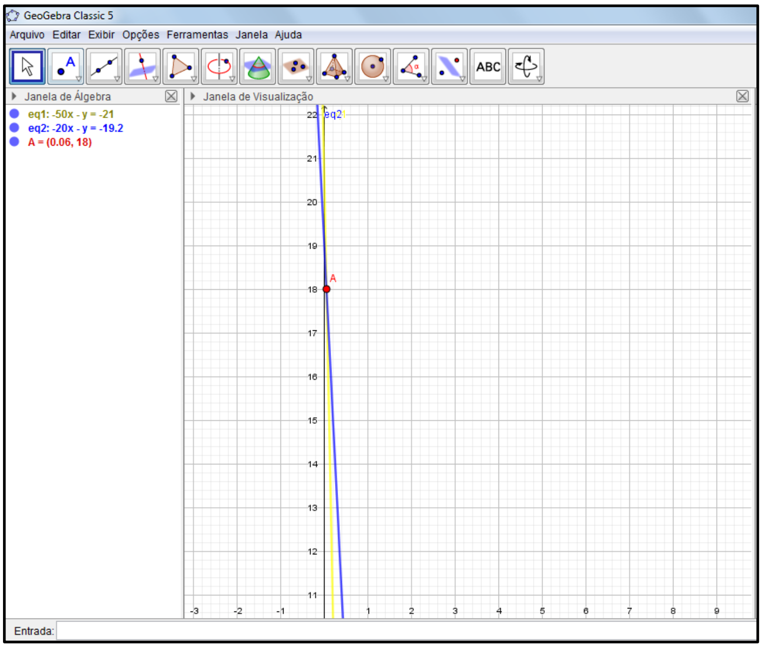


Figura 10. Solución geométrica del sistema.

El par ordenado obtenido de esta acción representa exactamente el valor del costo de producción de cada copia y el valor del costo fijo, ambos ya identificados por los estudiantes en las situaciones anteriores. Finalmente, se señaló que el valor de costo de cada copia debe representar el coeficiente *a* de la variable independiente *x*, es decir, el número de copias producidas por la empresa, así como el costo fijo, de hecho debe representar el término independiente *b*, ya que es el costo total de la empresa, variable independiente *y*, obtenido de esta relación.

Es necesario resaltar que en el caso de este experimento, solo el docente hizo uso del software GeoGebra, así como que ninguno de los estudiantes había tenido contacto con la herramienta antes de la aplicación de esta situación didáctica. Sin embargo, también destacamos que la herramienta fue bien recibida por los estudiantes, así como la posibilidad de su uso por parte de los estudiantes en momentos posteriores, ya sea para la continuidad de este estudio u otros temas, que pueden ser planificados previamente por el profesor.

DISCUSIÓN

Esta es la cuarta fase de la Ingeniería: el análisis a posteriori y validación del experimento. Para la construcción de este análisis a posteriori, elencamos tres categorías íntimamente relacionadas con los aspectos propuestos por la Ingeniería Didáctica, que también se relacionan con la Teoría de las Situaciones Didácticas, y que representan los fundamentos de acción que establecen la concepción de un análisis a priori. Para la construcción de estas categorías de análisis, nos basamos en el trabajo de Bardin (1977), sobre el análisis de contenido. En este caso, las categorías establecidas fueron las siguientes: procesos epistemológicos, procesos cognitivos y procesos didácticos.

En cuanto a los procesos epistemológicos, observamos que, al mirar el problema propuesto, en una situación de acción, se esperaba que los estudiantes comprendieran el lenguaje matemático frente a la presentación del problema, y que de esta manera, usarían un lenguaje algebraico para representarlo. A partir de la experimentación, observamos la dificultad de los sujetos para pasar del pensamiento a la transcripción matemática con su propio lenguaje. De manera esclarecedora, volvemos a lo propuesto por A5, el único tema de presentar una representación algebraica para resolver parte del problema. En este ejemplo, es posible destacar la contribución de las discusiones de los demás sujetos en esta construcción.

En cuanto a los procesos didácticos para la solución del problema, se previó el uso de conceptos, en teoría, ya presentados a los estudiantes en años anteriores de escolaridad. En el estudio de la BNCC, estos conceptos estaban prescritos en el currículo, en los años de escolaridad anteriores a los de los sujetos participantes de este estudio. Sin embargo, al analizar sus posiciones, encontramos una profunda dificultad en cuanto a habilidades que deberían haberse consolidado, como ejemplo del informe de A1 que desarrolló algoritmos para la resolución aunque desconocía su significado. Esto nos muestra que la comprensión del problema, de hecho, no se produjo. De igual forma, A4 no pudo establecer la relación entre las variables propuestas en el problema. Entendemos, por lo expuesto, que la mecanización de la enseñanza puede comprometer la construcción de habilidades de reflexión e interpretación, por parte de los estudiantes. La estructuración de clases a partir del TSD puede representar una alternativa en este sentido, al igual que las discusiones y reflexiones realizadas por los estudiantes en esta situación didáctica, en la que son sujetos activos en la construcción de su conocimiento.

Finalmente, con respecto a los procesos cognitivos, notamos la dificultad en la capacidad de abstracción y visualización de construcciones matemáticas. Sin embargo, estos ya eran obstáculos esperados/anticipados por el docente. En el caso del problema propuesto, los sujetos, además de obstáculos en la comprensión gráfica de las representaciones, presentaron dificultad para expresar el pensamiento abstracto, incluso cuando se enfrentaban sólo a la representación algebraica de términos inherentes a la resolución del problema. El uso del software GeoGebra, en este caso, ofreció un valioso apoyo a la enseñanza, posibilitando una representación visual para el estudiante.

En vista de lo anterior, se advierte que los procesos enumerados como categorías de observación están íntimamente relacionados y se complementan en las acciones realizadas por el docente y los estudiantes, ya que una decisión didáctica puede corroborar la construcción de un obstáculo cognitivo, así como como los procesos epistemológicos ellos también pueden hacerlo.

CONCLUSIONES

El propósito de este estudio fue describir una práctica docente sobre el contenido de las funciones de 1° grado, con el aporte de la Teoría de las Situaciones Didácticas en el contexto de la enseñanza remota. Se considera, por tanto, que se ha cumplido el objetivo, desde las etapas de construcción, la descripción y aplicación de una situación didáctica centrada en la construcción del concepto de función de primer grado, y en las representaciones de este tipo de función. Al resaltar los aportes del TSD a la enseñanza de las funciones de 1° grado, nos percatamos que esta teoría de la enseñanza permite a los estudiantes reflexionar constantemente sobre sus conocimientos previos, construyendo aprendizajes posteriores.

Así, al observar que los sujetos de la investigación presentaron dificultades en la comprensión del problema, así como obstáculos para una resolución totalizada, observamos que el TSD favoreció este aspecto, ya que promovió una enseñanza dinámica de las funciones de 1er grado, desmitificando el carácter de mecanización tan común en la enseñanza del álgebra. Además, nos dimos cuenta de que hubo una construcción del pensamiento algebraico, de acuerdo con lo propuesto en los documentos curriculares oficiales.

El uso del software GeoGebra en situación de institucionalización por parte del docente proporcionó a los alumnos una mejor visión gráfica de la representación de las funciones de primer grado, además de posibilitar una concreción de las definiciones, también consideradas como obstáculos para la enseñanza. También es posible destacar el dinamismo, los movimientos y las transformaciones que ofrece el software.

Sin embargo, se percibió que la realización de este estudio produjo como objeto, la comprensión de que TSD representa una alternativa significativa para la enseñanza del álgebra, especialmente para la enseñanza de las funciones de primer grado en el contexto de la enseñanza remota, en que lograr la participación efectiva de los estudiantes representó un obstáculo para la enseñanza.

Además, la presente investigación presenta vacíos, por lo que se espera realizar nuevos estudios considerando el uso de la Teoría de Situaciones Didácticas para la enseñanza de otros conceptos relacionados con el álgebra, así como investigaciones que combinen TSD con otras herramientas, el ejemplo de lo sucedido con el software GeoGebra.

REFERENCIAS

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática.* Curitiba: Editora UFPR.

Almouloud, S. A., y Silva, M. J. F. (2012). Engenharia didática: evolução e diversidades. *Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT*, 7(2), 22-52.

Alves, F. R. V., y Dias, M. A. (2017). Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED). *Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT*, 12(2), 192-209. http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2017v12n2p192.

Ando, R. D. S. J. (2012). *Formação continuada e ensino de álgebra: reflexões de professores da educação básica sobre itens do SARESP*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

Artigue, M. (1988). Didactical engineering. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308. Grenoble: La Pensée Éditions.

Artigue, M. (1996). Engenharia Didática. In Brun, J. *Didática das Matemáticas.* Lisboa: Instituto Piaget, cap. 4, pp. 193-217.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Universidade da França. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Ribeiro.

Bittar, M. (2017). Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. In Teles, R. A. M., Souza, R. E., Borba, R., y Monteiro, C. E. F. *Investigações em didática da matemática*. Recife: Editora UFPE.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação e da Cultura.

Brasil. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: Ministério da Educação e da Cultura - Secretaria de Educação Fundamental.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-116.

Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques em Mathématiques. *Éducation & Didactique,* 5(1), 101-104.

