Matemáticas, Educación y Sociedad

ISSN: 2603-9982
Matemáticas, Educación y Sociedad
http://mesjournal.es/
editor@mesjournal.es

Vol 6 No 2 (2023) Matemáticas, Educación y Sociedad

Maz-Machado, A., Melero-Bolaños, J. C., Villarraga-Rico, M. E., y Rodríguez-Baiget, M. J. (2023). Aspectos metodológicos en artículos de Educación Matemática: análisis de dos revistas españolas. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *6*(2), 1-10

ISSN: 2603-9982

ASPECTOS METODOLÓGICOS EN ARTÍCULOS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA: ANÁLISIS DE DOS REVISTAS ESPAÑOLAS

Alexander Maz-Machado, Universidad de Córdoba, España

Juan Carlos Melero-Bolaños, Universidad de Córdoba, España

Miguel Ernesto Villaraga-Rico, Universidad del Tolima, Colombia

María Josefa Rodríguez-Baiget, Universidad de Córdoba, España

Resumen

En toda investigación es necesario seguir una serie de pautas y técnicas metodológicas que otorgan un sello de rigor, validez y fiabilidad a los resultados. Por ello es necesario que en el apartado de metodología o métodos de todo artículo científico se describan con suficiente claridad. Se presenta un estudio piloto sobre aspectos metodológicos descritos en los artículos de Educación Matemática publicados en dos revistas españolas indexadas en la base de datos Scopus. Se utilizan métodos mixtos propios tanto cuantitativos de la bibliometría y cualitativos del estudio de caso.

Se halló que predominan los estudios cualitativos orientados a temática universitarias. También se halló falta de información metodológica o esta es confusa ambigua. Así mismo, se evidenció que los tamaños muestrales son demasiado pequeños y mayoritariamente inferiores a 9 sujetos

Palabras clave: *Revistas, Educación matemática, metodología, investigación, Scopus.*

Methodological aspects in Mathematics Education articles: analysis of two Spanish journals

Abstract

In all research it is necessary to follow a series of guidelines and methodological techniques that give a seal of rigor, validity and reliability to the results. For this reason, it is necessary that in the methodology or methods section of any scientific article they are described with sufficient clarity. We present a pilot study on methodological aspects described in mathematics education articles published in two Spanish journals indexed in the Scopus

Recibido: 02/08/2023; Aceptado: 28/08/2023

database. We used mixed methods, both quantitative methods from bibliometrics and qualitative methods from case studies.

It was found that qualitative studies oriented to university topics predominated. Methodological information was also found to be lacking or ambiguous. It was also found that the sample sizes are too small and mostly less than 9 subjects

***Keywords**: Journals, Mathematics education, methodology, research, Scopus*

INTRODUCCIÓN

Uno de los pilares de la investigación científica es la posibilidad de que esta pueda ser replicada por otros investigadores. Por lo tanto, es obvio que el rigor metodológico es la base para confiar en los resultados de toda investigación científica (Houston, 2019). El rigor es algo más que la aplicación de sofisticadas y complicadas metodologías es un conjunto de pasos y criterios objetivos que se siguen en la investigación y de los que se informan cuando se difunden los resultados.

Köhler et al. (2017) definen el rigor como la coherencia en el desarrollo conceptual, la postura epistemológica, la aplicación de herramientas analíticas y la información transparente su uso, así como la posterior interpretación y resultados. En un editorial de la revista *Academy of Management Learning & Education* del 2017, se discuten las formas en que los autores pueden establecer el rigor en el aprendizaje y la educación en gestión. Allí se indica que un aspecto discutido con frecuencia como un paso importante hacia la legitimidad en la investigación educativa es la necesidad de mayor rigor en los procesos de investigación.

No son pocos los investigadores y los estudios que han criticado la investigación educativa por no ser suficientemente científica en términos de rigor metodológico (Condliffe, 2000; Labaree, 2004). Para tratar de brindar una réplica a esta crítica, desde distintos sectores del ámbito de las ciencias sociales, se ha promovido la investigación científica en educación a través de experimentos aleatorios y verificables mediante pruebas generadas objetivamente y, no solamente por medio de estudios cualitativos y descriptivos que son muy frecuentes en el campo educativo (Cook et al, 2009; Eisenhart, 2005; Eisenhart y Towne, 2003; Trainor y Graune, 2014).

La investigación cualitativa no es rigurosa sólo porque siga un protocolo estructurado y rígido de recogida y análisis de datos. Reinhardt et al. (2018, p. 519) señalan que:

> […] es rigurosa si es transparente en cuanto a las observaciones inesperadas y sorprendentes que le han llevado a reorientar su enfoque, los giros que ha dado su proyecto a medida que sus observaciones ponían en tela de juicio los intereses de investigación y las hipótesis de trabajo iniciales observaciones desafiaron los intereses de investigación iniciales y las hipótesis de trabajo.

Determinar si un artículo de investigación es riguroso requiere de unos amplios conocimientos metodológicos y experiencia investigadora. En muchos casos también se requiere dominar el campo de conocimiento. En nuestro caso, el educativo y en particular la educación matemática para poder determinar si la planificación y desarrollo metodológico es coherente y acorde con el marco teórico tomado como referencia para la investigación.

Bruer (1982) afirmaba que un artículo metodológicamente riguroso que comunique un resultado trivial puede ser citado con menos frecuencia que un artículo un resultado fundamental. Sin embargo, esto no es válido siempre, debido a que como algunos estudios han revelado, en muchos casos las citas se hacen obedeciendo a criterios no solo de carácter académico (Macroberts y Macroberts, 1996; Rinia et al., 2002; Vallejo et al., 2006). Entre ellos queremos destacar dos: "Efecto Lowry: Todos lo citamos, pero nadie lo lee. […], Efecto Old boys clique: Lo que popularmente conocemos como red de antiguos amigos que se saludan (el popular «sombrerazo») citando trabajos de pares, colegas o amigos." (Vallejo et al., 2006, p. 384).

De tal forma, que la mejor manera de analizar los aspectos metodológicos es la lectura directa de los artículos, aunque es una tarea larga y dispendiosa por lo que para una primera aproximación parece conveniente elegir una muestra accesible y acotada en el tiempo.

La investigación en Educación Matemática (EM) como parte del ámbito educativo presenta muchas de las críticas antes señaladas. Hace ya dos décadas Duffin y Simpson (2000), analizaron y discutieron sobre cómo determinar cuáles son las metodologías válidas en educación matemática y los problemas asociados con el desarrollo de nuevas formas de trabajo en métodos de investigación aceptables. Ellos planeaban su experiencia en la investigación en el campo y dejaban abiertas cuestiones sobre los aspectos metodológicos.

Según Ernest (1998) los métodos son el conjunto de todas las técnicas de recogida y/o análisis de datos que son utilizados en una investigación. Como bien señalan Godino et al. (2011. p, 34) es común identificarse "con el término de metodología, pero ésta incluye los posicionamientos epistemológicos y ontológicos del investigador que justifican los métodos elegidos". Carrillo y Muñoz-Catalán (2011) ofrecen una explicación que aclara la diferencia entre métodos y metodología

En la actualidad la publicación de artículos sobre EM se ha incrementado de forma continua entre otras razones porque la edición digital ha fomentado la creación de muchas nuevas revistas especificas del área en todo el mundo. Por ejemplo, en la base de datos Scopus hay indexadas 33 revistas de EMA y 9 que publican también con ciencias experimentales. En España se editan dos de estas 22 revistas, *PNA* y *Avances de Investigación en Educacion Matemática* (*AIEM*), ambas ubicadas en el tercer cuartil del Scimago Journal Rank del año 2022.

La revista *PNA* se publica de manera cuatrimestral y esta indexada desde el año 2017 y publica artículos en español, inglés y portugués. En esta base tiene reportados 67 artículos. Por su parte *AIEM* se publica de forma semestral y publica en los mismos idiomas y esta indexada desde el año 2018 y tiene reportados también 67 artículos.

Queremos presentar los avances de resultados sobre estas dos revistas como parte de una investigación más amplia que se está realizando sobre todo el conjunto de las 22 revistas.

Si bien con anterioridad se han realizado análisis de las revistas españolas de EM (Bracho et al., 2012), no se han analizado aspectos de carácter metodológico.

El objetivo de este estudio es identificar algunos de los aspectos metodológicos que se indican en los artículos de *PNA* y *AIEM* que permitan conocer cuáles son los objetos de estudio, el nivel académico de las investigaciones y el tipo de metodología utilizada y preferencias en el área.

MATERIALES Y MÉTODO

Este es un estudio de caso, es exploratorio y descriptivo de carácter cuantitativo. Considerado el tipo de variables es una investigación ex post facto, por cuanto no se manipulan las variables. Se utiliza como técnica el documental de contenido. Se han seguido los procedimientos y técnicas ya utilizadas en otros estudios bibliométricos recientes sobre revistas y publicaciones (Özkaya, 2018; Rodríguez-Faneca et al., 2021)

Población y muestra

La población son los artículos de las revistas de EMA indexadas en Scopus. La muestra seleccionada son los correspondientes a las revistas publicadas en España en los años 2022 y 2023.

Toma de datos

En el mes de julio de 2023 se consultó en la web de Scimago Journal Rank, el listado de revistas de educación de España y se seleccionaron las dos únicas específicas de EM. Luego se consultaron los artículos en las páginas web de cada una de las revistas y que son de acceso abierto (*PNA*: https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/issue/archive; *AIEM*: https://aiem.es/issue/archive).

Se descargaron 48 artículos, volcándose los datos identificativos a una hoja Excel. Se procedió a su lectura por parte de expertos en el área de didáctica de las matemáticas de la Universidad de Córdoba. A partir de la información aportada por cada artículo se identificaron las variables: Titulo, número de autores, tamaño de la muestra o población utilizada, identificación de la población, nivel educativo del estudio y finalmente el tipo de metodología indicada. Una vez hecho se realizaron agrupaciones y homogenización de datos. Por ejemplo, niños de primaria, estudiantes de primaria, alumnos de primaria se categorizaron como Alumnos primaria. Se hizo este proceso en cada variable. Para garantizar la objetividad y rigor del procedimiento se realizó una triangulación por expertos de EM de la Universidad Pontificia de Salamanca, Universidad de Salamanca y la Universidad de Valladolid.

Para la variable metodología se siguió los indicadores y descriptores propuestos por Godino et al. (2011):

1. Cuantitativo (uso de estadística descriptiva y/o inferencial; predominio de variables cuantitativas).
2. Mixto (uso de variables cualitativas y cuantitativas, con recuentos de frecuencias en muestras o poblaciones).
3. Cualitativo (interpretativa, estudio de casos, descripciones narrativas, etc.).
4. Teórico (discusión o ensayo filosófico).

Análisis de la información

Los datos se agruparon y se realizaron las tablas de frecuencia tanto para cada una de las revistas como de manera conjunta.

RESULTADOS

De los 48 artículos analizados 20 son de *AIEM* y 28 corresponden a *PNA*. Si bien son diversos los elementos que participan de la EM, hemos hallado que las investigaciones en las dos revistas analizadas han tomado como objetos de estudios 9 tipos de poblaciones muestrales. El mayor grupo de sujetos lo conforman los estudiantes universitarios (Tabla 1) seguido del profesorado alcanzando entre los dos grupos el 62,5% del total de sujetos estudiados y relacionados en los artículos. En ambas revistas los porcentajes son casi similares. En *PNA* no se han investigado aspectos teóricos de EM y a su vez en *AIEM* no se han publicado artículos con análisis sólo de alumnos de primaria, software o técnicas. Si se observa en detalle se evidencia que el 56,24 % de los estudios tomaron a alumnos de distintos niveles educativos como objetos de investigación. En los artículos se informa que prácticamente en el 80% de estos, los investigadores eran a su vez profesores de tales alumnos. Por otra parte, los docentes en diversos niveles representan el 20,7% de la población investigada en estas revistas en los años analizados.

Tabla 1. *Población sobre la que se investigó en los artículos.*

Tipo de muestra	**% en *AIEM***	**% en *PNA***	**% Global**
Estudiantes universitarios	45,00	46,43	45,83
Profesorado	15,00	17,86	16,67
Libros	15,00	7,14	10,42
Alumnos Primaria y Secundaria	5,00	10,72	8,33
Teoría	15,00	0,00	6,25
Maestros	5,00	3,57	4,17
conceptos/técnicas	0,00	7,14	4,17
Software	0,00	3,57	2,08
Alumnos Primaria	0,00	3,57	2,08
Total	100,00	100,00	100,00

Un aspecto que ha llamado la atención es el bajo número de la muestra en la mayoría de los estudios. En el 43,75% de los artículos la muestra fue de menos de 10 sujetos (Tabla 2) y si incluimos hasta los 19 se alcanza el 62,5%. Esto es un tanto incoherente con lo que se declara sobre el tipo de estudio, porque solamente se reportan 3 estudios de caso. En el 10,4% de artículos que corresponden a más de 100 sujetos se utilizaron test.