Carneiro, J. C. D. S. (2014). *Utilização do Geogebra na construção de instrumentos Elipsógrafo.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

Diaz-Urdaneta, S., Kalinke, M. A., y Motta, M. S. (2019). A Transposição Didática na elaboração de um objeto de aprendizagem no GeoGebra. *#Tear: Revista de Educação Ciência e Tecnologia,* 8(2), 1-12.

Freitas, J. L. M. (2008). Teoria das Situações. In Machado, S. D. A. (Ed.). *Educação Matemática: uma (nova) introdução.* São Paulo: EDUC, pp. 65-87.

Gil, K. H. (2008). *Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

House, P. A. (1995). *Álgebra: ideias e questões*. In Coxford, A. F., & Shulte, A. P. (Eds.). *As ideias da álgebra*. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.

Iezzi, G. (2013). *Fundamentos de matemática elementar*. Volume 1: Conjuntos e funções. São Paulo: Atual.

Portal da OBMEP. (2021). *Função Afim – Caderno de Exercícios*. Recuperado de: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=35&tipo=4.

Kaput, J. J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? In Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Kendal, M. (Eds.). *Algebra in the Early Grades.* New York: Lawrence Erlbaum.

Kuhn, M. C., y Lima, E. D. (2021). Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental: reflexões a partir dos PNC e da BNCC para construção do pensamento algébrico significativo. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática - REnCiMa,* 12(3), 1-23.

Lima, P. D. C. (2017). Uma meta-análise de artigos sobre o ensino e a aprendizagem de função na Educação Básica publicados, por pesquisadores brasileiros, nos últimos dez anos, na revista Educação Matemática Pesquisa. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Lopes, S. R. T. (2021). *O ensino da álgebra na Educação Básica sob um olhar de professores da rede estadual de Goiás.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

Moysés, L. (2006). *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática*. Campinas: Papirus.

Ribeiro, A. J., y Cury, H. N. (2015). *Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função.* Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Santos, A. P. R. A., y Alves, F. R.V. (2017). A Teoria das Situações Didáticas no ensino de Olimpíadas de Matemática: uma aplicação do teorema de Pitot. *Indagatio Didactica*, 9(4), 279-296.

Sousa, R. C., Silva, J. G. A., Alves, F. R. V., Fontenele, F. C. F., y Menezes, D. B. (2021). Teoria das Situações Didáticas e o ensino remoto em tempos de pandemia: uma proposta para o ensino do conceito de volume por meio da plataforma Google Meet e o software GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología – TE&ET*, 28, 174-183. 10.24215/18509959.28.e21.

Sousa, R. C., Alves, F. R. V., y Fontenele, F. C. F. (2020). Engenharia didática de formação (EDF): uma proposta de situação didática do ENEM com o uso do software GeoGebra para professores de matemática no Brasil. *Revista*

Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, 26, 90-99. 10.24215/18509959.26.e10.

Souza, R. G., Rodrigues, E. A., y Andrade, J. S. (2022). As dificuldades relacionadas à interpretação da linguagem algébrica no 8º ano. *Conjecturas*, 22(1), 113–131. 10.53660/CONJ-472-539

Francisca Narla Matias Mororó
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Brasil
narlamatiasm@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Brasil
fregis@ifce.edu.br

Francisca Cláudia Fernandes Fontenele
Universidade Estadual Vale do Acaraú, Brasil
claudiafontenele05@gmail.com

Renata Teófilo de Sousa
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Brasil
rtsnaty@gmail.com

Fernández, J. y Bernardis, S. (2023). Función: conversiones de registros en textos escolares. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *6*(1), 40-53

ISSN: 2603-9982

FUNCIÓN: CONVERSIONES DE REGISTROS EN TEXTOS ESCOLARES

Jimena Fernández, Escuela Secundaria de la Universidad Nacional del Litoral, Argentina

Silvia Bernardis, Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, Argentina

Resumen

El tema funciones es considerado uno de los más importantes en la matemática y en la relación de esta ciencia con otras disciplinas. La dificultad de los estudiantes para relacionar los diferentes registros semióticos que permiten representar y trabajar con funciones es una de las más mencionadas por los investigadores de Educación Matemática. En este trabajo se analiza la propuesta para el abordaje del tema de cuatro textos escolares actuales, se focaliza en describir las tareas que presentan en torno a los registros de representación que ponen en juego y a la demanda cognitiva que su resolución exige al estudiantado. Los textos analizados presentan tareas con una demanda cognitiva predominantemente del segundo nivel, es decir, requieren que los estudiantes establezcan relaciones entre distintos registros en una misma tarea para su resolución. Sin embargo, los autores priorizan las tareas de conversión entre el registro verbal al gráfico y viceversa. Las demás conversiones son muy poco demandadas en la resolución de las tareas.

Palabras clave: *función, registros de representación, conversiones, demanda cognitiva.*

Functions: conversions of registers in school textbooks

Abstract

Functions are considered one of the most important topics in mathematics as well as the relationship of this science with other disciplines. The student's difficulty to relate the different semiotic registers that allow representing and working with functions is one of the most mentioned by Mathematics Education researchers. This paper analyzes the proposal for addressing the theme of four current school textbooks, focusing on describing the tasks presented around the registers of representation that they put into play and the cognitive demand that their resolution requires from the student body. The analyzed texts present tasks

Recibido: 18/11/2022; Aceptado: 25/04/2023

with a predominantly second level cognitive demand, that is, they require students to establish relationships between different registers in the same task for its resolution. However, the authors prioritize conversion tasks between verbal to graphic register and vice versa. The other conversions are very little demanded in the resolution of the tasks.

***Keywords**: function, representation register, conversions, cognitive demand.*

INTRODUCCIÓN

Desde el punto de vista de los matemáticos, como afirma Spivak (1996), el concepto más importante de toda la matemática es, sin dudarlo, el de función. En casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. No sorprende, como menciona el autor, que el concepto sea de gran generalidad. Por otro lado, también es un tema que genera dificultades en su enseñanza y aprendizaje, por lo que su estudio es abordado por investigadores en el campo de la Educación Matemática. Godino y Font (2003), consideran que es una de las principales ideas de las matemáticas y que su estudio deberá centrarse en indagar relaciones en contextos significativos para el alumnado y usando diversos métodos de representación para analizar dichas relaciones. Por su parte Calvo et al. (2016), mencionan que el concepto de función, junto con el lenguaje algebraico, ausentes en la enseñanza de la matemática en los primeros niveles, caracterizan las diferencias, a nivel de contenidos, entre la enseñanza de las matemáticas en primaria y en secundaria. Además, expresan los autores, que la investigación en didáctica de la matemática ha mostrado que la adquisición de un concepto complejo, como el de función, difícilmente se logra partiendo de una definición y que es el trabajo a partir de situaciones y problemas que requieren el uso de distintas representaciones y el paso de unas a otras, aquello que permite al alumnado ir construyendo el concepto.

Como se mencionó previamente, el tema funciones es considerado uno de los más importantes en la matemática y en su relación con otras disciplinas, así como para especialistas en Educación Matemática como Ruiz-Higueras (1994), Artigue (1998), Hitt (2003, 2014), quienes acuerdan que es un tema muy complejo, tanto de abordar desde una secuencia didáctica, como así también desde el punto de vista de la comprensión. La dificultad del estudiantado para relacionar los diferentes registros semióticos que permiten representar y trabajar con funciones es una de las más mencionadas por investigadores tales como: Godino et al (2016), Prada Núñez y Hernández Suarez (2017), Soto et al. (2019) entre otros.

En este trabajo se propone un estudio de la propuesta para el abordaje del tema funciones de textos escolares de publicación reciente, específicamente se centra la atención en el apartado de iniciación al tratamiento de dicho objeto matemático. Se considera de gran utilidad realizar este tipo de estudios, dado que se coloca bajo la lupa un instrumento de gran importancia para la elaboración de propuestas de trabajo de docentes y alumnos. "El libro de texto, como objeto cultural, es un medio mediante el cual se construye el consenso educativo. Sirve por tanto para introducir una ideología y para legitimar contenidos y formas específicas del conocimiento escolar" (Cantoral et al., 2015, p.10).

Afirmaciones como la anterior hacen evidente la importancia que se le otorga a los textos en el proceso educativo. Resulta entonces interesante indagar acerca del abordaje que éstos proponen para trabajar con los objetos matemáticos, para inferir las implicaciones que tiene dicho abordaje en la enseñanza y el aprendizaje de los mismos, en particular del concepto de función. El propósito de este trabajo es explorar en los textos escolares seleccionados, el tratamiento de los registros de representaciones de funciones y las conversiones entre ellos que proponen los autores.

MARCO TEÓRICO

En cada uno de los textos escolares se focaliza la atención en describir la propuesta en torno a los registros de representación que ponen en juego los distintos autores por medio de las tareas que presentan. El marco teórico en el que se basa el análisis se nutre de la

Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) (Duval, 1999; 2006). Según el autor, para tener acceso al conocimiento matemático es necesario que los objetos sean representados de varias formas. Los objetos matemáticos tienen diferentes registros de representación, tales como: registro verbal, registro tabular, registro gráfico, registro algebraico, registro simbólico y registro figural. Las representaciones semióticas están constituidas por el uso de signos de un sistema de representación, por ejemplo, la representación gráfica utiliza los signos del sistema cartesiano.