Tabla 2. *Tamaño de las muestras en los artículos publicados en EM en PNA y AIEM.*

Muestra	**%**
0 a 9	43,75
10 a 19	18,75
20 a 49	14,58
50 a 99	12,50
100 a 1000	8,34
1000 o más	2,08
Total	100,00

Los estudios reportados abarcan todos los niveles educativos formales, pero ninguno de la educación no formal. El mayor número de artículos están orientados a aspectos de carácter universitario (Tabla 3). Esto es coherente con los datos de la tabla 1.

En relación con la metodología que los autores declaran en el artículo se ha detectado que en muchas ocasiones confunden el tipo de metodología con el marco teórico que utilizan para hacer la investigación. Por ejemplo, es frecuente señalar que siguen la metodología APOE pero esto no es una metodología de investigación es una teoría de aprendizaje. Otro ejemplo es cuando solo indican que siguen la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). En otras ocasiones lo que se indica es las técnicas o instrumentos, por ejemplo, se analizan los videos y las producciones de los participantes.

Tabla 3. *Nivel de alcance de la investigación.*

Nivel académico	% en *AIEM*	% en *PNA*	% Global
Universidad	55,00	42,86	47,92
Secundaria	10,00	35,72	25,00
Primaria	25,00	10,71	16,67
Infantil	5,00	10,71	8,33
Primaria y secundaria	5,00	0,00	2,08
Total	100,00	100,00	100,00

Por tal motivo, luego de la lectura del artículo optamos por adscribir la metodología a cuatro tipos diferentes, tal como se presenta en la tabla 4. La metodología predominante es la cualitativa (72,92%) (Tabla 4). En la revista *PNA* no se han publicado artículos de carácter teórico mientras que en *AIEM* estos representan el 15%.

Tabla 4. *Metodologías utilizadas en la investigación en Educación Matemática.*

Tipo Metodología	% en *AIEM*	% en *PNA*	% Global
Cualitativa	60,00	82,14	72,92
Cuantitativa	15,00	10,72	12,5
Mixta: cualitativa y cuantitativa	10,00	7,14	8,33
Reflexión teórica	15,00	0,00	6,25
Total	100	100	100

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esta investigación ha permitido la disparidad metodológica en los artículos analizados y ciertas carencias comunicativas de cada uno de los aspectos de la metodología utilizada en las investigaciones.

Los resultados acerca del tipo de población estudiada reflejan en cierta medida una situación similar a la ya reseñada por Köhler et al. (2017). Ellos señalan que, en muchos casos, los datos se recogen en un aula, por ejemplo, de estudiantes de Master of Business Administration (MBA), estudiantes universitarios o participantes en una clase de educación ejecutiva). Enfatizan que, sin embargo, es obvio que la recogida de datos se llevó a cabo como parte de la labor docente habitual, y no como una investigación planificada a propósito. Esto genera ciertas dudas sobre la objetividad y la reproductibilidad de la investigación.

El resultado está en concordancia con lo señalado por Maz-Machado (2018) quien indica que en el 90% de los estudios en EM los investigadores recurren a una muestra intencional como es la de sus propios alumnos. Como la mayoría son profesores universitarios, esto hace que el nivel académico de las investigaciones sea de tipo universitaria.

En el 8,33% de los artículos no se indica el tamaño de la muestra, de estos la mitad corresponden a estudios teóricos. Este porcentaje es más bajo que el 26,4% hallado por

Godino et al. (2011) para las comunicaciones de EM en los simposios españoles de la SEIEM.

La descripción somera y genérica que se hace de los instrumentos de toma de datos (Por ejemplo, análisis de videos, análisis de producciones escritas, etc.) pone en tela de juicio los criterios de validez y fiabilidad de algunas de las investigaciones publicadas en las revistas analizadas.

En cuanto a la metodología se evidencia el predominio cualitativo 72,92%, este porcentaje es mayor que el 50% hallado por Hart et al. (2009), para un conjunto de seis revistas internacionales de EM y el 34,69% presente en los congresos SEIEM (Godino et al., 2011).

Concluimos que pueden ser mejorables las descripciones metodológicas que se indican en los artículos publicados en las revistas analizadas, esto no es solo responsabilidad de los autores sino también de los revisores y editores quienes son los encargados de velar por el rigor en el informe de las investigaciones que se publican.

Queda abierta una línea de trabajo en la que se sigue, ampliando no solo la muestra sino el espacio temporal, así como el análisis de otros aspectos metodológicos.

REFERENCIAS

Bracho, R., Maz-Machado, A., Gutiérrez-Arenas, M. P., Torralbo-Rodríguez, M., Jiménez-Fanjul, N., & Adamuz Povedano, N. (2012). La investigación en Educación Matemática a través de las publicaciones científicas españolas. Revista española de documentación científica, 35(2), 262-280. https://doi.org/10.3989/redc.2012.2.870.

Bruer, J. T. (1982). Methodological rigor and citation frequency in patient compliance literature. *American Journal of public health, 72*(10), 1119-1123.

Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín et al (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp. 12-32). Ciudad Real: SEIEM.

Condliffe, E. (2000). *An elusive science: The troubling history of education research*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Cook B. G., Tankersley M. & Landrum T. J. (2009). Determining evidence-based practices in special education. *Exceptional Children*, 75, 365–383. https://doi.org/10.1177/001440290907500306.

Duffin, J., & Simpson, A. (2000). When does a way of working become a methodology? *The Journal of Mathematical Behavior*, *19*(2), 175-188. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00043-2.

Eisenhart, M. (2005). Science plus: A response to the responses to scientific research in education. *Teachers College Record, 107*(1), 52-58.

Eisenhart, M., & Towne, L. (2003). Contestation and change in national policy on “scientifically based” education research. *Educational Researcher, 32*(7), 31-38. https://doi.org/10.3102/0013189X0320070.

Ernest, P. (1998). The epistemological basis of qualitative research in mathematics education: a Postmodern perspective. En A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics education* (Vol. Monograph No. 9, pp. 22–39). Reston, VA:

National Council of Teachers of Mathematics.

Godino, J. D., Yañez, J. C., Castro, W. F., Zabalza, E. L., Catalán, M. C. M., y Wilhelmi, M. R. (2011). Métodos de investigación en educación matemática: Análisis de los trabajos publicados en los simposios de la SEIEM (1997-2010). In *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 33-50). Ciudad Real: SEIEM.

Harley, B., & Cornelissen, J. (2022). Rigor with or without templates? The pursuit of methodological rigor in qualitative research. *Organizational Research Methods*, *25*(2), 239-261. https://doi.org/10.1177/1094428120937786.

Hart, L. C., Swars, S. L. & Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, *3*(1), 26-41. https://doi.org/10.1177/15586898083257.

Houston, M. B. (2019). Four facets of rigor. *Journal of the Academy of Marketing Science*, 47, 570-573. https://doi.org/10.1007/s11747-019-00665-7.

Köhler, T., Landis, R. S., & Cortina, J. M. (2017). From the editors: Establishing methodological rigor in quantitative management learning and education research: The role of design, statistical methods, and reporting standards. *Academy of Management Learning & Education*, *16*(2), 173-192. https://doi.org/10.5465/amle.2017.0079.

Labaree D. F. (2004). *The trouble with ed schools.* New Haven, CT: Yale University Press.

Macroberts, M. H., & Macroberts, B. R. (1996). Problems of citation analysis. *Scientometrics*, *36*(3), 435-444.

Maz-Machado, A. (2018). Investigando en el aula de matemáticas con los maestros en formación. En Rodríguez, A. y otros (Eds.): *Livro de Atas do EIEM 2018, Encontro em Investigação em Educação Matemática* (pp. 27-37). Coimbra: EIEM.

Özkaya, A. (2018). Bibliometric Analysis of the Studies in the Field of Mathematics Education. *Educational Research and Reviews*,*13*(22), 723-734. https://doi.org/10.5897/ERR2018.3603.

Reinhardt, A., Kreiner, G., Gioia, D., & Corley, K. (2018). Conducting and publishing rigorous qualitative research. In C. Cassell, A. Cunlife, & G. Grandy (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative business and management research methods* (Vol. 1, pp. 515-532). SAGE

Rinia, E. J., Van Leeuwen, T. N., Bruins, E. E. W., Van Vuren, H. G., & Van Raan, A. F. J. (2002). Measuring knowledge transfer between fields of science. *Scientometrics*, *54*(3), 347-362. https://doi.org/10.1023/A:1016078331752.

Rodríguez-Faneca, C., Pedrosa-Jesús, C. y Cuida, A. (2021). Educación matemática en Iberoamérica: Un estudio bibliométrico en SSCI. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *4*(2), 40-53

Trainor, A. & Graue, E. (2014). Evaluating rigor in qualitative methodology and research dissemination. *Remedial and Special Education*, *35*(5), 267-274. https://doi.org/10.1177/07419325145281.

Vallejo, M., Fernández-Cano, A., y Torralbo, M. (2006). Patrones de citación en la investigación española en educación matemática. *Revista española de documentación científica*, *29*(3), 382-397

Alexander Maz-Machado
Universidad de Córdoba, España
ma1mamaa@uco.es

Juan Carlos Melero-Bolaños
Universidad de Córdoba, España
z12meboj@uco.es

Miguel Ernesto Villaraga-Rico
Universidad del Tolima, Colombia
mevillar@ut.edu.co

María Josefa Rodríguez Baiget
Universidad de Córdoba, España
m62robam@uco.es

ISSN: 2603-9982

Alsina, Á. y García-Alonso, I. (2023). La estadística y la probabilidad y su didáctica en la formación inicial de maestros en España. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 6*(2), 11-27

LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD Y SU DIDÁCTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS EN ESPAÑA

Ángel Alsina, Universidad de Girona, España

Israel García-Alonso, Universidad de La Laguna, España

Resumen

Se muestra una panorámica general acerca de presencia de la estadística y la probabilidad y su didáctica en la formación inicial de docentes de infantil y primaria en España. Para ello, se ha realizado un primer análisis descriptivo-comparativo a partir de las guías docentes de las 39 universidades públicas españolas que ofrecen los grados de maestro. Los resultados muestran: a) en el grado de infantil, está presente en 11 universidades (28.2%); mientras que, en el grado de primaria, aparece en 33 universidades (86.8%); b) tiende a ofrecerse en asignaturas que incluyen otros contenidos; y c) predomina la formación didáctica frente a la disciplinar, con cierto desajuste respecto a la investigación. Se concluye que es necesario repensar y mejorar el panorama actual, considerando que estamos en una sociedad de la información en la que se necesita una ciudadanía con formación sólida en este campo.

Palabras clave: *Formación inicial del profesorado de Matemáticas; Didáctica de la Estadística y la Probabilidad; Educación Infantil; Educación Primaria.*

Statistics and probability and their pedagogy in pre-service teacher education in Spain

Abstract

A general overview of the presence of statistics and probability and their pedagogy in pre-service early childhood and primary teacher education in Spain is presented. For this purpose, a first descriptive-comparative analysis has been carried out on the basis of the teaching guides of the 39 Spanish public universities that offer teaching degrees. The results show: a) it is present in 11 universities (28.2%) for the early childhood education degree, while it appears in 33 universities (86.8%) for the primary education degree; b) it tends to be offered in subjects that include other contents; and c) pedagogy training predominates over disciplinary training, with a certain imbalance with respect to research. It is concluded that it is necessary to rethink and improve the

Recibido: 28/06/2023; Aceptado: 29/08/2023

current panorama, considering that we are in an information society in which a citizenry with solid training in this field is needed.

***Keywords**: Pre-service mathematics teacher education; Statistics and Probability; Early Childhood Education; Primary Education*.

INTRODUCCIÓN

Durante los primeros meses del año 2023, la formación inicial del profesorado de matemáticas de las etapas de infantil y primaria en España ha estado inmersa en un intenso debate, debido principalmente a la transición entre la legislación universitaria de 2007 que establece los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de maestro en estas etapas (ORDEN ECI/3854/2007 y ORDEN ECI/3857/2007) y la nueva legislación. En los primeros borradores publicados en febrero de 2023, que afortunadamente han sido paralizados por la falta de consenso en las Facultades de Educación, se pusieron de manifiesto varias amenazas para la enseñanza de la Matemática y su didáctica: por un lado, en el caso de la formación inicial de docentes de educación infantil, se detectaron lagunas importantes como la falta de explicitación del primer ciclo (0-3) o la falta de contemporaneidad en la descripción de la formación; por otro lado, en el caso de primaria, se puso de manifiesto una distancia abismal entre lo que deberían aprender los futuros docentes durante la formación inicial y lo que deberían enseñar en la escuela, pues el Ministerio de Universidades determinaba una formación obligatoria en torno a la Matemática y su didáctica de 6 créditos de un total de 240 créditos (es decir, un 2.5% de la formación), mientras que el Ministerio de Educación y Formación Profesional, a través del Real Decreto 157/2022, establece una dedicación a la materia de Matemática de entre 180 y 185 horas anuales (17.4% y 17.9% del total de horas lectivas).

El análisis objetivo de estas amenazas debería dar lugar, como ya se ha producido y se sigue produciendo en el marco de organizaciones estatales y autonómicas de profesorado de matemáticas y de personas investigadoras en educación matemática, a una profunda reflexión sobre qué formación en Matemática y su didáctica debe recibir el futuro profesorado durante la formación inicial para poder ejercer su profesión de manera óptima y en sintonía con las directrices curriculares contemporáneas. Con ello, se podría complementar el debate iniciado por diversos organismos y autores para mejorar la situación actual (e. g., Alsina, 2020a; Blanco et al., 2022; López Beltrán et al., 2020).

En este artículo se asume que, para contribuir a este debate y promover posibles mejoras a través de agendas para la acción, declaraciones de posición, manifiestos, etc., es imprescindible tener diagnósticos claros sobre la situación actual de la formación inicial del profesorado de matemáticas de infantil y primaria en España. En los últimos años, Alsina (2020b) y Nolla et al. (2021), por ejemplo, han analizado la presencia de la Matemática y su didáctica en la formación del futuro profesorado de infantil en las universidades españolas, concluyendo en ambos casos que la moda de créditos obligatorios es 6 (2,5% del total de la formación), insuficientes para una formación completa de los docentes de matemáticas en educación infantil. En el caso de primaria, si bien la moda de créditos es de 18 créditos, un 7.5% de la formación, la conclusión es similar. Blanco (2001) ya señaló que la formación en Matemática y su didáctica que apenas alcanzaba el 8% de la carga lectiva total, lo que a criterio del autor "mostraba la progresiva desaparición de la Educación Matemática en los planes de estudio en la formación inicial del profesorado de Primaria, con la repercusión que esta situación tendrá en la educación primaria en un futuro inmediato" (p. 412).

Los datos de estos estudios descriptivos-comparativos, si bien son necesarios porque aportan una panorámica general muy elocuente, no profundizan en el análisis de los programas de las asignaturas, los temas que se tratan, etc. En este sentido, este nuevo estudio explora la presencia de la estadística y la probabilidad en los planes de estudio de los Grados de Maestro de Educación Infantil (MEI) y de Educación Primaria (MEP) en España, como mínimo por tres razones distintas: primero, porque existe abundante literatura que señala la necesidad de alfabetizar a la ciudadanía en estadística y probabilidad, para disponer de conocimientos y herramientas que permitan interpretar críticamente los datos y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre (Gal, 2002, 2005); segundo, porque los estudios en torno al conocimiento del profesorado para enseñar estadística y probabilidad revelan que es escaso o incluso nulo (Franco y Alsina, 2022); y, tercero, porque las directrices curriculares internacionales, como por ejemplo el NCTM (2003), apuestan por la introducción de estos conocimientos desde edades tempranas. Por esta razón, en España, el CEMat (2021) propone el desarrollo del sentido estocástico desde educación infantil y por supuesto durante toda la primaria, al igual que diversos autores como Alsina (2021), Batanero et al. (2021) o Rodríguez-Muñiz et al. (2021), entre otros.

Considerando estos antecedentes, el objetivo de este estudio es analizar la presencia de la estadística y la probabilidad y su didáctica en los Grados de MEI y MEP en España. Para obtener un primer panorama, se analizan las guías docentes de asignaturas de Matemática y su didáctica de todas las universidades públicas españolas que imparten estos grados.

MARCO TEÓRICO

Vivimos en la sociedad de la información, en la que recibimos constantemente una gran avalancha de datos que pueden ser irrelevantes o fácilmente manipulados (Alsina, 2017), lo que requiere más que nunca una ciudadanía formada para poder hacer un ejercicio crítico y un uso cauteloso de estos datos, junto con tomar decisiones en situaciones de incertidumbre (e. g., Alsina, 2017, 2021; Alsina et al., 2021; Bargagliotti, 2020; Batanero, 2019; Contreras y Molina-Portillo, 2019; Franklin et al., 2007; Gal, 2002, 2005).

Para lograr este propósito, necesitamos un profesorado bien preparado que desarrolle una enseñanza eficaz de la estadística y la probabilidad (Alsina y Vásquez, 2017), lo cual "requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien" (NCTM, 2003). Esto exige al profesorado: a) conocer y comprender en profundidad los conocimientos matemáticos que enseñan; b) conocer y comprender en profundidad al alumnado y, en especial, sus necesidades y posibilidades de aprendizaje; c) conocer y comprender en profundidad los recursos y estrategias docentes más adecuadas para llevar a cabo la enseñanza; y d) conocer y comprender en profundidad las formas de evaluar los conocimientos más acordes con los recursos y estrategias docentes usadas para llevar a cabo la enseñanza. En definitiva, pues, para llevar a cabo una enseñanza eficaz es preciso que el profesorado disponga de un amplio abanico de conocimientos disciplinares y didácticos que permitan alfabetizar en estadística y probabilidad al alumnado, es decir, que promuevan el uso de estos conocimientos en diversidad de situaciones donde sean necesarios (Alsina y Vásquez, 2017). Sin embargo, los estudios realizados con futuros docentes revelan que tienen un escaso conocimiento para enseñar estadística y probabilidad (Franco y Alsina, 2022; Gorham y Chamberlin, 2019).

Por una parte, en relación a la estadística, se ha identificado un escaso conocimiento especializado (Arteaga et al., 2012). De forma más concreta, diversos estudios han puesto de manifiesto dificultades y errores en conceptos como la media, la mediana, la moda y el muestreo (Estrada et al., 2004); en la lectura de gráficos sencillos (Alacaci et al., 2010); y en la construcción de gráficos estadísticos (Arteaga et al., 2016). Asimismo, se han identificado dificultades en la comparación de la dispersión o la identificación de valores atípicos (Rivas et al., 2013).

Por otra parte, en los estudios realizados acerca del conocimiento para enseñar probabilidad, los futuros maestros muestran dificultades en diferentes aspectos, como por ejemplo la identificación de un suceso más probable, los significados de la probabilidad, los sesgos de la equiprobabilidad, la heurística de la representatividad o el hecho de calcular una probabilidad (Batanero et al., 2012; Contreras et al., 2011; Fernández et al., 2016; Gea y Fernandes, 2018; Gómez et al., 2014; Kurt y Coskuntuncel, 2020). Asimismo, algunos estudios han puesto de manifiesto dificultades en la construcción de inferencias o bien en la lectura de una tabla de dos factores con la que construir una probabilidad (de Vetten et al., 2009; Estrada y Batanero, 2006).

Cabe destacar que la inmensa mayoría de estos estudios se han realizado con futuros docentes de primaria, debido probablemente a que no es hasta el siglo XXI cuando se avanza la edad de introducción de estos conocimientos hasta los 3 años (NCTM, 2003). En cualquier caso, y como ya se ha señalado, los resultados de todos los estudios revisados señalan que el conocimiento de los futuros y las futuras maestras para enseñar estadística y probabilidad es deficiente, por lo que es necesario reforzar la formación y promover un cambio en las creencias y actitudes de los futuros docentes (Chick y Pierce, 2008; Estrada y Batanero, 2020; Ortiz et al., 2007; Ruz et al., 2020; Vásquez et al., 2019). Con base en estos antecedentes, a continuación, se analiza la presencia de la estadística y la probabilidad y su didáctica en la formación inicial de maestros en España. Como se ha señalado, para obtener una primera panorámica acerca de qué se enseña y cuánto tiempo se dedica, se analizan las guías docentes de asignaturas de Matemática y su didáctica de todas las universidades públicas españolas que imparten los grados de MEI y MEP.

METODOLOGÍA

Este estudio se realiza mediante un análisis no experimental de tipo descriptivo-comparativo (McMillan y Schumacher, 2001). El análisis aborda la presencia y características de la formación en estadística y probabilidad y su didáctica que muestran las guías docentes de las universidades públicas españolas en las que se ofertan los Grados de MEI o MEP.

Muestra

Para seleccionar la muestra de análisis se ha partido del listado de universidades públicas españolas que ofrece el Ministerio de Universidades. A continuación, mediante una búsqueda sistemática de información se han seleccionado aquellas universidades que ofrecen titulaciones de MEI o MEP (Tabla 1).

Tabla 1. *Universidades públicas españolas que imparten los grados de MEI y MEP en el curso 2022/23.*

CCAA	UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA	UAL
	UCA
	UCO
	UGR
	UHU
	UJAEN
	UMA
	US
ARAGÓN	UNIZAR
PRINCIPADO DE ASTURIAS	UNIOVI
ILLES BALEARS	UIB
CANARIAS	ULL

	ULPGC
CANTABRIA	UNICAN
CASTILLA Y LEÓN	UBU
	UNILEON
	USAL
	UVA
CASTILLA-LA MANCHA	UCLM
CATALUNYA	UAB
	UB
	UdG
	UdL
	URV
COMUNITAT VALENCIANA	UA
	UJI
	UV
EXTREMADURA	UNEX
GALICIA	UDC
	USC
	UVIGO
LA RIOJA	UNIRIOJA
COMUNIDAD DE MADRID	UAH
	UAM
	UCM
	URJC
REGIÓN DE MURCIA	UM
COMUNIDAD FORAL DE NAVARRA	UPNA
EUSKAL HERRIA	EHU

A continuación, se ha procedido a identificar las asignaturas de los grados de infantil y primaria de las universidades de la Tabla 1 que abordan la estadística y la probabilidad y su didáctica. Considerando nuestro objetivo, se ha procedido a analizar las guías docentes, pues según se indica en el Real Decreto 822/2021 de 28 de septiembre, por el que se establece la organización de las enseñanzas universitarias y del procedimiento de aseguramiento de su calidad:

> La guía docente de cada materia o asignatura que forma parte del plan de estudios de un título universitario oficial de Grado o Máster Universitario, de acuerdo con la normativa de cada universidad, recogerá las actividades académicas teóricas y prácticas y el sistema de evaluación del aprendizaje programado. Estas guías docentes deberán ser accesibles al estudiantado previamente al periodo oficial de matrícula, en la forma en la que se establezca en las normativas académicas del centro o de la universidad (p. 119544).

De este modo, se ha realizado una selección intencional que ha dado lugar a una población formada por 52 asignaturas de las 39 universidades públicas españolas con Grados de MEI y MEP que abordan la estadística y la probabilidad y su didáctica. En consecuencia, las unidades de análisis del estudio son 52 guías docentes.

En concreto, en cada unidad de análisis se han identificado las siguientes características descriptivas:

- Universidad y Grado: se informa, adicionalmente, la comunidad autónoma en la que se desarrolla.
- Información del plan de estudios: se informa de las características que presenta la materia dentro del plan de estudios en el que se encuentra. Esta información recopila el nivel, cuatrimestre y créditos ECTS de la materia.

- Didáctico / Disciplinar: se informa del enfoque de la asignatura.
- Contenido: se informa de los temas que refleja el contenido, especificando si incluye estadística (E), probabilidad (P) o ambas (EyP).

Procedimiento de análisis

Una vez seleccionadas las unidades de análisis, se han extraído los datos de las características descriptivas, algunas de las cuales requieren la realización de un proceso de carácter deductivo. Mediante este proceso, se han identificado las referencias o alusiones a aspectos didácticos presentes en la denominación de las asignaturas, así como en los contenidos relacionados en las guías docentes.

El proceso de codificación ha sido el siguiente:

- Se han codificado las características antes descritas en cada una de las unidades de análisis.
- Se ha calibrado la codificación, por medio de sesiones de codificación conjunta y discusión de los desacuerdos.
- Se han obtenido los datos y se han registrado en una planilla Excel para su posterior análisis.
- Se han seleccionado ejemplos específicos para cada una de las características.

RESULTADOS

A continuación, se muestran los datos del análisis de las guías docentes seleccionadas, para cada grado.

Grado de Maestro de Educación Infantil

De las 39 universidades públicas que ofrecen el Grado de MEI, en 11 de ellas (28.2%) se han identificado guías didácticas que incluyen la estadística y probabilidad y su didáctica (Tabla 2).