En la teoría de registros de representación semiótica (RRS), a la actividad ligada a la producción de una representación se le llama semiosis, mientras que a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos se la denomina como noesis. Un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis. Es decir, la formación de una representación identificable, el tratamiento y la conversión. La primera actividad está relacionada con la expresión de una representación mental: "las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma" (Duval, 1999, p. 5). Las otras dos actividades están relacionadas con la transformación de las representaciones en otras representaciones. Las transformaciones posibles entre representaciones pueden ser de dos tipos: tratamiento y conversión. El tratamiento es una transformación interna, es decir la transformación de la representación en el mismo registro en el que está dada. La conversión es una transformación externa, o sea, es la representación en un registro distinto al registro en el que fue dada. El trabajo con estas tres actividades semióticas es lo que va a permitir lograr la noesis, según D´Amore (2017):

> El conjunto de estos tres elementos […] evidencian la profunda relación que existe entre noética y esta visión del constructivismo que se podría llamar analítico: ¿qué quiere decir "construcción del conocimiento en matemática" sino precisamente la unión de estas tres "acciones" sobre los conceptos, es decir la expresión misma de la capacidad de *representar* los conceptos, de *tratar* las representaciones obtenidas al interior de un registro establecido y de *convertir* las representaciones de un registro a otro? (p. 75)

Como ejemplos de tales RRS se tienen, la lengua natural (oral, escrita); representaciones numéricas (entera, fraccionaria, decimal); representaciones figurales o gráficas (lineales, planas o espaciales) y representaciones alfanuméricas (algebraicas).

Duval (2016) plantea que realizar conversiones (también llamadas traducciones o codificaciones) es una tarea compleja pues es necesario que entre dos registros que no tienen nada en común se reconozca el mismo objeto. Dicho autor afirma que:

> Cambiar el registro de representación es el umbral de la comprensión matemática para los aprendices en cada etapa del currículo. Ello depende de la coordinación de varios registros de representación, es sólo en las matemáticas donde se requiere fuertemente la coordinación de registros. ¿Realmente se tiene en cuenta este requerimiento básico? Muy a menudo, las investigaciones se enfocan en cuáles son las representaciones correctas o cuál sería el registro más accesible para lograr que los estudiantes comprendan verdaderamente y usen algún conocimiento matemático particular. […]. El verdadero reto de la educación matemática consiste en desarrollar primero la capacidad de cambiar el registro de representación. (pp. 91-92)

Uno de los elementos más importantes para el aprendizaje en matemática son los problemas, las actividades y los ejercicios que se proponen al alumnado. En el análisis de la propuesta de los autores en los textos escolares se analizan las tareas que presentan. A los fines de unificar los términos, se explicita que se denomina contexto al lugar que proporciona el entorno desde el que se plantean las preguntas o consignas y tarea a las propuestas de acción (preguntas y consignas) que los autores plantean al estudiantado en ese contexto.

Según Duval (2017), un concepto determinado se adquiere, cuando se es capaz de transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto. Considera el autor que la disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, se consideran imprescindibles para la comprensión, construcción y comunicación de los contenidos matemáticos. En base a estas conclusiones de Duval, se interpreta que las tareas propuestas tienen distinta demanda respecto de las representaciones que están involucradas en su resolución.

Teniendo en cuenta esta consideración, se realiza la categorización de las tareas, se utiliza para ello la idea de demanda cognitiva. Según Penalva y Llenares (2011), lo que la tarea exige al estudiantado determina la demanda cognitiva de la tarea y en parte su potencial de aprendizaje. Explican los autores que la demanda cognitiva de una tarea es la clase y nivel de pensamiento que su resolución exige. Afirman que la clase y nivel de pensamiento en el que se implica el alumnado determinará lo que pueden llegar a aprender. En definitiva, mencionan que las tareas matemáticas dan al alumnado información sobre el significado de determinados conceptos y dirigen su atención hacia un dominio matemático particular.

Para analizar las demandas cognitivas de las tareas se toma como referencia el Programme for International Student Assessment (PISA), en el que se consideran tres niveles de exigencia en las tareas que plantean (OCDE, 2003) que se describen a continuación.

Primer nivel: reproducción y procedimientos rutinarios. Ejercicios relativamente familiares que requieren la reiteración de los conocimientos practicados (recuerdos de propiedades, uso de procedimientos rutinarios, aplicación de algoritmos, realización de operaciones sencillas).

Segundo nivel: conexiones e integración para resolver problemas estándar. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación.

Tercer nivel: razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales (reflexión). Los ítems requieren cierta comprensión y reflexión, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos. Exige generalización y explicación o justificación de los resultados.

Como se observa en la categorización, justamente el trabajo con las conversiones es la cuestión que marca un cambio en el nivel de demanda de la tarea.

METODOLOGÍA

La metodología con la que se abordó el estudio se basa en una investigación cualitativa no interactiva (McMillan y Schumacher, 2005), debido a que el tipo de información analizada proviene de documentos escritos. Es un estudio descriptivo e interpretativo. Por un lado, se describe lo que se observa en la propuesta de los autores, pero también se realizan interpretaciones en concordancia con el marco teórico en el que se basa la investigación.

Se trata de un análisis del capítulo en el cual se introduce e inicia el tema funciones en los textos cuyas especificaciones se muestran en la Tabla 1.

Este trabajo surge como una reflexión de la propia práctica, y es en este sentido, la elección de los textos se vincula con los más consultados y de mayor acceso, por parte de los docentes del Departamento de Matemática de las escuelas secundarias dependientes de la Universidad Nacional del Litoral. Además, se seleccionan las versiones más actuales de los libros (2015 en adelante).

Tabla 1. *Ficha de los textos escolares*

	1er. Autor	Editorial	Título	Año de Edición
Libro 1	Borsani	Estrada	Hacer Matemática 1/2	2018
Libro 2	Marchetti	AZ	Matemática. Introducción al pensamiento lógico y creativo.	2018
Libro 3	Altman	Tinta Fresca	Matemática 1	2018
Libro 4	Berman	Santillana	Matemática II	2015

En la provincia de Santa Fe, tres de los textos corresponden a los contenidos del primer año de la escuela secundaria obligatoria (13 años), mientras que uno de ellos está destinado para el segundo año (14 años).

Con el objetivo de identificar las conversiones de registros de representaciones propuestas, se caracterizan los tipos de tareas que favorezcan estas traducciones, es decir, se analizan las diferentes acciones que se realizan a la hora de convertir de uno a otro registro. Finalmente, se identifican cuáles son las conversiones que se proponen con mayor frecuencia en las tareas, cuáles con menor frecuencia y cuáles no aparecen.

Para realizar la caracterización, la referencia que se utiliza proviene de los trabajos de Janvier (1987), citado en Font (2011). Se consideran los siguientes registros de representación: verbal, tabular, gráfico y simbólico. Por otra parte, el ejercicio de analizar las tareas contribuyó a ir refinando las categorías de tareas relativas a las funciones desde la perspectiva de las representaciones utilizadas y de las conversiones entre ellas que el proceso de resolución demanda.

Tabla 2. *Tareas que demandan conversiones entre registros*

Desde/Hacia	Verbal (V)	Tabular (T)	Gráfico (G)	Simbólico (S)
Verbal (V)	-	Elaborar una tabla de valores a partir de un relato.	Esbozar gráficamente un relato.	Modelizar un relato por medio de una fórmula.
Tabular (T)	Describir a partir de la interpretación de valores de una tabla.	-	Graficar a partir de los datos de una tabla.	Modelizar mediante una fórmula los datos de una tabla.
Gráfico (G)	Describir a partir de la interpretación de una gráfica.	Extraer coordenadas de puntos de una gráfica para elaborar una tabla.	-	Determinar una fórmula que se ajuste a la gráfica.
Simbólico (S)	Describir a partir de la interpretación de los parámetros de una fórmula.	Elaborar una tabla de valores a partir de una fórmula.	Graficar la fórmula dada.	-

En la Tabla 2 se presentan distintas tareas que implican conversiones de una forma de representación a otra y pone de manifiesto la multiplicidad de relaciones que se pueden establecer entre las diferentes formas de representar una función.

En cuanto a las demandas cognitivas de las tareas, se considera la siguiente caracterización en tres niveles diferentes:

Primer Nivel: tareas cuyo objetivo es la memorización y/o la aplicación de procedimientos sin conexión. Estas tareas consisten en reproducir definiciones expuestas previamente, carecen de ambigüedad y no proponen una conversión de registros. En la Figura 1, se observa un contexto con dos tareas que se consideran de primer nivel.

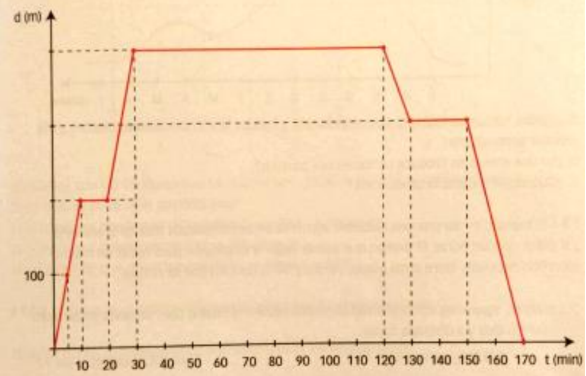
2. Determinen en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.
a. Nivel de alfabetización y salario percibido.
b. Cantidad de toneladas que se cosechan en una hectárea y cantidad de fertilizante colocado.

Figura 1. Tareas con una demanda cognitiva de primer nivel. Fuente: Altman et al. (2018)

Segundo Nivel: requieren establecer conversiones entre distintos registros de representación. Las tareas que exigen este nivel de demanda cognitiva suelen indicar algún procedimiento general vinculado con la noción que se pretende trabajar para desarrollar su comprensión. A pesar de estas indicaciones, será necesario que los estudiantes tomen decisiones y/o establezcan relaciones entre ideas y pongan en juego el concepto para que la misma sea realizada con éxito. En la Figura 2 se presenta un contexto con tareas de este tipo.

Actividad 3

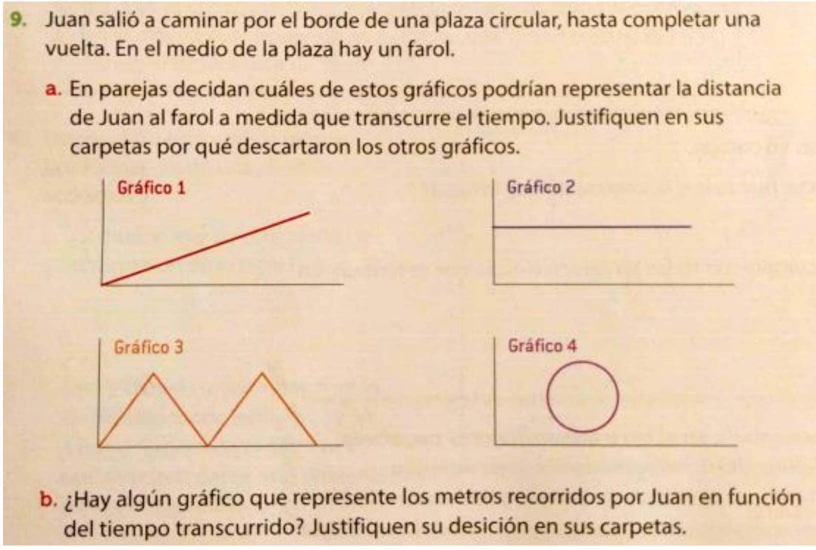
Felipe sale caminando de su casa a las 14 h para ir a jugar al fútbol con su primo Matias.
Pasa a buscarlo y juntos se dirigen al club.
Luego del partido, salen del club caminando para volver a sus casas, se detienen a tomar un helado y cada uno regresa a su domicilio.



1) ¿A qué hora llegaron al club? ____
2) ¿Cuánto tiempo estuvieron en el club? ____
3) ¿A qué distancia del club está la casa de cada uno? ____
4) ¿Dónde se encuentran a las 4 de la tarde? ____
5) ¿A qué hora salió Matías de su casa? ____
6) ¿Cuánto tiempo estuvieron caminando? ____
7) ¿A qué hora hubiera llegado Felipe a su casa si no se hubieran detenido en la heladería? ____

Figura 2. Tareas con una demanda cognitiva de segundo nivel. Fuente: Altman et al. (2018)

Tercer Nivel: tareas que requieren producción y explicación o justificación de los resultados. Este tipo de tareas exige al alumnado tanto generar una respuesta que requiere comprensión conceptual de la noción matemática, como comprobar y explicar la respuesta producida. En la *Figura 3* se observa un ejemplo de un contexto con tareas de este nivel.


9. Juan salió a caminar por el borde de una plaza circular, hasta completar una vuelta. En el medio de la plaza hay un farol.

a. En parejas decidan cuáles de estos gráficos podrían representar la distancia de Juan al farol a medida que transcurre el tiempo. Justifiquen en sus carpetas por qué descartaron los otros gráficos.

b. ¿Hay algún gráfico que represente los metros recorridos por Juan en función del tiempo transcurrido? Justifiquen su desición en sus carpetas.

Figura 3. Tareas con una demanda cognitiva de tercer nivel. Fuente: Borsani, et al., 2018

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Se realiza un análisis de las tareas propuestas para cada contexto y se estudia cada una para identificar las conversiones que demanda su resolución.

Tabla 3. *Conversiones que demandan las tareas*

	Conversión que demanda su resolución											
	VG	VT	VS	GV	GT	GS	TV	TG	TS	SV	SG	ST
Libro 1	68	16	15	72	5	3	15	9	2	17	4	0
	30%	7%	7%	**32%**	2%	1%	7%	4%	1%	8%	2%	0%
Libro 2	32	0	0	32	0	0	3	1	0	0	0	0
	47%	0%	0%	**47%**	0%	0%	4%	1%	0%	0%	0%	0%
Libro 3	21	8	5	22	0	1	3	9	1	0	0	0
	30%	11%	7%	**31%**	0%	1%	4%	13%	1%	0%	0%	0%
Libro 4	45	16	19	46	0	0	10	6	6	11	1	3
	28%	10%	12%	**28%**	0%	0%	6%	4%	4%	7%	1%	2%

En la Tabla 3 se observan las frecuencias, tanto absolutas como porcentuales, de cada conversión de registro de representación en otro. Es importante aclarar que, en algunos casos, una misma tarea demanda para su resolución más de una conversión. Por lo tanto, los totales superan la cantidad de tareas analizadas. En dicha tabla se indica de manera abreviada las conversiones, por ejemplo: VG indica las tareas que demandan conversión del registro de representación Verbal al Gráfico. En la *Figura 4*, se presenta un gráfico de barras, para facilitar la visualización y comparación de los datos.

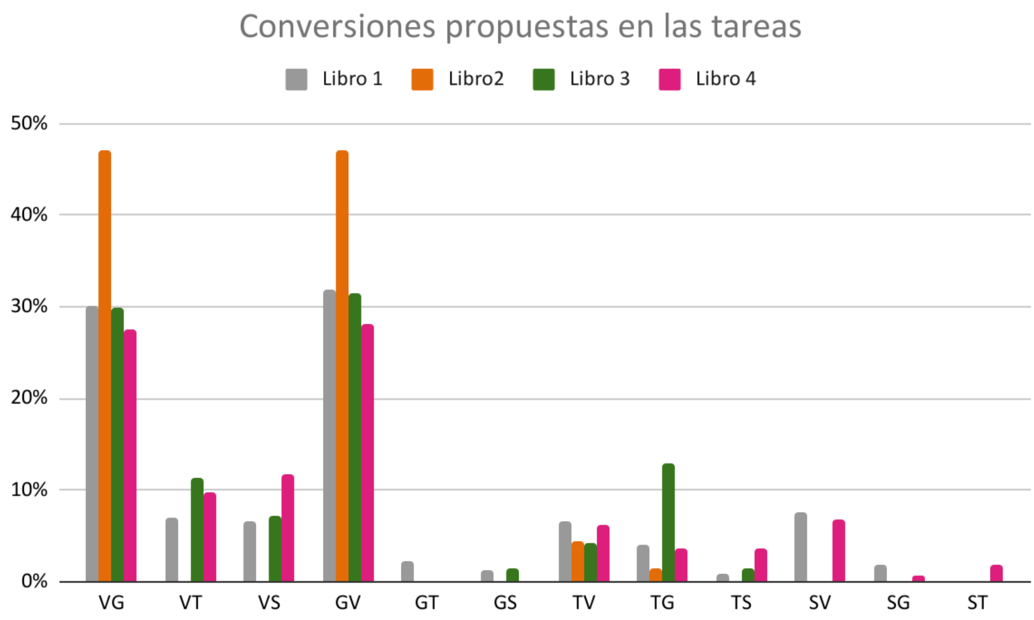


Figura 4. Diagrama de barras, conversiones propuestas en las tareas.

Como se observa en la Figura 4, los autores priorizan las tareas de conversión entre el registro verbal al gráfico y viceversa. Las demás conversiones son muy poco demandadas en la resolución de las tareas presentadas para los contextos que proponen los autores. En el Libro 2, particularmente, el resto de las conversiones prácticamente están ausentes.

Según Hitt (2003) el problema en la enseñanza de las funciones, no es el poco trabajo con otros registros de representaciones, sino la inadecuada articulación entre ellos. Por lo tanto, en este punto se considera de suma importancia que el docente en la selección de las tareas y en sus intervenciones en la actividad áulica, plantee experiencias a sus estudiantes que demanden conversiones que aparecen menos frecuentemente. Como se menciona en Prada Núñez y Hernández Suárez (2017), los estudiantes se limitan a trabajar únicamente con la representación algebraica de la función y no conciben ni la idea, ni la necesidad de trasladar a una ecuación el conocimiento que tienen en forma de tabla y/o gráfica. El hallazgo que destacan los autores refuerza la ruptura existente entre el álgebra y el cálculo, mencionado anteriormente por Artigue (1995).

Como ya se señaló anteriormente, no sólo se pretende analizar la conversión que demanda la resolución de cada tarea, sino que también se observa el nivel de demanda cognitiva que exige cada una. A continuación, en la Tabla 4 se presentan los resultados de este relevamiento.