Tabla 2. *Estadística y probabilidad y su didáctica en las guías docentes del Grado de MEI*.

CCAA	**UNIVERSIDAD**	**GRADO INFANTIL**					
		NIVEL	**CUAT**	**ECTS**	**DISCIP**	**DIDAC**	**Total***
ANDALUCÍA	UAL	3	AN	9		X	9
ILLES BALEARS	UIB	3	C1	6		X	6
CANARIAS	ULPGC	3	C1	7.5	X	X	13.5
CASTILLA-LA MANCHA	UCLM	2	C1	6		X	12
CATALUNYA	UAB	4	C1	4		X	8
	UB	3	AN	9		X	15
	UdG	2	C1	5		X	5
	UdL	3	C1	6		X	6
	URV	2	C1	6		X	18
COMUNITAT VALENCIANA	UV	2	AN	9	X		15
		4	C1	6		X	
COMUNIDAD DE MADRID	URJC	3	C1	6		X	16.5

*Créditos totales dedicados al estudio de las matemáticas en el Grado MEI. Fuente: Nolla et al. (2021)

Cabe destacar que, en sólo dos comunidades autónomas (Catalunya y Castilla-La Mancha), todas las universidades públicas abordan la estadística y la probabilidad y su didáctica en el Grado de Maestro de Educación Infantil. Además, en el caso de Catalunya, las cinco universidades públicas recogen esta formación en sus guías didácticas.

Seguidamente, se ha analizado la denominación de las asignaturas, observando que en la mayoría se utiliza el término *didáctica*, *enseñanza* o *aprendizaje*. Con menor frecuencia, se utiliza el término *pensamiento matemático* (Tabla 3).

Tabla 3. *Denominaciones de las asignaturas del Grado de MEI.*

El título contiene…	**Nº de GD**
Didáctica	4
Enseñanza o aprendizaje	3
Pensamiento matemático	2
Prácticas matemáticas	1
Matemáticas	1

El análisis del enfoque de las materias muestra, pues, mayor frecuencia del enfoque didáctico. Se ha identificado que la UV ofrece una materia con enfoque disciplinar y en la ULPGC la asignatura que trata la estadística y la probabilidad lo hace con enfoque didáctico-disciplinar (Figura 1).

UV Matemáticas para maestros (traducido del valenciano)	4. La estadística y la probabilidad (tratamiento de informaciones sujetas al azar) 4.1 El proceso estadístico. 4.2 Organización de la información estadística. Tablas y gráficos. 4.3 Tratamiento de datos. Medidas de centralización y de dispersión. 4.4 El concepto de probabilidad. Medida de probabilidades. 4.5 Dependencia e independencia de sucesos. Probabilidad condicionada. 4.6 Resolución de problemas de probabilidad.
ULPGC Matemáticas y su Didáctica II	BLOQUE 3. ESTADÍSTICA, AZAR Y PROBABILIDAD Y SU DIDÁCTICA. Tema 5. Estadística descriptiva. Introducción al Azar y Probabilidad. Tema 6. Tratamiento de la información en la Educación Infantil: Aspectos teóricos y prácticos sobre su enseñanza y aprendizaje.

Figura 1. Extracto de la guía docente de la UV y la ULPGC. Fuente: Webs oficiales.

En general, las guías ofrecen en su apartado de "contenidos" un listado de temas a desarrollar. Algunas guías docentes, como por ejemplo las de UB, UdG, URJC y UV, muestran los conceptos seleccionados con más detalle: conceptos estadísticos, análisis de organización de la información, recursos y estrategias, materiales o estudio del sentido estadístico (Figura 2).

UB Didáctica de las Matemáticas	2. Contenidos matemáticos del currículo de matemáticas de los 0 a los 6 años 2.3. Estadística y probabilidad. Conceptos estadísticos: población, muestra, individuo, media, moda, etc. Organización de la información: análisis de datos, predicción, razonamiento durante y después del proceso, etc. Combinatoria e introducción al azar. Actividades y materiales para llevar a cabo en la guardería y el parvulario. Análisis de actividades didácticas
UdG Aprendizaje de las Matemáticas (traducido del original)	6. La estadística y la probabilidad de los 3 a los 6 años 6.1. La estadística y la probabilidad: contenidos e indicadores de evaluación. 6.2. Recursos y estrategias para trabajar la estadística y la probabilidad.
URJC Didáctica de las Matemáticas	4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Tema 7. Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Los conceptos infantiles sobre el azar y la probabilidad. Medidas para el tratamiento de la información. Diseño, estudio y análisis de situaciones didácticas. Recursos y materiales didácticos para el tratamiento de la información y la probabilidad.
UV Didáctica de las Matemáticas de la Educación Infantil (traducido del original)	8. Aproximación al análisis de datos y a la probabilidad - La producción de sentido estadístico a partir del contexto - La recopilación y representación de los datos - Iniciando la interpretación de datos - Nociones básicas de probabilidad

Figura 2. Extracto de los contenidos mostrados en las guías docentes de UB, UdG, URJC y UV. Fuente: Webs oficiales.

Un análisis en detalle de los descriptores de la Figura 2 muestra que: a) a partir de la información disponible, no es posible identificar los créditos que se dedican a la estadística y la probabilidad y su didáctica, pero se observa que, en la mayoría de los casos, es un tema más o parte de un tema, según la universidad; b) en el caso de la estadística, la información de las guías docentes es detallada, llegando algunas universidades (como UB) a agregar conocimientos centrados en estadística descriptiva; otras guías centran el conocimiento didáctico en la secuenciación de contenidos y criterios de evaluación (UdG) y, en todas ellas, estudian recursos para promover la enseñanza de estos contenidos. Cabe destacar que el estudio de las fases del ciclo de investigación estadística se realiza en dos universidades (UB y UV); c) en el caso de la probabilidad, la información es mucho menos precisa.

Grado de Maestro de Educación Primaria

En cuanto al Grado de MEP, la estadística y la probabilidad y su didáctica está presente en más universidades que en el Grado de MEI: se han identificado 43 guías docentes que corresponden a 33 universidades (86,8%), aunque aún sigue habiendo 9 universidades que no consideran este conocimiento (Tabla 4).

Tabla 4. *Estadística y probabilidad y su didáctica en las guías docentes del Grado de MEP.*

CCAA	UNIVERSIDAD	GRADO PRIMARIA					
		NIVEL	CUAT	ECTS	DISCIP	DIDAC	Total*
ANDALUCÍA	UAL	3	AN	9		X	24
	UCO	1	C2	6	X		18
		3	C1	6		X	
	UGR	2	C2	6		X	22
	UHU	3	C1	6		X	21
	UJAEN	4	C1	6		X(EyP)	18

	UMA	4	C2	6		X	21
	US	1	AN	9	X		18
PRINCIPADO DE ASTURIAS	UNIOVI	3	AN	6	X	X	18
ILLES BALEARS	UIB	1	C2	6		X	18
		2	C2	6	X		
CANARIAS	ULL	2	C2	6	X		20
		3	C1	8		X	
	ULPGC	4	C1	6	X	X(EyP)	19
CATALUNYA	UAB	1	C2	6		X	17
		4 (OP)	C1	6	X		
	UdG	3	C1	5		X	16
	UdL	3	AN	6		X	18
CASTILLA Y LEÓN	USAL	4	C1	6		X(EyP)	18
	UVA	4	C1	6	X	X	18
CASTILLA-LA MANCHA	UCLM	1	AN	9	X		18
CATALUNYA	UAB	1	C2	6		X	17
		4 (OP)	C1	6	X		
	UdG	3	C1	5		X	16
	UdL	3	AN	6		X	18
COMUNITAT VALENCIANA	UJI	3	AN	10		X	18
		4 (OP)	C2	6		X	
	UV	2	AN	9	X		21
		4	C1	6		X	
EXTREMADURA	UNEX	3	C2	6		X	18
GALICIA	UDC	2	C2	6		X	18
	USC	4	C1	6		X	18
	UVIGO	2	C2	6	X	X	12
LA RIOJA	UNIRIOJA	1	C2	6	X(E)		18
		3	C1	6		X(P)	
COMUNIDAD DE MADRID	UAH	3	C1	6	X		18
	UCM	4	C1	6	X	X	18
	URJC	3	C1	6	X	X	18
REGIÓN DE MURCIA	UM	2	AN	12	X	X	21
		3	AN	9	X	X	
COMUNIDAD FORAL DE NAVARRA	UPNA	3	C1	6	X	X(P)	18
		3	C2	6		X(E)	
EUSKAL HERRIA	EHU	3	C1	9	X	X	15

* Créditos totales dedicados al estudio de las matemáticas en el Grado MEP. Fuente: Nolla et al. (2021)

El análisis del enfoque de las materias (didáctico o disciplinar) a través de la denominación utilizada muestra, por un lado, que las materias con enfoque didáctico se denominan con *matemáticas y su didáctica* o bien *didáctica de la matemática* o algún contenido en particular. También utilizan términos como *enseñanza y aprendizaje*, *lenguaje o educación,* aunque con menor frecuencia. Las materias optativas utilizan *taller* o *juegos* en su denominación. Por otro lado, las materias con enfoque disciplinar directamente se denominan *matemáticas* o bien agregan el término *fundamentos* o el contenido a estudiar, aunque esto se ha identificado sólo en dos guías docentes (Tabla 5).

Tabla 5. *Denominaciones de las asignaturas del Grado de MEP.*

El título contiene…	**Nº de guías**
Matemáticas y su didáctica	11
Didáctica	10
Enseñanza y aprendizaje	4
Educación	1
Lenguaje	1

Juegos / Taller (optativas)	2
Matemáticas	9
Fundamentos de la matemática	1
Tratamiento de la información y azar	1

En total, se han localizado 29 guías docentes con enfoque didáctico y 11 con enfoque disciplinar. Atendiendo a la dedicación empleada en las asignaturas con enfoque didáctico, a partir de la información proporcionada por dichas guías se ha podido analizar si la estadística y la probabilidad se aborda de forma exclusiva o con otros ejes de contenido. Dicho análisis ha permitido identificar tres asignaturas en las que se aborda de forma exclusiva: UJAEN, ULPGC, USAL. En el resto, se aborda junto con otros ejes de contenido: principalmente con aritmética, geometría o medida (Tabla 6).

Tabla 6. *Ejes de contenido matemático que se abordan junto con la estadística y la probabilidad y su didáctica.*

Contenidos que aparecen en la guía…	**Nº de guías**
Aritmética	7
Geometría	4
Medida	3
Resolución de Problemas	3
Aritmética y Medida	1
Medida y Geometría	3
Aritmética, Medida y Geometría	3

Se destaca el enfoque dado en la guía de UMA que, bajo la denominación de Didáctica de la Medida, realiza el estudio de la probabilidad como medida de la incertidumbre (Figura 3).

UMA Didáctica de la Medida	TEMA 3.- Didáctica de las Medidas relacionadas con el análisis de datos y el pensamiento estadístico elemental 3.1.- Incertidumbre. Finalidad del análisis de datos y de la gestión y el tratamiento de la información: disminuir la incertidumbre 3.4.- Medidas estadísticas TEMA 4.- Didáctica de la Medida de la Incertidumbre, el Azar y la Probabilidad 4.5.- La medida de la incertidumbre, el azar y la intuición probabilística en el currículo de Educación Primaria. Orientaciones didácticas. 4.6.- El aprendizaje de la medida de la incertidumbre, el azar y la intuición probabilística en Educación Primaria. Complejidad, dificultades y errores. Desarrollo de competencias básicas y matemáticas específicas.

Figura 3. Extracto de la GD de UMA. Fuente: Web oficial.

Finalmente, igual que en el Grado de MEI, la mayoría de guías muestran los títulos de los temas, sin concretar las ideas fundamentales y tipos de razonamiento a considerar. A modo de contraejemplo, la guía docente de UNIOVI concreta los temas a desarrollar, todos ellos vinculados con resultados de la investigación (Figura 4): transnumeración, ciclo de investigación estadística, errores y dificultades en la lectura y construcción de gráficos estadísticos, significados de la probabilidad, sesgos de la probabilidad, etc.

UNIOVI Matemáticas y su Didáctica III	1. Estadística y tratamiento de la información. Evolución histórica, tipos de variable estadística, recolección, clasificación y organización de datos, representaciones manipulativas y gráficas, medidas de centralización y de dispersión. Ciclo de investigación estadística, niveles de lectura de gráficos estadísticos, procesos de transnumeración, construcciones de las medidas de centralización y dispersión en la secuencia CPA, errores y dificultades en el aprendizaje de los gráficos estadísticos y las medidas de dispersión y de centralización, materiales y recursos para la enseñanza de la estadística descriptiva, análisis de libros de texto, creencias y actitudes hacia la estadística, conocimiento del currículo de estadística de Primaria, diseños curriculares, elaboración y evaluación de unidades didácticas de estadística. 2. Azar y probabilidad. Evolución histórica, experimentos aleatorios, definiciones de probabilidad, experimentos simples y compuestos, determinación y cálculo de probabilidades, diagramas de árbol y tablas de contigencia, conexiones entre estadística y probabilidad. Lenguaje de la probabilidad, significados de la probabilidad, probabilidad como medida, probabilidad condicionada en Primaria, la secuencia CPA en probabilidad, errores y dificultades en el aprendizaje de la probabilidad, materiales y recursos para la enseñanza de la probabilidad, análisis de libros de texto, creencias, actitudes y sesgos hacia la probabilidad, conocimiento del currículo de probabilidad de Primaria, diseños curriculares, elaboración y evaluación de unidades didácticas de probabilidad.

Figura 4. Extracto de la guía docente de UNIOVI. Fuente. Web oficial.

CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio se ha analizado la presencia de la estadística y la probabilidad y su didáctica en la formación inicial del profesorado de infantil y primaria en España. Para obtener un primer panorama, se han analizado las guías docentes de asignaturas de Matemática y su didáctica de todas las universidades públicas españolas que imparten estos grados.

A partir del análisis descriptivo-comparativo realizado, los datos del Grado de MEI han evidenciado que, de las 39 universidades, solo 11 (el 28.2%) incluyen en sus asignaturas la estadística y la probabilidad y su didáctica, lo que muestra que la mayoría del futuro profesorado de infantil accede a la profesión sin haber recibido formación acerca de qué contenidos y cómo enseñar y evaluar la estadística y la probabilidad en las primeras edades. Esto evidencia un desajuste bastante alarmante entre la investigación y la formación inicial del futuro profesorado de infantil en España. Como ya se ha señalado, organismos de prestigio como el NCMT (2003) o el CEMat (2021) proponen la incorporación del sentido estocástico desde los 3 años; asimismo, diversos autores argumentan la necesidad de empezar a abordar la estadística y la probabilidad desde infantil y se aportan conocimientos tanto disciplinares como didácticos para que el profesorado de esta etapa pueda llevar a cabo una enseñanza eficaz de estos conocimientos (e.g., Alsina, 2021; Batanero et al., 2021; Rodríguez-Muñiz et al., 2021). Las características del estudio realizado no han permitido identificar las causas de la poca presencia de la estadística y la probabilidad y su didáctica en la formación inicial de maestros de infantil en España; sin embargo, la escasez de créditos dedicados a la Matemática y su didáctica en infantil (Alsina, 2020; Nolla et al., 2021), probablemente obliga a los formadores a priorizar unos ejes de contenido por encima de otros.

En el Grado de MEP, el análisis realizado ha puesto de manifiesto una presencia superior de la estadística y la probabilidad y su didáctica que en el Grado de MEI, pues 33 de las 39 universidades (86.8%) lo incluyen. Sin embargo, es bastante alarmante que casi una cuarta parte de las universidades públicas españolas que ofertan el Grado de MEP no recogen en sus guías didácticas estos contenidos. La revisión de la literatura muestra que el conocimiento del futuro profesorado de primaria para enseñar estadística y probabilidad es insuficiente (Franco y Alsina, 2022). Esta deficiencia, unida a la ausencia de formación en diversas universidades, se convierten en severas amenazas para el sistema educativo español que, en la actualidad, aboga claramente por desarrollar el sentido estocástico en primaria (Real Decreto 157/2022).

En términos generales, las guías docentes de las asignaturas que abordan la estadística y la probabilidad, se prioriza el enfoque didáctico frente al disciplinar. Aunque a partir de la información que se proporciona en dichas guías no se ha podido obtener un dato exacto sobre el porcentaje de la formación en estadística y probabilidad y su didáctica, los datos analizados han evidenciado que, con frecuencia, esta formación suele convivir con el desarrollo de didácticas de otro contenido matemático, en especial la aritmética, la geometría y la medida. Esto puede ser una oportunidad si, como en el caso de la UMA, bajo el paragua de la Didáctica de la Medida, se aborda el estudio de la probabilidad como medida de la incertidumbre. Esta propuesta muestra a los futuros maestros de primaria conexiones matemáticas intradisciplinares en coherencia con lo recogido en el Real Decreto 157/2022, que presenta la probabilidad dentro del sentido de la medida.

A modo de conclusión, a partir de los datos obtenidos en este artículo se ha evidenciado que la estadística y la probabilidad y su didáctica no está todavía extendida en todos los Grados de MEI y MEP de las universidades públicas españolas. Esto puede tener una importante repercusión social, pues si los futuros docentes no reciben formación, la ciudadanía seguirá sin disponer de conocimientos para interpretar críticamente los datos y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre (Gal, 2005, 2012). Para subsanar esta situación, el estudio ha identificado algunos ejemplos de guías docentes que, por su descripción, podrían servir de modelo para incorporar la estadística y probabilidad y su didáctica en la formación inicial del profesorado de infantil y primaria en España.

La principal limitación del estudio ha sido que las guías docentes utilizadas para la obtención de datos descriptivos son una declaración de intenciones que realizan los formadores de docentes sobre la enseñanza que desean desarrollar en cada asignatura. Sin embargo, en algunos casos o bien no se concretan con precisión las ideas fundamentales y los tipos de razonamiento que se promueven, o bien dichas intenciones pueden diferir de lo que realmente se trata. Por esta razón, en el futuro será necesario realizar nuevos estudios a partir de otro tipo de fuentes de información como por ejemplo el uso de cuestionarios, que permitan profundizar acerca de las ideas fundamentales y tipos de razonamiento en torno a la estadística y la probabilidad y su didáctica que se promueven durante la formación inicial de docentes en España, sin olvidar la necesidad de reivindicar más tiempo en los planes de estudio para poder llevarla a cabo. En cualquier caso, tanto la primera panorámica descrita en este artículo como los datos más profundos que se obtengan en futuros estudios pueden servir de base para contribuir al debate ya iniciado acerca de qué formación en Matemática y su didáctica debería recibir el futuro profesorado de infantil y primaria en España (e. g., Alsina, 2020a; Blanco et al., 2022; López Beltrán et al., 2020); y más, específicamente, para repensar y mejorar la presencia de la estadística y la probabilidad y su didáctica, teniendo en cuenta que estamos en una sociedad de la información en la que se necesita una ciudadanía con formación sólida en este campo.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto ProID2021010018 Estrategia de Especialización inteligente de Canarias RIS-3 (FEDER 2014-2020).

REFERENCIAS

Alacaci, C., Lewis, S.P., O'Brien, G.E. y Jiang, Z. (2011). Pre-Service Elementary Teachers' Understandings of Graphs. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 7*, 3-14. https://doi.org/10.12973/ejmste/75171

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon, 95*, 25-48.

Alsina, Á. (2020a). Revisando la educación matemática infantil: una contribución al Libro Blanco de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 9*(2), 1-20.

Alsina, Á. (2020b). La Matemática y su didáctica en la formación de maestros de Educación Infantil en España: crónica de una ausencia anunciada. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 23*(2), 373-387.

Alsina, Á. (2021). "Ça commence aujourd'hui": alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA, 15*(4), 243-266. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.21357

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2017). Hacia una enseñanza eficaz de la estadística y la probabilidad en las primeras edades. *Didasc@lia: Didáctica y Educación, 8*(4), 199-212.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Gea, Mª. M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educação Matemática Pesquisa*, *14*(2), 279-297.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. R. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *RELIME*, *19*(1), 15-40.

Bargagliotti, B. (Ed.) (2020). Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II). American Statistical Association.

Batanero, C. (2019). Treinta años de investigación en educación estocástica: Reflexiones y desafíos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.). *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.

Batanero, C., Álvarez, R., Hernández, L. y Gea, Mª. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. *PNA, 15*(4), 267-288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L. y Contreras, J. M. (2012). Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de educación primaria. *REDIMAT*, *1*(3), 222-245.

Blanco, L. J. (2001). La educación matemática en los planes de estudio de formación de profesores de primaria. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 4*(2), 411-414.

Blanco, L. J., Climent, N., González-Astudillo, Mª, T., Moreno, A., Sánchez-Matamoros, G., de Castro, C. y Jiménez-Gestal, C. (Eds.) (2022). *Aportaciones al desarrollo del* *currículo desde la investigación en educación matemática.* SEIEM y Universidad de Granada.

Chick, H. L. y Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: Beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.) *Joing ICMI/IASE Study:Teaching statistics in school mathematics and preparing mathematics – Challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the ICMI Sudy 18 IASE Round Table Conference (1-6).* Springer. https://doi.org/10.52041/SRAP:08303

Comité Español de Matemáticas [CEMat] (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria. https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Contreras, J. M. y Molina-Portillo, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.

Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C. y Fernandes, J. A. (2011). *Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task.* Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

de Vetten, A., Schoonenboom, J., Keijzer, R. y van Oers, B. (2019). Pre-service teachers and informal statistical inference: Exploring their reasoning during a growing samples activity. En G. Burrill y D. Ben-Zvi (Eds), *Topics and Trends in Current Statistics Education Research* (pp. 639-661). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-03472-6_9

Estrada, A. y Batanero, C. (2020). Prospective Primary School Teachers' Attitudes towards Probability and its Teaching. *International Electronic Journal of Mathemathics Education, 15* (1), em0559. https://doi.org/10.29333/iejme/5941

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. Mª. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática*, *16*(1), 89-111.

Estrada, A. y Batanero, C. (2006). Computing probabilities from two way tables: an exploratory study with future teachers. ICOTS 7. https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/C413.pdf

Fernandes, J. A., Gea, M. M. y Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 178-185). SEIEM.

Franco, J. y Alsina, Á. (2022). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula Abierta*, *51*(1), 7-16. https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.7-16

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A preK-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Gea, Mª. M. y Fernandes, J. A. (2018). Conocimiento de futuros profesores de los primeros años escolares para enseñar probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *14*, 15-30. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.213

Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 209-229. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

Gorham, T. y Chamberlin, S. A. (2019). Pre-service teacher statistical misconceptions during teacher preparation program. *The Mathematics Enthusiast*, *16*(1), 461-484. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1469

Kurt, G. y Coşkuntuncel, O. (2020). Assessment of elementary mathematics teachers' probability content knowledge in terms of different meanings of probability. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *11*(3), 706-732. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.728122

López Beltrán, M., Albarracín, L., Ferrando, I., Montejo-Gámez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibaut, E. y Mallavibarrena, R. (2020). La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el bachillerato, en D. Martín, T. Chacón, F.G. Curbera, F. Marcellán y M. Siles (Eds.), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 1–94). Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A.

McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2001). *Research in Education. A conceptual introduction.* Pearson.

National Council of Teachers of Mahematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Thales.

Nolla, A., Muñoz, R., Cerisola, A. y Fernández, B. (2021). La formación inicial de los maestros en matemáticas y su didáctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 96*(36.1), 185-208. https://doi.org/10.47553/rifop.v96i35.1.85882

ORDEN ECI/3854/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado, 312,* de 29 de diciembre de 2007, pp. 53735-53738.

ORDEN ECI/3857/2007 de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 312,* de 29 de diciembre de 2007, pp. 53747-53750.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2007). Competencias de futuros profesores de Educación Primaria en la asignación de probabilidades. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 1-17). SEIEM.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52,* de 2 de marzo de 2022, pp. 24386-24504

Real Decreto 822/2021, de 28 de septiembre, por el que se establece la organización de las enseñanzas universitarias y del procedimiento de aseguramiento de su calidad. *Boletín Oficial del Estado, 233,* de 29 de septiembre de 2021, pp. 119537-119578.

Rivas, H., Godino, J. D., Arteaga, P. y Estepa, A. (2013). Desarrollo del conocimiento estadístico común y avanzado en estudiantes de magisterio. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 467-474). SEIEM.

Rivas, H., Godino, J. D. y Arteaga, P. (2018). Desarrollo de conocimientos estadísticos en futuros profesores de educación primaria a través de un proyecto de análisis de datos: posibilidades y limitaciones. *Educación Matemática, 30*(3), 83-100. https://doi.org/10.24844/em3003.04

Rodríguez-Muñiz, L., Muñiz-Rodríguez, L. y Aguilar, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas: Los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA, 15*(4), 311-338. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22511

Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. M. (2020). Actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza en futuros profesores. *Cadernos de Pesquisa, 50*, 964-980.