Tabla 4. *Niveles de Demanda Cognitiva*

		Demanda cognitiva		
		1er Nivel	2do. Nivel	3er. Nivel
Libro 1	Total de Tareas	0	94	20
	Porcentajes	0%	**82%**	18%
Libro 2	Total de Tareas	6	57	0
	Porcentajes	10%	**90%**	0%
Libro 3	Total de Tareas	6	54	6
	Porcentajes	9%	**82%**	9%
Libro 4	Total de Tareas	2	75	15
	Porcentajes	2%	**82%**	16%

En la Tabla 4 y en la *Figura 5,* con más contundencia, se observa que los textos analizados se caracterizan por presentar tareas con una demanda cognitiva predominantemente del segundo nivel, es decir requieren que el alumnado establezca relaciones entre distintos registros en una misma tarea para su resolución. Se interpreta esto como una potencialidad de los mismos, esto es, el hecho de ofrecer numerosas experiencias de conversión entre registros de representación. Si se cruza esta información con la obtenida en la Tabla 3, se notará que en dichas experiencias hay conversiones que aparecen sumamente priorizadas por sobre las demás. Se interpreta que esta es una información muy valiosa para los docentes al momento de diseñar propuestas. La selección de tareas para desarrollar la actividad docente en el aula es uno de los roles profesionales que tienen mayor impacto en el proceso de aprendizaje. Según Hitt (2003), la manipulación de representaciones matemáticas por parte del alumnado, les proporciona los medios para construir imágenes mentales de un objeto o concepto matemático, y la riqueza de la imagen conceptual construida dependerá de los registros de representación que el estudiante haya utilizado. En el mismo sentido, Godino et al. (2016), consideran que cada registro de representación que utiliza el alumnado para representar y operar con un objeto matemático, proporciona un significado específico para dicho objeto. La comprensión del objeto en su integridad, según los autores, supone o requiere la articulación de los diferentes significados parciales (o sentidos), lo cual no se logra de manera espontánea.

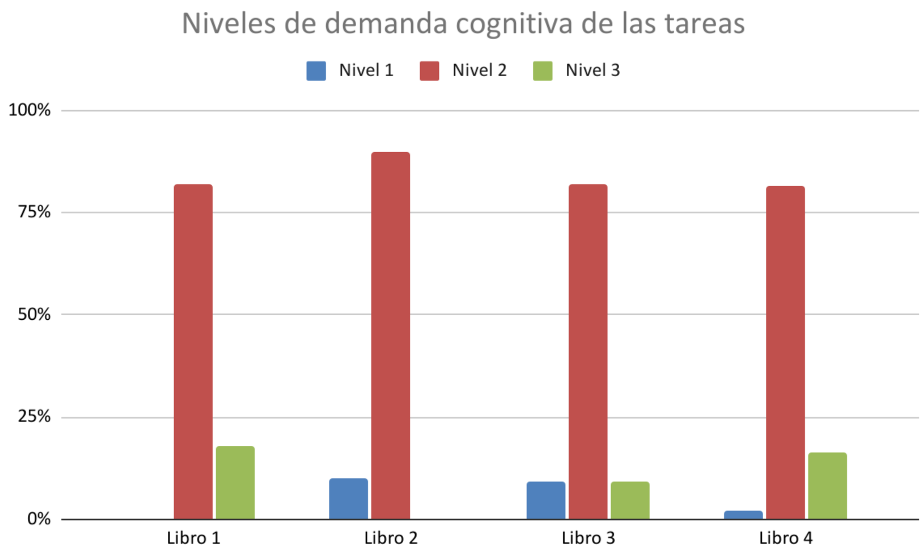


Figura 5. Diagrama de barras, Niveles de demanda cognitiva de las tareas.

De aquí es que se entiende claramente la importancia crucial, en este tema en particular, que debe darse al trabajo con las conversiones de registros en la enseñanza de la matemática.

En las propuestas de los autores de tres de los libros analizados se encuentran tareas del tercer nivel, siendo en el Libro 1 en el que más aparecen (un 20 %), se destaca que este tipo de tareas exigen una explicación o justificación de la respuesta o decisión, se considera que esta perspectiva es importante para iniciar al alumnado en el camino hacia las demostraciones matemáticas. Es primordial que justifiquen sus decisiones con las herramientas matemáticas que poseen y que respalden sus afirmaciones con propiedades conocidas. Como sostiene Dreyfus (2000), no se debería esperar que el estudiantado sea capaz de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático.

CONCLUSIONES

Según la TRRS de Duval (2006) la disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, se consideran imprescindibles para la comprensión, construcción y comunicación de los contenidos matemáticos. Como ya se mencionó, es de gran importancia, en el proceso de construcción del concepto de función, que los aprendices realicen conversiones entre los distintos registros de representación. De hecho, para Janvier (1987), citado en Font (2011), el aprendizaje de las funciones se da siempre y cuando se desarrolle la capacidad del estudiante para interpretar y usar cada una de las representaciones del concepto de función. Así mismo la capacidad de traducción de uno a otro indica la comprensión de éste. Para ello, tiene relevancia poner en evidencia las propuestas actuales de los textos escolares. El aporte del presente estudio se considera de interés para la selección conveniente de tareas por parte del docente para el abordaje del tema en la escuela secundaria.

En los textos analizados se encuentra que la mayoría de las tareas que proponen los autores demandan una conversión de registros de representación. Sin embargo, dentro del abanico de posibilidades de estas acciones, priorizan las del tipo verbal al gráfico y viceversa.

El paso de uno a otro registro amplía y reorganiza la información que está implícita en uno de los mismos, si bien es deseable que el estudiantado trabaje las conversiones entre todos los registros de distinto tipo, este trabajo se beneficia con la tecnología. Se considera que un software de geometría dinámica, como GeoGebra, es un entorno favorable para este propósito. Como se menciona en Soto et al. (2019), la coordinación entre diferentes registros de representación puede ser fortalecida por el uso de diferentes herramientas tecnológicas en la etapa instructiva del estudio de funciones, como por ejemplo el uso software de geometría dinámica que permita trabajar en un marco algebraico, y un marco geométrico simultáneamente. En este sentido, se entiende que, si bien permite automatizar y simplificar algunas de las conversiones, no obstante, otras resultan más difíciles de mecanizar y requieren de un mayor trabajo en la clase. También resulta interesante indagar en las aplicaciones, especialmente diseñadas con fines educativos, creadas con el objetivo de mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos.

En cuanto a la demanda cognitiva de las tareas, se entiende que, si bien los textos analizados muestran un predominio de las tareas de conversiones de registros de representación, es muy reducido el número de tareas referidas a situaciones novedosas en las que se debe producir una transformación o nuevas relaciones de lo aprendido. Se considera que es pertinente presentarlas en un contexto a partir del cual el alumnado debe seleccionar la información relevante y trabajar estableciendo nuevas relaciones entre los conceptos o sus representaciones. De esta manera, se involucran en la resolución de problemas novedosos y complejos, en los que sea necesario evaluar, proponer alternativas, establecer relaciones, tomar decisiones, sintetizar, definir, explicar y justificar sus afirmaciones. Todas estas acciones, propias del tercer nivel de demanda cognitiva.

A partir del análisis realizado de los textos escolares, se destaca un aspecto relevante del abordaje del tema funciones, sus diferentes registros de representación semiótica. A lo largo del trabajo, se procura generar un espacio de reflexión en torno a la necesidad de orientar las tareas escolares, de manera que las prácticas matemáticas del alumnado transiten hacia niveles progresivos de comprensión del concepto de función.

REFERENCIAS

Altman, S., Arnejo, M., Comparatore, C., y Kurzrok, L. (Coord.) (2018). *Matemática 1*. Tinta fresca.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y Aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Relime*, *1*(1), 40-55.

Berman, A., Dacunti, D., Pérez, M., y Veltri, A. (2015). *Matemática II*. Santillana.

Borsani, V., Lamela, C., Murúa, R., y Sessa, C. (Coord.) (2018). *Hacer Matemática 1 / 2*. Estrada.

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., y Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Síntesis.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 9 –

28.

D´Amore, B. (2017). Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos: conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética. En B. D´Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 69 - 95). UDF Editorial.

De Simone, I. y Turner, M. (2018). *Matemática. Introducción al pensamiento lógico y creativo.* AZ.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En N. Gorgorió, A. Deulofeu y A. Bishop (Eds.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 125-136). Graó.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Traducción de Miryam Vega). Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval, y A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Énfasis.

Duval R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registrers of Semiotic Representations*. Springer.

Font, V. (2011). Funciones. En J. Goñi, J. Barragués, M. Callejo, J. Fernández, S. Fernández, V. Font, y G. Torregrosa, *Matemáticas, complementos de formación disciplinar* (pp. 145-185). Graó.

Godino, J., y Font, V. (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros*. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A., y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 91-110.

Hitt, F. (2003). El carácter funcional de las representaciones. *Annales de didactique et de sciencies cognitives*, *8*, 255-271.

Hitt, F. (2014). Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo: la derivada en ambientes TICE. *Revista AMIUTEM*, *2*(2), 1-19.

Mcmillan, J.H. y Schmacher, S. (2005). *Investigación educativa*. (5° edición). Pearson Addison Wesley.

OCDE (2003). *Programme for International Student Assessment.* Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) - Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) (2005) PISA 2003. Pruebas de matemáticas y de Solución de Problemas. http://pisaparacentroseducativos.es/pdf/Items%20liberados%20Matem%C3%A1ticas.pdf

Penalva, M., y Llenares, S. (2011). Capítulo 2: Tareas matemáticas en la educación secundaria. En J. Goñi (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 27-51). Graó.

Prada-Núñez, R. P., Hernández-Suárez, C. A., y Contreras, L. A. J. (2017). Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del Colegio a la Universidad. *Panorama*, *11*(20), 34-44.

Ruiz-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y Didáctico*. [Tesis Doctoral. Universidad de Granada]. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_LRuiz-Higueras.pdf

Spivak, J. (1996). *Cálculo infinitesimal*. (2da. Ed). Reverté.