Vásquez C., Alvarado, H. y Ruz, F. (2019). Actitudes de futuras maestras de educación infantil hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza. *Educación Matemática, 31*(3), 177-202.

Ángel Alsina
Universidad de Girona, España
angel.alsina@udg.edu

Israel García-Alonso
Universidad de La Laguna, España
igarcial@ull.edu.es

Aguilera, M. (2023). Two-Column Demonstrations in Math Olympiad Geometry Problems: The Case of Honduras. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 6*(2), 28-52

ISSN: 2603-9982

TWO-COLUMN DEMONSTRATIONS IN MATH OLYMPIAD GEOMETRY PROBLEMS: THE CASE OF HONDURAS

Manuel Aguilera, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras

Abstract

In elementary plane geometry courses since the beginning of the 20th century, two-column demonstrations have been taught as a form of formal proof. Nevertheless, there is not much research on the use of this type of demonstrations in Mathematical Olympiad Problems. As a result, this study arises in which we analyzed Mathematics mistakes that students make when attempting to solve geometry problems in the Mathematical Olympiad before and after the implementation of two-column demonstrations in the problem-solving process. A total of 32 students from different departments of Honduras participated in the study. The place of study was the Virtual Math Competition (CVM) and the analysis is based on a method called Newman Error Analysis. In the pre-exam, the results show that students do not use two-column demonstrations for their answers, and the most common mistakes analyzed using the Newman Error are transformation, process skill, and encoding errors. On the other hand, in the final test, the use of two-column demonstrations by the students confirmed that this writing technique helps to order the information given in the problem.

Keywords: *competition, mathematics education, problem-solving, high school students, teaching methods*

Demostraciones de Doble Columna en Problemas de Geometría de las Olimpiadas de Matemáticas: El Caso de Honduras

Resumen

En los cursos elementales de geometría plana desde principios del siglo XX, las demostraciones a dos columnas se han enseñado como una forma de demostración formal. Sin embargo, no existen muchas investigaciones sobre el uso de este tipo de demostraciones en los problemas de la Olimpiada Matemática. Como resultado, surge este estudio en el que analizamos los errores matemáticos que cometen los estudiantes al intentar resolver problemas de geometría en la Olimpiada Matemática antes y después de la implementación de demostraciones a dos columnas en el proceso de resolución de problemas. Un total de 32 estudiantes de diferentes departamentos de

Recibido: 14/05/2023; Aceptado:01/09/2023

Honduras participaron en el estudio. El lugar de estudio fue la Competencia Virtual de Matemáticas (CVM) y el análisis se basa en un método denominado Análisis de Errores de Newman. En el pre-examen, los resultados muestran que los estudiantes no utilizan demostraciones a dos columnas para sus respuestas, y los errores más comunes analizados utilizando el Error de Newman son los errores de transformación, habilidad de proceso y codificación. Por otro lado, en el examen final, el uso de demostraciones a dos columnas por parte de los alumnos confirmó que esta técnica de escritura ayuda a ordenar la información dada en el problema.

Keywords*: competición, educación matemática, resolución de problemas, estudiantes de secundaria, métodos de enseñanza*

INTRODUCTION

One of the ways to detect young people with talent for mathematics is the preparation of mathematics competitions at local, departmental, national and international levels (Ramos, 2006). However, the main problem of Math Olympiad Students in Honduras is writing solutions of problems. This issue stems from varying logical approaches and diverse conceptual understandings. Each student possesses unique levels of comprehension, knowledge, and contextual factors that impact their problem-solving abilities (Bellanca J, 2011).

According to other researchers, aspects that needed in solving National Olympiad problems are the maturity of mathematics with advanced levels such as concepts, comprehension, accuracy, foresight, ingenuity, ways of thinking and mathematical experience (Idris R, 2017). As a result, when students are trying to solve a geometry problem begins by sketching out the geometric figure, but difficulties arise when they struggle to provide justifications for seemingly evident aspects.

The context of contemporary education also plays a role. The shift towards the "Era of Texts" has transformed the way mathematical proofs are conveyed. However, research by (Herbst, 2002) suggests that textual explanations lack the clarity and methodological structure needed for effective understanding. Conversely, the traditional approach of Two-Column demonstrations, prevalent in high school geometry courses, is acknowledged as a valuable tool for helping students develop proof-solving skills. These demonstrations provide a clear, connected sequence of assertions supported by corresponding reasons (Hung. W, 1996).

In light of these challenges, the research aims to investigate whether adopting the Two-Column demonstration approach can alleviate the difficulties faced by Geometry Olympiad participants in expressing their problem-solving processes. The objective is to determine if this method, known for its clarity and organization, can provide students with a structured format for communicating their mathematical reasoning effectively. By exploring the potential impact of Two-Column demonstrations on enhancing students' ability to write comprehensive solutions, the study seeks to contribute to addressing the prevalent issue of articulation barriers faced by Math Olympiad participants.

Furthermore, this study will encompass a dedicated section outlining the historical evolution of geometry education in Honduras. This section aims to provide insight into the trajectory and emphasis of geometry pedagogy within the country. Beyond its descriptive value, this historical perspective serves the purpose of archiving pertinent information within a tangible form, such as a research paper.

History of the Teaching and Learning of Geometry in Honduras

In 1731, bishop Fray Antonio López, founded the Colegio Tridentino de San Agustin de Comayagua. It opened two years later to teach Latin language, culture, religion and mathematics. This institution became the first instructional center where mathematics was taught in Honduras. However, geometry education does not begin at this time. It is between 1847 and 1879 when the teaching of geometry appeared in the country.

To begin with, the foundation of higher education centers in the country made geometry education possible. As mentioned (Valencia, M., 2014) "with the creation of the first faculty of the National Autonomous University of Honduras (UNAH) in 1847, mathematics, geometry, physics and other subjects of humanities and arts are included in their curriculums". In the same way, in the next few years other institutions of higher education began to appear in the country and to include geometry in their curricula as (Valencia, M., 2014; & Pérez, 1996, 1997) says

> —In 1874 the "Instituto Científico de San Carlos de Occidente" was created to attend the secondary level, and in 1879 it was transformed into the Universidad Nacional de Occidente, which was closed in 1884. The University offers courses in Algebra, Geometry and Trigonometry, Geometry in Space, Plane Geometry, Logic, Arithmetic and Notions of Surveying. — (p. 272).

At the beginning of the 20th century, the National Library of Honduras published a book called "Education, Work and Science" in which some pedagogical strategies for teaching geometry were mentioned. In the text, the author (Moncada, J. M., 1904) mentions that

> —when children go about drawing with chalk, sticks or charcoal, they first draw whimsical shapes, and then, little by little, lines, angles, triangles, quadrilaterals, circumferences follow. They need not enter into definitions, but only by checking the direction of the lines, the opening of the angles, the dimensions of the triangles, etc., will they be able to understand their properties, conditions and relationships. — (p.72).

It was not until the 1980s that the Department of Mathematics of the National Autonomous University of Honduras established more concrete guidelines for geometry education. According to (Portillo, 2003), it was suggested to teach positive numbers arithmetic and geometry intuitively from the primary school level.

Lastly, in 2010, the project for improving technical education in the area of mathematics (PROMETAM) included two-column demonstrations in the Honduran curriculum during Phase I, supported by the Ministry of Education with the technical assistance of the Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM) and the Japan International Cooperation Agency (JICA).

Geometry in Mathematical Olympiads

According to Chen, E. (2021) “the only way to learn mathematics is by doing”. Essentially, problem solving is the only way to learn mathematics. Moreover, Chen. E., (2021) states that the ideas and techniques for solving geometry problems that he knows come from countless resources - lectures on the MOP∗ resources found online, discussions on the Art of Problem Solving, or even late-night chats with friends. This indicates that the geometry used in Math Olympiads aims to develop students' problem-solving skills.

The next question is how mathematical Olympiad solutions are usually written. In Barbeau (2000), he states that writing a solution is an act of communication between two people. As a result, Mathematical Olympiad solutions have always been written in prose.

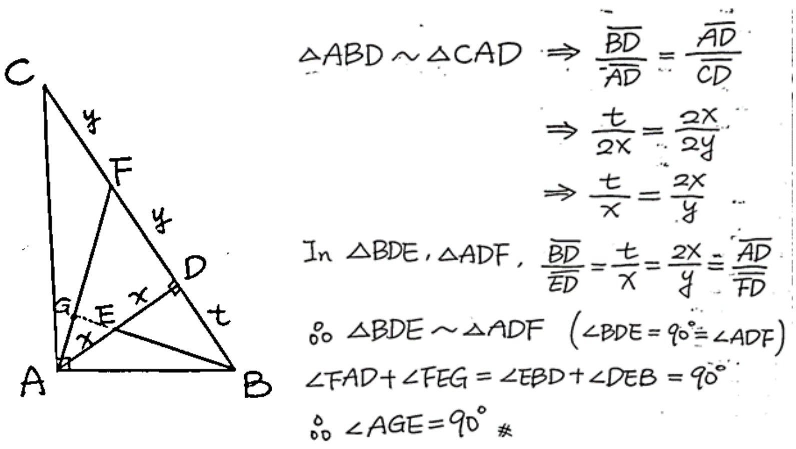


Figure 1. Solution to a geometry problem written in prose style. Source: Romantics of Geometry, Problem 11708

Problem Solving Strategies used in Mathematical Olympiads Geometry Problems

There are many definitions for the word strategy in Mathematics Education. However, in the context of International Mathematical Olympiads Engel, A. (2008) defines them as "information acquired by massive problem solving". In fact, he mentions that "At first the problems are far below a hard competitive level. But if you do most of the problems you are fit for any competition"

Outlined are several strategies employed in solving geometry problems within the context of Mathematical Olympiads. These strategies have been identified and included based on insights derived from participant comments during the International Mathematical Olympiad (IMO 2022). Initially, students were individually interviewed, with a specific focus on the prevalent geometry problems encountered in various Olympiads, including the Central American Mathematical Olympiad and the Iberoamerican Mathematical Olympiad.

These discussions yielded valuable observations, forming a foundation for the compilation of strategies. Furthermore, an additional criterion for the inclusion of strategies was their feasibility for implementation as instruments in Mathematical Olympiad exams for participating students in this study

Methods to Find an Angle Equality

Equality of angles problems in Mathematics Olympiads are a type of problem where one is usually asked to prove that two angles are equal. An example problem is provided below

Let M be the midpoint of the lateral side AB of trapezoid $ABCD$, O be intersection point of its diagonals, and $AO = BO$. The point P was marked on the ray OM such that that $\angle PAC = 90^o$. Prove that $\angle AMD = \angle APC$.

Figure 2. An Olympiad problem asking for proof that two angles are equal

Mathematics Olympiads are commonly plagued by problems of this type. Their prevalence is so significant that they emerge not only within the confines of competition settings but also in educational textbooks, as substantiated by notable works (see Djukić, D. et al., 2011; Hang, K. et al., 2017 & Chen, E., 2021). Subsequently, the ensuing section outlines a spectrum of strategies employed to effectively navigate and address challenges of this specific category.

- Let *B* and *D* be points on a circle Ω it holds that angles *ABC* and *ADC* are equal in the case that *AC* is an arc of Ω.

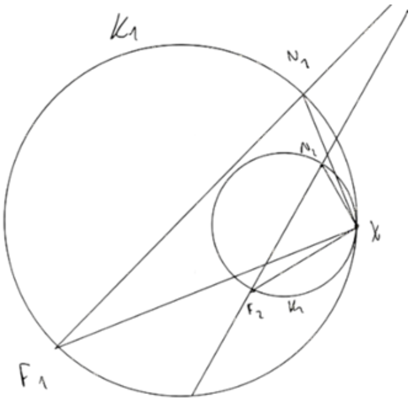


Figure 3. It can be seen that $\measuredangle N_1XF_1 = \measuredangle N_2XF_2 = 90°$

- Identifying isosceles or equilateral triangles can also assist in determining equal angles, which may be the ones required by the problem.
- A transversal line is one that intersects two or more lines. When it intersects perpendicular lines, then several congruent angles are created.
- The angles of two similar or congruent triangles are the same

- Finding the measures of certain segments helps find isosceles triangles or similar triangles.
- Determine two equal angles, even if they are not those requested by the problem. As a general rule, two equal angles can aid in the determination of the requested angles.

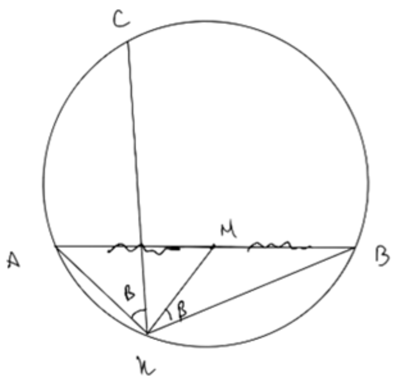


Figure 4. In the graph $\measuredangle CKA = \measuredangle BKM$

- An incenter and excentre can be useful since they are the points of convergence of bisectors, and bisectors divide an angle into two equal portions.

- An isosceles triangle is formed by any point on the perpendicular bisector of *AE*.

- In any triangle *ABC*, if *D* is a point such that the symmedian with respect to *B* is *BD*, and *M* is the midpoint of *AC*, then angles *ABD* and *MBC* are equal.

Techniques to Finding Equal Sides

This type of problem involves students demonstrating the equality of two sides of a figure that is constructed by them. In the following, it will be finding an example of a problem in this style that appeared in the Central American and Caribbean Mathematics Olympiad.

Figure 5. The first equal segment wanted problem appeared in the Central

Let ABC be an acute-angled triangle. C_1 and C_2 are two circles of diameters AB and AC, respectively. C_2 and AB intersect again at F, and C_1 and AC intersect again at E. Also, BE meets C_2 at P and CF meets C_1 at Q. Prove that $AP = AQ$. (Central American and Caribbean Mathematics Olympiad, 2000)

American and Caribbean Mathematics Olympiad. Source: Central American and Caribbean Mathematics Olympiad, 2000)

- Find a special side or measure and show that each of the sides is equal to this special side.
- Analyze the position of the sides because if they share a point or are the sides of a triangle you should focus on those points.
- Try to apply angle chasing, it depends a lot on the position of the sides, but it is useful.
- It is very useful to look at congruences with the sides.
- If there are no congruences create them by moving triangles or doing translations.
- Create parallelograms
- In the case where there is similarity between triangles formed by the ends of the sides, it is advisable to use the center of similarity by selecting one of each side.
- If there are moving dots then apply animation
- Use radical axis in point circles if two sides have a common vertex.

Patterns for Demonstrating Collinearity

These problems require students to demonstrate that three or more points are collinear. Here is an example of a problem of this type.

Consider ABC as an acute triangle, and G as the intersection of the medians of triangle ABC. Let D be the foot of the height measured from A to BC. Draw a line parallel to BC and touching point A. Suppose that the point S is the intersection of the parallel line that passes through A and the excircle of the triangle ABC. Show that S, G, D are collinear (Azerbaijan Junior National Olympiad, 2022).

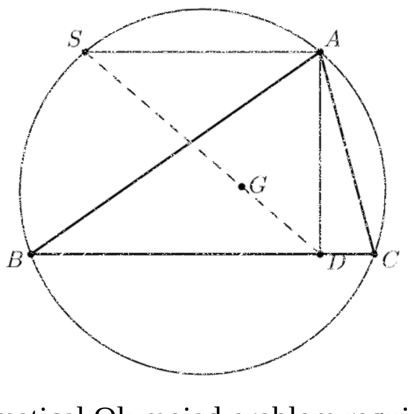


Figure 6. Mathematical Olympiad problem requiring proof that three points are collinear. Fuente: Azerbaijan Junior National Olympiad, 2022

- The points *A*, *B* and *C* are taken. Then, a line is drawn between *A* and *B*. In this instance, the strategy is to provide facts supporting the assertion that point *C* must be located on the line connecting *A* and *B*.
- Create a point *C'* such that *A*, *B* and *C'* are collinear and satisfy the requirements of the problem and then determine the conditions for point *C* to be the same as point *C'*.
- Identify properties related to collinearity that can assist in demonstrating the result, for example, in comparing the collinearity of circumcenter, orthocenter, and centroid.

Procedures for Proving Concyclic Points

Four or more points must be shown to be collinear in this type of problem. There is also a simpler case that involves proving four collinear points by demonstrating that the quadrilateral is cyclic. As an example, the following is a type of problem.

In a scalene triangle ABC, let K be the intersection of the angle bisector of $\angle A$ and the perpendicular bisector of BC. Prove that the points A, B, C, K are concyclic.

Figure 7. Mathematical Olympiad problem requiring proof of concyclic points. Source: AoPS Blogroll Collection

- Observe those angles that are repeated in the use of angle chasing to form cyclic quadrilaterals.
- Instead of proving all points at once, it might be best to prove 4 points first. For example, if it is required to demonstrate that 5 points are concyclic, attempt to demonstrate 4 of them first. To put it another way, consider points *A*, *B*, *C*, and *D*, and then 4 other points *A*, *B*, *C*, and *E*; perhaps proving that the four points above are very similar to one another.
- Using known circles to demonstrate collinearity is recommended because some circles pass through known points.
- Those points forming 90° with the same hypotenuse or diameter are concyclic.
- In order to prove that a set of points is concyclic, the circumcenter must be determined by building triangles. If, for instance, *A*, *B*, *C*, and *D* are points and it is desired to determine whether they are concyclic, two triangles must be constructed with the points. Those points are concyclic if the circumcenters of both triangles are the same.

Based on observations of the strategies used to solve some geometry problems in the Math Olympiads, and emphasizing the mathematics education of geometry in secondary schools in Honduras, the following research question emerges and will be the main focus of this study.

> How would the implementation of Two-column demonstrations in Math Olympiad Geometry Problems impact students?

OBJECTIVES

The key objectives of the study are summarized as follows

1. Assess the baseline knowledge of students before the intervention.
2. Analyze the academic development of students when applying Two-column demonstrations to solve problems.

3. Examine the functionality of two-column demonstrations among Math Olympiad students.

METHODS

According to the topic to be investigated and the stated objectives, the following research has a mixed approach, since, Hernandez (2018) states that “a mixed approach is a set of processes of collection, analysis and linking of quantitative and qualitative data in the same study.” (p. 534). Similarly, the scope that it carries out is experimental, since the experiment to be carried out has a start test and a final test.

For this part Hernandez (2018) states that “In pre-experiments, a group is given a pre-stimulus test or experimental treatment, then the treatment is administered and finally a post-stimulus test is applied.” (p. 136). Finally, this study employs a descriptive approach, aiming to illustrate and comprehend the posed problem, taking into consideration certain students’ solutions, rather than encompassing the perspective of every participant.

Population and Sample

The study it was carried out on students of the Mathematics Olympiads from secondary schools in Honduras located in the departments of Atlántida, Choluteca, Copán, El Paraiso, Francisco Morazán, Gracias a Dios, Lempira, Santa Bárbara and Valle. At the beginning of the research, 32 students participated (6 females and 26 males). However, in that test some students were eliminated so that 13 students (6 females and 7 males) participated in the final test and in the intervention period.

Instrument/Sampling

Two instruments have been used in this research, firstly a common survey to identify students with basic geometry skills and a pre-experiment with identified students consisting of two tests analyzed using Newman's error method (see Newman A., 1983). In the following table, Newman's error indicators are listed.

Table 1. *Indicator of student’s error.*

No.	Newman Procedure	Indicator
1.	Reading the problem (reading)	a. Students can read or recognize symbols or keywords in question b. Students interpret the meaning of every word, term or symbols in the matter
2.	Comprehend the problem (Comprehension)	a. Students understand what is known b. Students understand what is being asked
3.	Transformation of the problem (Transformation)	a. Students know what formulas will be used to solve the problem b. Students know the counting operation that will be used c. Students can create a mathematical model of the problem presented
	Process Skill	a. Student know the procedure or steps that will be used to solve the problem

		b. Students can explain the procedure or steps used to solve problem c. Students can find the final result according to the procedure or the steps used to solve the problem
4.	Writing of the final Answer (Encoding)	a. The student can show the final answer of the problem solving b. Students can write the final answer in an accordance with the conclusion in question

Data Collection Techniques

During the first stage of the analysis, the focus was on identifying students with elementary capabilities in Geometry. At the pre-experimentation stage, the in-depth analysis focused on the procedures used by the students to solve the proposed problems before and after the implementation of the two-column demonstrations. In other words, the analysis involved identifying the indicators of Newman's errors when students used double column demonstrations and when they did not (see Table 1).

- Stage 1: A survey consisting of 33 items was applied to obtain data concerning the students' knowledge of geometry. Among the categories to be considered, the elementary knowledge of the students was recorded in topics related to angles in parallel lines, classification of triangles, remarkable points and straight lines in a triangle, elements of the circumference and angles at the circumference. All students who scored over 65 points were taken. (see in Appendix B)

The phases described below are part of the pretest/posttest design for a single group. Stage 2 presents a pretest G with a control group 0_1 prior to an experimental treatment. After the stimulus, a posttest X with control group 0_2 is presented in stage 3.

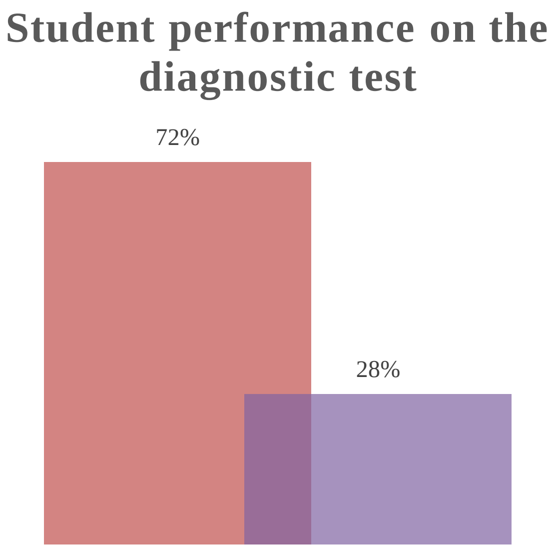
- Stage 2: On a different day, a first test was administered before the intervention period consisting of an Olympic test of two problems to be solved in approximately two hours in which students were instructed to answer the problems with the knowledge demonstrated in phase 1.

- Stage 3: A two-month intervention period was introduced where students were taught geometry problem solving strategies (see Introduction), then, a second test was administered; this test consisted of a geometry problem to be solved by the student using prose writing or two-column demonstration.

RESULTS AND DISCUSSION

Initial Survey

A total of 32 students nationwide participated in this study, in phase 1 the total student population has been considered for the analysis, and the results show the following



On the diagnostic test, 72% (23/32) of the participants scored above 60 points out of 100, with the remaining 28% (9/32) scoring below 60 points. To continue with the study, we have taken all of the students who obtained a score above 65 points, which represents 43.7% of the students (14/32).

- *Pre-experiment*

Pre-exam

Upon reviewing the answers submitted by the students (0_1) and comparing them with the indicators of Newman's error analysis, it appears that they made errors on both proposed problems, as shown in the table 2

Table 2. *Percentage of errors made by students in the pre-exam based on Newman Error.*

Category of Newman Error	Geometry		Total
	Pre – Test		
	1*	2*	
Reading Error	14.2%	0%	14.2%
Comprehension Error	7.1%	7.1%	14.2%
Transformation Error	85.7%	0%	85.7%
Process Skill Error	100%	0%	100%
Encoding Skill Error	92.8%	0%	92.8%

As a matter of clarification, the percentage indicates the total number of students who had Newman errors. As an example, if a student was detected with a reading error in problem one (1*), then that student is no longer counted in problem two (2*). As a result, the percentages shown in problem 2 relate to students who presented a Newman error for the first time during the investigation.

Furthermore, it is important to note that there was no use of two column demonstrations in this problem as well as in the entire exam. Instead, they used a prose exposition. Below are the problems applied to the pre-test and an analysis of the solutions students presented.

Problem 1. Collinear points & equal segments

(1) Let ABC be an acute-angled triangle, Γ its circumcircle and M the midpoint of BC. Let N be a point in the arc BC of Γ not containing A such that $\angle NAC = \angle BAM$. Let R be the midpoint of AM, S the midpoint of AN and T the foot of the altitude through A. Prove that R, S and T are collinear.

(1) Let α and ω be two circles such that ω passes through the center of α. ω intersects α at A and B. Let P be any point on the circle ω. The straight lines PA and PB intersect α again at E and F respectively. Prove that $AB = EF$.

Figure 7. Problem 1 applied options in the first pre-experiment test

- *Common writing style of students*

To begin with, only those students who showed transformation error (85.7%) wrote a procedure to solve the problem, among which the following are the most important ones

- *A solution that consists only of the figure's drawing*

The students who presented these solutions represented 35.7% (5/14) of the group. In general, these solutions presented the construction of the figure described in the problem without attempting to resolve the problem in any other way. Some examples are shown below

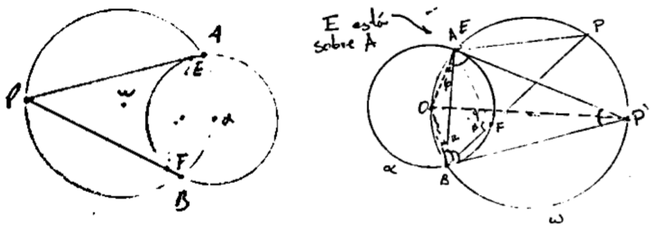


Figure 8. Proposed solution illustrating the problem. Source: based in students answers.