Soto, M., Herrera, C., y Pereyra, N. (2019). Coordinación de Registros de Representación en el Aprendizaje de la Función Lineal. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, *55*, 71-84.

Jimena Fernández
Escuela Secundaria de la Universidad Nacional del Litoral, Argentina
jimenaf85@gmail.com

Silvia Bernardis
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, Argentina
silvia.bernardis@gmail.com

Madrid, M. J., Pedrosa-Jesús, C., Gutiérrez-Rubio, D., y León-Mantero, C. (2023). Las primeras investigadoras y docentes del área de Didáctica de la Matemática en España: Dolores Carrillo Gallego. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *6*(1), 54-58

ISSN: 2603-9982

LAS PRIMERAS INVESTIGADORAS Y DOCENTES DEL ÁREA DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN ESPAÑA: DOLORES CARRILLO GALLEGO

María José Madrid, Universidad Pontificia de Salamanca, España

Cristina Pedrosa-Jesús, Universidad de Córdoba, España

David Gutiérrez-Rubio, Universidad de Córdoba, España

Carmen León-Mantero, Universidad de Córdoba, España

Resumen

Este trabajo forma parte de los resultados obtenidos dentro del proyecto de investigación "Las primeras investigadoras y docentes del área de Didáctica de la Matemática en España: trayectorias académicas, contribuciones y obstáculos superados". Se centra en la trayectoria académica y profesional de la docente e investigadora Dolores Carrillo Gallego, para ello partiremos de su formación inicial hasta llegar a su vinculación actual con el área tras su jubilación valorando también su trayectoria investigadora y su labor en la gestión universitaria.

Palabras clave: *Didáctica de la matemática, trayectoria académica y profesional, Dolores Carrillo Gallego, CEME*

Pioneering women from the area of Didactics of Mathematics: Dolores Carrillo Gallego

Abstract

This work is part of the results obtained within the research project "The first researchers and teachers in the area of Didactics of Mathematics in Spain: academic trajectories, contributions and obstacles overcome". This study focuses on the academic and professional trajectory of the teacher and researcher Dolores Carrillo Gallego, for this we will start from her initial training until reaching her current relationship with the area after her retirement, also assessing her research career and her work in university management.

Keywords: *Didactics of mathematics, academic and professional career, Dolores Carrillo Gallego, CEME*

Recibido: 21/04/2023; Aceptado: 25/04/2023

Dolores Carrillo se declara una aficionada a las matemáticas desde su época preuniversitaria en su Murcia natal. Al explicar las razones de esta afición, destaca entre otras la belleza en la certeza al realizar una demostración o la sensación de empoderamiento que sientes al resolver correctamente un problema matemático. De hecho, llevada por este interés desde edad temprana, Dolores participó en una Olimpiada Matemática, contradiciendo a todos los que en aquel momento pensaban que las matemáticas no eran para mujeres.

Su interés por esta ciencia orientó a Dolores hacia la Licenciatura en Ciencias Matemáticas que realizó en la Universidad de Zaragoza. Allí profesores de matemáticas y física como Luis Vigil, Núñez Lagos o José Garay, fueron fuente de inspiración por su gran capacidad para transmitir los fundamentos y estructuras del conocimiento matemático.

Figura 1. Promoción 1974/75 de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Zaragoza

Además, su deseo por mejorar la sociedad en la que vivía, la llevó desde su juventud a interesarse por la enseñanza de matemática a los maestros en las Escuelas Normales. Por eso, decidió posteriormente licenciarse también en Pedagogía en la Universidad de Murcia. En ese momento, conoció al profesor Antonio Viñao con quien entabló gran amistad y quien sería posteriormente su director de tesis.

El camino para ser Doctora fue arduo, entre otras razones por las dificultades iniciales que surgieron para hacer una tesis en el área de Didáctica de la Matemática y que hicieron necesario que muchos investigadores en el área desarrollarán sus tesis en otros campos: matemáticas, pedagogía, etc.

En su caso, Dolores se doctoró en Pedagogía por la Universidad de Murcia con una tesis vinculada a la historia de las matemáticas y la educación matemática, defendiendo en 2005 su tesis en esta línea de investigación y titulada: “La metodología de la aritmética en los comienzos de las escuelas normales (1838 1868)” (Carrillo, 2005).

En el ámbito docente, Dolores ha experimentado en primer plano las distintas etapas que ha implicado el paso de Escuela Normal, a Escuela Universitaria y finalmente a Facultad de Educación de la Universidad de Murcia.

Igualmente, su posición ha pasado por numerosas figuras de profesorado hasta llegar a ser Profesora Titular de Universidad. Sin embargo, su docencia ha estado siempre dirigida a la formación del profesorado en Didáctica de las Matemáticas tanto a maestros de Educación Infantil y Primaria como a profesores de Secundaria y Bachillerato.

Figura 2. Miembros del proyecto de investigación junto a Dolores Carrillo en el CEME (Murcia, 18 de noviembre de 2022)

En este sentido, de sus primeros años como docente destaca Dolores la necesidad de un cambio en la formación matemática de los futuros maestros, puesto que la enseñanza hasta aquel momento se centraba en las matemáticas y dejaba a un lado la formación en Didáctica de la Matemática. Este paso no fue fácil entre otras cuestiones por la falta de referentes sobre el tema en España. Pero gracias a la colaboración entre los distintos investigadores e investigadoras en Educación Matemática de la época, quienes participaron en distintas reuniones y asistieron a charlas impartidas por otros investigadores internacionales, pudieron llegar a acuerdos y asentar las bases para la creación de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Sociedad de la que posteriormente Dolores llegaría a ser secretaria durante dos años.

En el ámbito de la investigación, sus líneas prioritarias son la Historia de la Educación Matemática y la Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil.

Su vinculación a la historia de las matemáticas y la educación matemática nace de sus propias inquietudes en el ámbito docente, estas le llevaron a querer saber más sobre la metodología de la enseñanza de las matemáticas en el pasado y por ello defendió su tesis en esta línea de investigación.

Y no solo eso, también en esta temática ha codirigido dos tesis la de Josefa Dólera Almaida titulada “Pedro Puig Adam y la enseñanza de la matemática en el bachillerato en España (1926-1960)” (Dólera, 2022) y la de Encarnación Sánchez Jiménez titulada “Las Escuelas Normales y la renovación de la enseñanza de las matemáticas (1909-1936)” (Sánchez, 2015). Siendo además vocal del tribunal evaluador de dos tesis también en la línea de historia de las matemáticas y educación matemática.

Figura 3. Dolores Carrillo y Ubiratàn D'Ambrosio en el III CIHEM (Brasil, 2015)

Sobre la investigación en didáctica de la matemática valora Dolores la complejidad de esta puesto que está conectada con distintos campos como la psicología y la sociología, pero también con las matemáticas y la construcción del conocimiento matemático. Y aún más en el caso la historia de la educación matemática que junto con lo anterior debe tener en cuenta también la historia, la historia de la educación, etc. Y cuya problemática añadida es el difícil acceso en muchas ocasiones a fuentes de información primarias.

En este sentido, Dolores destaca la importancia de la calidad en la investigación en Educación Matemática, más allá de los indicadores que surgen por las solicitudes de las Agencias de Calidad, considera que es importante poner el foco en realizar investigación de calidad.

En el ámbito de la gestión, pese a las dificultades añadidas que en ocasiones la sociedad pone a las mujeres, Dolores ha sido subdirectora de la Escuela de Magisterio de la Universidad de Murcia y vicedecana de la Facultad de Educación.

Por sus manos han pasado distintos planes de estudios, coordinaciones de prácticas y un largo etc. de desafíos, en los que Dolores ha apostado siempre por la importancia de la Didáctica de la Matemática para los futuros maestros y profesores.

Además, Dolores es miembro del Centro de Estudios sobre la Memoria Educativa (CEME) de la Universidad de Murcia desde su fundación. Este centro tiene como objetivo fomentar la salvaguarda, el estudio y la difusión de la memoria y el patrimonio histórico-educativo de las instituciones educativas de la Región de Murcia, y Dolores además de ser partícipe como miembro, ha sido también secretaria (2013-2017) y directora (2017-2021) del mismo.

Dolores forma además parte del equipo que gestiona el funcionamiento del Museo Virtual de Historia de la Educación (MUVHE), que busca favorecer la catalogación, el estudio, la investigación, la protección, la conservación, el uso didáctico y la difusión del patrimonio histórico-educativo.

La amplia trayectoria de Dolores en el ámbito docente, investigador y de gestión universitaria es muestra de la importante y a su vez compleja labor que un grupo de investigadoras e investigadores realizaron en los comienzos del área de Didáctica de la Matemática para permitir que esta se haya desarrollado hasta llegar al momento actual.

Agradecimientos: Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto de investigación: Submodalidad 2.6. UC♀IMPULSA "Las primeras investigadoras y docentes del área de Didáctica de la Matemática en España: trayectorias académicas, contribuciones y obstáculos superados".

REFERENCIAS

Carrillo, D. (2005). *La metodología de la aritmética en los comienzos de las escuelas normales (1838 1868) y sus antecedentes*, (Tesis Doctoral), Universidad de Murcia.

Dólera, J. (2022). *Pedro Puig Adam y la enseñanza de la matemática en el bachillerato en España (1926-1960),* (Tesis Doctoral), Universidad de Murcia.

Sánchez, E. (2015). *Las Escuelas Normales y la renovación de la enseñanza de las matemáticas (1909-1936),* (Tesis Doctoral), Universidad de Murcia.

María José Madrid
Universidad Pontificia de Salamanca, España
mjmadridma@upsa.es

Cristina Pedrosa-Jesús
Universidad de Córdoba, España
s02pejec@uco.es

David Gutiérrez-Rubio
Universidad de Córdoba, España
dgrubio@uco.es

Carmen León-Mantero
Universidad de Córdoba, España
cmleon@uco.es

ISSN: 2603-9982

Santágueda Villanueva, M., Casas-Rosal, J.C. y León-Mantero, C. (2023). Las primeras investigadoras y docentes del área de Didáctica de la Matemática en España: Pilar Orús Báguena. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 6*(1), 59-66

LAS PRIMERAS INVESTIGADORAS Y DOCENTES DEL ÁREA DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN ESPAÑA: PILAR ORÚS BÁGUENA

María Santágueda Villanueva, Universitat Jaume I, España

José Carlos Casas-Rosal, Universidad de Córdoba, España

Carmen León-Mantero, Universidad de Córdoba, España

Resumen

En este trabajo se aborda la trayectoria de la docente e investigadora Pilar Orús Báguena. En el marco del proyecto titulado "Las primeras investigadoras y docentes del área de Didáctica de la Matemática en España: trayectorias académicas, contribuciones y obstáculos superados" se está entrevistando y recopilando información sobre mujeres que contribuyeron al desarrollo del área en España. Su formación investigadora en Didáctica de las Matemática, su labor docente y su responsabilidad en la gestión universitaria la convierten en una de las figuras más importantes en la constitución y consolidación de la Educación Matemática en España.

Palabras clave: *Didáctica de la Matemática, IREM, Universitat Jaume I de Castellón, Pilar Orús Báguena, CRDM-Guy Brousseau*

Pioneering women from the area of Didactics of Mathematics: Pilar Orús Báguena

Abstract

This study addresses the trajectory of the teacher and researcher Pilar Orús Báguena. Within the framework of the project entitled "The first researchers and teachers in the area of Didactics of Mathematics in Spain: academic trajectories, contributions and obstacles overcome", women who contributed to the development of the area in Spain are being interviewed and collected information. Her research training in Didactic of Mathematics, her teaching work and her responsibility in university management make her one of the most important figures in the constitution and consolidation of Mathematics Education in Spain.

Keywords: *Didactics of Mathematics, IREM, Universitat Jaume I de Castellón, Pilar Orús Báguena, CRDM-Guy Brousseau*

Recibido: 22/04/2023; Aceptado: 26/04/2023

Pilar Orús Báguena es una docente e investigadora en Didáctica de la Matemática con una adscripción poco habitual. A pesar de que la mayor parte de su investigación y su formación doctoral ha estado ubicada en este ámbito de conocimiento, su docencia se desarrolló en el área de Álgebra.

Su elección por dedicar su vida a la carrera universitaria fue circunstancial, su mayor afán desde que era niña era enseñar Matemáticas.

Desde los diez u once años en el primer año del bachiller elemental de la época, Pilar empezó a dar clases particulares; primero, a una compañera de colegio por sugerencia de la monja que impartía las asignaturas de ciencias, y no paró de darlas hasta finalizar la carrera de Matemáticas. y conseguir su primer trabajo como profesora. Se licenció en Ciencias (Exactas), Universidad Literaria de Valencia en 1975 y aquel mismo año realizó el examen de Grado de Licenciatura en la Facultad de Ciencias de dicha universidad y empezó a trabajar en la entonces llamada Universidad Laboral de Cheste, como profesora con dedicación exclusiva. En 1979 obtuvo la Capacitación de Aptitud Pedagógica (el antiguo CAP) en I.C.E. de Universidad de La Laguna y el 1 de octubre de ese año 1979 obtuvo el nombramiento de Profesora Titular de Matemáticas (Docente A) de las antiguas Universidades Laborales (actual Complejo Educativo de Cheste). "Universidades laborales" fundada y financiada por los sindicatos verticales para hijos de los trabajadores de toda España, totalmente becados. En el caso de la U.L. de Cheste, se impartía el ciclo superior de EGB (sexto séptimo y octavo de EGB, lo que actualmente sería último curso de primaria y los dos primeros años de 1º ciclo de la ESO) y la formación de maestros (como en las antiguas escuelas de Magisterio), siendo todos los profesores del departamento de Matemáticas, licenciados en Matemáticas, aunque fuese para impartir mayoritariamente el ciclo superior de EGB. En la Escuela de Magisterio Pilar impartió clases Matemáticas y de Didáctica de las Matemáticas desde el curso1977-1978 hasta que se cerró la Escuela de Magisterio de la Universidad de Cheste en el 1990-1991 por decreto de la Generalitat Valenciana.

A nivel profesional en 1988, Pilar pasó a ser Catedrática de Enseñanza Secundaria, por integración en dicho Cuerpo de la Escala de Profesores de Enseñanzas Integradas, con destino en el Instituto "A" de Cheste y en 1991 obtiene la Titularidad de Escuela Universitaria en comisión de servicios en el Área de Álgebra del Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castellón (UJI), al cierre de la Escuela de Magisterio.

En su época universitaria frecuentó el CEM, un Colegio Mayor Universitario en Valencia donde participó en actividades muy diversas: conferencias, cine-forum, debates… utilizando su biblioteca para estudiar y de aquellos compañeros surgieron algunos contactos personales decisivos para su formación en investigación en Didáctica de la Matemática. Ella opta por la llamada "línea francesa de investigación en Didáctica de la Matemática" fue algo circunstancial, ya que asistió a unas jornadas organizadas por el Ministerio de Educación, sobre la enseñanza de las Matemáticas en el ciclo medio de EGB, invitada por un antiguo compañero universitario del CEM, organizador del evento, especialista en Historia de la Educación y en la actualidad, catedrático de dicha especialidad. Esta persona sabía que Pilar estaba interesada por la didáctica de las Matemáticas y que la información que se presentaba en las Jornadas, podrías servirle para orientarle en su formación investigadora, como así fue. Entre las conferencias presentadas, le marcó el proyecto multidisciplinar sobre el volumen desarrollado por tres investigadores: dos psicólogos: Gérard Vernaud (1985) y Graciela Ricco (1985) y un matemático, André Rouchier (1985). Estos tres investigadores se ubicaban en el marco de la investigación en Didáctica de las Matemática, y más concretamente en la interpretación dada en la *Théorie des situations didactiques (TSD)* creada y desarrollada por G. Brousseau (2012), quien sería el director del DEA y del doctorado de Pilar Orús.

Figura 1. Pilar Orús Báguena junto a los miembros del proyecto de investigación en la Facultat de Magisteri de la Universitat de Valencia (Valencia, 30 de enero de 2023)

Así que Pilar decidió ir a París a hablar con Graciela Ricco, para informarse de sus proyectos y de los IREM de las distintas universidades; ésta la invitó a una reunión del famoso *Seminaire National de Didactique des Mathématiques*, en París, que se reunían tres veces al año con todos los investigadores de Didáctica: Brousseau, Chevallard, Vernaud, Rouchier, Duval, etc. Además, fue Graciela Ricco la que le animó a conocer y contactar a Brousseau porque como creador del *Centre d'Observation et de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques* (COREM) en la escuela Michelet y su enfoque como formador de profesores le podía interesar para su trabajo como profesora de Didáctica de la Matemática y de Matemáticas, de futuros maestros, además de ver si podía realizar el doctorado con él, en el programa de doctorado de Didactica de la Matemática de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Bordeaux-I . Fue becada para estudiar el doctorado gracias a una beca postdoctoral hispano francesa (Ministerio de Educación y Ciencia de España (MEC)- Ministerio de Educación Nacional, y de la Juventud de Francia (MNRS)), tras haber realizado allí estancias cortas de investigación en el COREM, con todos los actores de ese ecosistema: G. Brousseau, los maestros de les Écoles Michelet, y los investigadores en Didáctica de la Matemática.

Todo esto hizo que eligiera la Faculté des Sciences de l'Université de Bordeaux para realizar todo el programa de doctorado. En 1986, Pilar obtiene le *Diplôme d'Etudes Approfondies (D.E.A.)-Spécialité Didactique des Mathématiques, U.E.R. Scientifique. Université Bordeaux-I.* y el 7 de noviembre 1992 Pilar consiguió el título de *Docteur en Didactique des Mathématiques, par l'Université de Bordeaux-I*, (Francia), Imagen 2, y 1994 obtuvo el título homologado de Doctor en Ciencias Matemáticas, por orden Ministerial del MEC, 19 de enero de 1994; en ese momento España no estaba en la Unión Europea y no existía el reconocimiento automático de los títulos obtenidos en Europa.

Figura 2. Defensa de la tesis doctoral de Pilar Orús, junto a G. Brousseau, Marie-Hélène Salin y Renné Berthelot.

Durante la época de su docencia en la Escuela de Magisterio de la Universidad de Cheste (1975/1991) Pilar participaba en las JAEM, Jornadas anuales organizadas por la Asociación de profesores de Matemáticas, sobre la enseñanza de las Matemáticas, en diferentes niveles educativos, coincidiendo en los grupos de trabajo y en las comunicaciones y demás actividades, con profesores de Escuelas de Magisterio de diversas Universidades de España (U. Complutense de Madrid, de Zaragoza, de Granada, de Murcia, de la Autónoma de Barcelona, de Vigo, entre otras). Fue el germen del *Seminario Interuniversitario de Investigaciones Didácticas las Matemáticas*, (SIIDIM), del que Pilar Orús fue una de las fundadoras y que fue la primera asociación universitaria de investigación en Educación Matemática en España. Con la posterior creación de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, el SIIDIM decidió integrarse como un grupo de trabajo transversal la *Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica* (DMCDC).

Pilar había pasado de Cheste a la Universidad de Castellón ya que, al cerrarse el centro, a todos los que eran doctores o a punto de serlo y al existir necesidades docentes en la nueva universidad, se les dio la posibilidad de irse a Castellón, según fuera su interés o sus conocimientos y las necesidades de las diversas áreas de conocimientos. Entonces, la conjunción de ambas circunstancias y el doctorado próximo hizo que Pilar entrará en el área de Álgebra del Departamento de Matemáticas de la UJI, donde se necesitaba profesorado, ya que el área de Didáctica de la Matemática ya estaba cubierta por el profesorado de la Escuela de Magisterio, integrada en el colegio Universitario de Castellón, origen de la Universitat Jaume I de Castelló. En la UJI, los componentes del área de Didáctica de la Matemática optaron por quedarse junto a otras didácticas específicas, en el departamento de Educación, pese a la formación matemática de todo su profesorado; ya tenían un funcionamiento consolidado y autónomo dentro de un departamento en que la mayoría eran TEU (no doctores), a diferencia de los nuevos departamentos, que iban surgiendo en la UJI. En el momento de su creación, por voluntad política del Rector, Francisco Michavila, y del claustro constituyente, se optó por que la figura de estabilidad y promoción del profesorado fuese Titular de Universidad y por tanto doctores. En la imagen 3 tenemos a Pilar impartiendo un seminario en la recién creada universidad.

Figura 3. Impartiendo un curso de doctorado en la Universidad Católica de Valparaíso/Chile.

La doctora Pilar Orús permaneció en la UJI hasta su jubilación en 2013, siempre en el departamento de Matemáticas, impartiendo no sólo asignaturas de álgebra, sino que también impartió cursos de doctorado de Didáctica de la Matemática, en los antiguos programas de doctorado del Dpto. de Matemáticas de la UJI y en colaboración con otras Universidades (la U. Politécnica de Valencia, la U. Tecnológica Metropolitana de Santiago de Chile, de la U. de Valparaíso, U. de Santiago de Cuba); así mismo impartió docencia en el Master de Formación del Profesorado de la UJI. En 2008 obtiene el nombramiento de Profesor Titular de Universidad, en el Área de Álgebra del Departamento de Matemáticas, de la UJI. Durante su trayectoria en la UJI, también ostentó cargos de gestión: de 1998 hasta 2001, fue la primera directora de la Escuela Superior de Tecnología y Ciencias Experimentales de la UJI, los periódicos locales comentaron que dimitió del cargo porque no consiguió implantar el Grado de Matemáticas, aunque ella afirmó que no era así (Figura 4); de 2002 hasta 2010, fue directora del departamento de Matemáticas, dos mandatos consecutivos, siendo la primera y única mujer, hasta la actualidad.

La gran aportación de Pilar a la investigación en Educación Matemática es la creación y gestión del Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas CRDM-Guy Brousseau (CRDM-GB) que se encuentra en la Biblioteca de la UJI y depende del Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones (IMAC), imagen 5. Su finalidad es desarrollar la investigación en Didáctica de la Matemática en ámbitos universitarios y difundir sus resultados. En este centro se pueden encontrar diversos recursos tanto documentales como bibliográficos que se realizaron en el Centro Escolar J. Michelet de Talence (Francia) que por un convenio de investigación con el Instituto de Investigación en Enseñanza de la Matemática (IREM) de la Universidad de Bordeaux, se creó el COREM. Este centro fue dirigido por el Profesor Brousseau durante 28 años (de 1972 a 1999) y era un laboratorio que permitía estudiar situaciones en el aula bajo el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas (para saber más ver Orús y Fregona (2020)).


Levante de Caste
EL MERCANTIL VALENCIANO
FUNDADO EN 1872
Zaplana califica de «ejemplar» el funcionamiento de la UJI
Mediterráneo
10 CASTELLÓN
La carrera de Matemáticas motiva la dimisión de Orús

Figura 4. Recortes de periódico de los años que Pilar fue directora de la Escuela Superior de Tecnología y Ciencias Experimentales.

Que todos los documentos del COREM llegaran a la UJI fue gracias a la decisión de Guy Brousseau de obtener una determinada utilización de esos recursos, para los investigadores en DM (ver Normas de utilización del CRDM-GB en su web). La ejecución fue un trabajo colectivo de varias mujeres: la última directora del COREM (que sustituyó a Brousseau cuando se jubiló); la directora de la escuela Michelet hasta la pérdida del estatus de escuela de observación de les Écoles J. Michelet; maestras de la escuela, y Pilar. Existía la necesidad de vaciar las estancias que acogían los recursos de observación del COREM, ya que el centro dejaba de ser una escuela de observación y había sido un dispositivo único de la historia de Didáctica de la Matemática y generado unos recursos únicos también en la historia de la Didáctica y de la Educación Matemáticas. Pilar, con la ayuda del IMAC, del Vicerrectorado de Investigación del Director de la Biblioteca y la documentalista de la UJI (Lidón Paris), consiguió gestionar el marco legal y los fondos necesarios para traer y alojar la documentación en la UJI. Esta documentación se puede consultar pidiendo los permisos necesarios. En el artículo de Fregona y Orús (2017) se explica cómo explorar estos recursos. Asimismo, se puede encontrar más información en la web del Centro de Recursos de Didáctica de la Matemática Guy Brousseau (CRDM-GB) (https://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/62668).

Figura 5. Izquierda Pilar Orús y Lidón París (archivera del fondo) y derecha Pilar Orús y Pablo Gregori (director actual del CRDM-GB)

Pilar ha dirigido dos tesis doctorales en su vida, estando ya jubilada, fueron las tesis de Irene Pitarch (2016) y Laura Peydró (2016), ambas en Didáctica de la Matemática, abordando temas que ella misma había iniciado en su tesis doctoral, Orús (1992) en el marco de la Teoría de Situaciones (Guy Brousseau, 2007). (Figura 6).

Figura 6. Laura Peydró, Pilar Orús e Irene Pitarch en el acto académico universitario de recepción de nuevos doctores.

Desde que pasó a ser profesora senior (jubilación el 1 de enero de 2013), la doctora Pilar Orús, ha seguido ejerciendo como la persona designada por el IMAC para poner en funcionamiento y gestionar el CRDM-GB. En colaboración con otros investigadores e investigadoras, ha podido poner en funcionamiento este centro y empezar a difundir su potencialidad, demostrando qué tipo de investigaciones se pueden hacer hoy día con los fabulosos recursos que tenemos; cómo pueden servir como nuevos recursos para fundamentar la investigación actual e incluso la docencia, pero sobre toda para la formación (inicial y permanente) del profesorado de Matemáticas y para la formación de investigadores en Didáctica de la Matemática.

Agradecimientos: Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto de investigación: Submodalidad 2.6. UC♀IMPULSA “Las primeras investigadoras y docentes del área de Didáctica de la Matemática en España: trayectorias académicas, contribuciones y obstáculos superados”.

REFERENCIAS

Brousseau, G. (2007) *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Fregona, D. y Orús, P. (2017). El Centro de Recursos en Didáctica de la Matemática Guy Brousseau: un sitio para explorar prácticas de enseñanza de las matemáticas. En D.

Fregona, S. Smith, M. Villarreal y F. Viola, *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la Educación Matemática*. 109-132. FAMAF y Universidad Nacional de Córdoba.

Orús, P (1992). *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatorie*. (Tesis doctoral) Université de Bordeaux-I

Orús, P. y Fregona D. (2020) Huellas del COREM y la TSD en el desarrollo de la didáctica de la matemática en España y Argentina. *Historia y Memoria de la Educación 11*, 553-594

Peydró, L. (2016) *La Lógica en la formación de maestros: ¿necesaria? ¿suficiente?.* (Tesis de doctorado). Universitat Jaume I. https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=1213671

Pitarch, I. (2016) *Desarrollo de la competencia "Tratamiento de la información" en la ESO, a través de la lógica y del análisis estadístico de los datos,* (Tesis de doctorado). Universitat Jaume I. https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=1213671

Ricco, G. (1985) Representación y aritmetización de la noción de volumen. Entrevistas individuales realizadas con alumnos de 11 a 15 años. En Ministerio de Educación y Ciencia (eds). *La enseñanza matemática al debate* (174-200). Ed. Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Rouchier, A. (1985) Didáctica de la medida del volumen en el segundo curso de la escuela secundaria. En Ministerio de Educación y Ciencia (eds). *La enseñanza matemática al debate* (201-212). Ed. Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Vergnaud, G. (1985) Didáctica y adquisición del concepto de volumen. En Ministerio de Educación y Ciencia (eds). *La enseñanza matemática al debate* (161-174). Ed. Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

María Santágueda Villanueva
Universitat Jaume I, España
santague@uji.es

José Carlos Casas-Rosal
Universidad de Córdoba, España
jcasas@uco.es

Carmen León-Mantero
Universidad de Córdoba, España
cmleon@uco.es

MES