- *A calculation sheet containing only the mathematical approach*

The solutions presented by seven students (50%) contained the construction of the figure described in the problem as well as a series of mathematical calculations, but with no specific wording, order, or conclusion as shown by the encoding error (92.8%). In order to understand this, a procedure of this type is presented

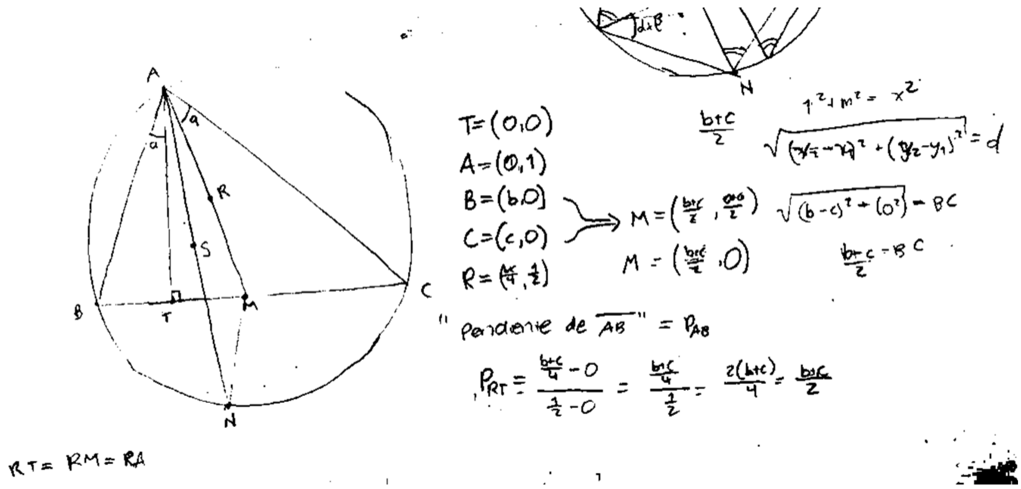


Figure 9. Solution presented by a student showing only mathematical calculations. Source: based on student responses.

Upon inspection, it is clear that this is a draft of the problem, as it illustrates both the figure of the problem and an unwritten solution. Last but not least, the other two students left the problem blank.

Problem 2. Twin Segments

(2) In the acute triangle ABC, $\angle A = 45^o$. Points O, H are the circumcenter and orthocenter of ABC, respectively. D is the foot of altitude of B. Point X is the midpoint of arc AH of the circumcircle of triangle ADH containing D. Show that $DX = DO$

Figure 11. problem 2 proposed in the pre-test

This problem was answered by a small number of students (6/14) corresponding to the 42.8% because they spent so much time doing the problem 1. However, the solutions presented will be shown, among which the following are highlighted

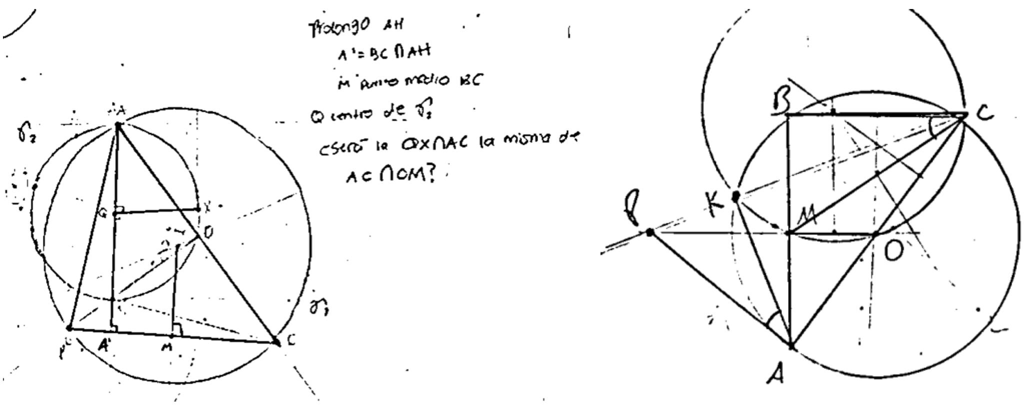


Figure 12. Student-submitted solutions to pre-test problem 2. Source: based on students' answers.

Based on the solutions presented for problem 2, it is evident that 100% of these solutions were drafts of the problem provided by the students. This indicates that the students did not complete the problem within the time limit

Final Test

As a result of the pre-exam, an intervention process was conducted using geometry problem-solving strategies described in the introduction and demonstrating how to solve problems using two columns. Based on the national test of the Virtual Mathematics Competition 2022 described in (Cerros, E., et at, 2022) the ability of students to use these demonstrations was assessed, the results of which will be presented below.

Problem 5 Let Γ be a circumference with diameter AB, and C at the circumference. The line through point B perpendicular to BC intersects the angle bisector of $\angle ACB$ at the point D. E is the foot of the altitude from B to AD and M is the midpoint of the segment CD. Show that B, D, E, and M are concyclic.

Figure 13. Problem used as a final exam in this study

Table 3. *Percentage of errors made by students in the final exam based on Newman Error.*

Category of Newman Error	Geometry	Total
	Final Test	
	CVM 2022 - Problem 5	
Reading Error	7.1%	7.1%
Comprehension Error	14.2%	14.2%
Transformation Error	28.5%	28.5%
Process Skill Error	35.7%	35.7%
Encoding Skill Error	35.7%	35.7%

In this second test, students show fewer Newman errors in Process Skill and Transformation, which indicates that students had ideas on how to proceed with their solution after it had been transformed into mathematical elements. To perform a more detailed analysis, a table will be displayed listing the participants *(0_2)* and the types of solutions they presented.

Table 4. *Write-ups of problem 5 of the Virtual Mathematics Competition*

Participants *(0_1)*	Type of solution written by the participant
J_1	Prose style writing
J_2	Two – Column demonstration writing
J_3	Two – Column demonstration writing
J_4	Prose style writing
J_5	Prose style writing
J_6	Two – Column demonstration writing
J_7	Non-written wording
J_8	Two – Column demonstrations & Prose style writing
J_9	Blank wording
J_{10}	Prose style writing
J_{11}	Prose style writing
J_{12}	Prose style writing
J_{13}	Blank wording
J_{14}	Blank wording

The blank solutions represent students who did not answer the problem and, therefore, were not included in the final analysis shown in Table 3. In the following sections, we will present solutions that were solved using two-column demonstrations

- *J_2's attempted solution*

The solution presented by J_2 shows the data written in two – columns demonstrations and an almost forced attempt to draw a direct conclusion from the data, as shown below.

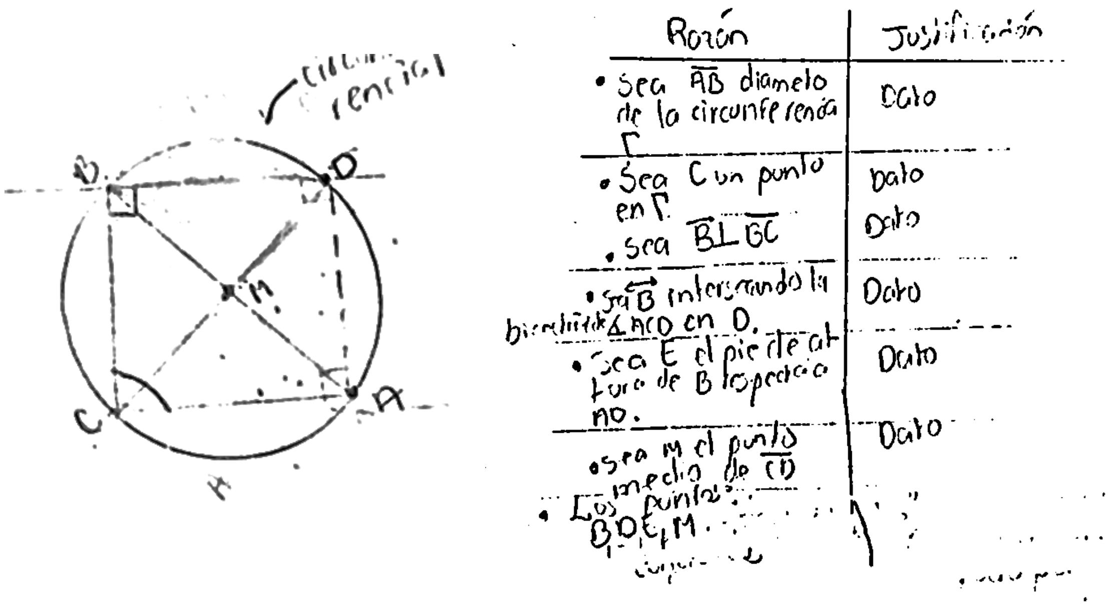


Figure 14. Two – column demonstration that only reflects the data of the problem. Source: based on student responses.

Authors such as (Weiss M., et al, 2009) state that something must be demonstrated in order to proceed to the next step in a two-column demonstration. As for the latter, it can be stated that J_2 lacked clear ideas for demonstrating based on the information provided.

- *J_3's nearly correct solution*

In the solution presented by J_3, he shows the figure and the wording written in two column demonstrations

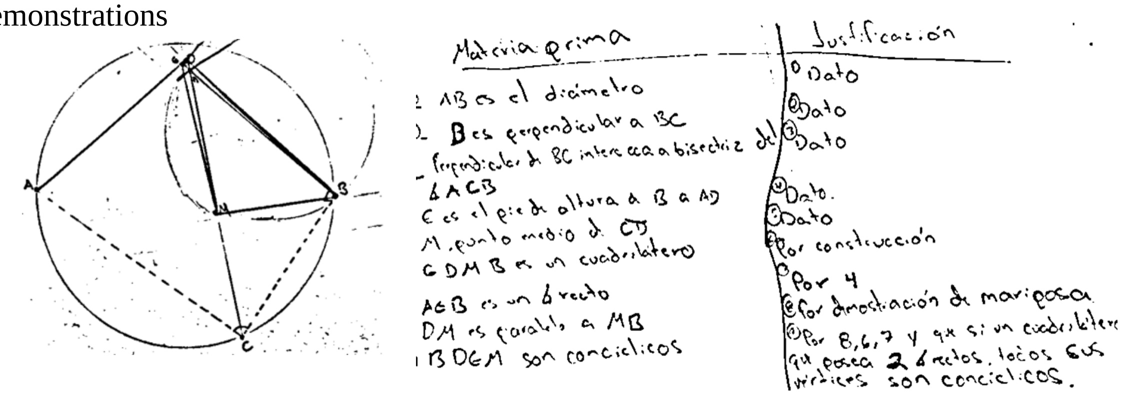


Figure 15. Solution presented by J_3. Source: based on students' answers.

In order that J_3*'s* solution can be understood by the readers, a translated version will be provided in Table 5.

Table 5. *Translation of the Two – Column demonstrations solution presented by J_3*

N°	Statement	Reason
1	The segment *AB* is the diameter	Given
2	The line thought point *B* is perpendicular to *BC*	Given
3	The line perpendicular to *BC* intersects the	Given

	angle bisector of ACB	
4	*E* is the foot of altitude from *B* to *AD*	Given
5	*M* is the midpoint of the segment *CD*	Given
6	*GDMB is a quadrilateral*	
7	AEB =90	Definition of foot of the altitude and step 4
8	*DM* is parallel to *MB*	Definition of the butterfly theorem
9	The points *B*, *D*, *E* and *G* are concyclic	Based on steps 8, 7, 6 and the fact that if a quadrilateral has two right angles all its vertices are concyclic

In the same manner as J_2, J_3 started by drawing a diagram and writing down the data shown in the two-column demonstration. After that, he tried to demonstrate that a set of points lies within the circle shown in the introduction. In general, he starts from step 7 by finding at least two right angles with the same diameter and states that *A*, *B*, *C*, and *D* are cyclic if *ABC* and *ADC* are 90 degrees.

Based on that idea, he states in step 7 that the *AEB* angle is straight (90°) as defined by the foot of the altitude, which is correct. Nevertheless, the problems begin at step 8, when J_3 mentions that *DM* is parallel to *MB* and justifies this by using the butterfly theorem. As you may know, it is immediately false because two parallel segments should not share the same point, which in this case is M. Furthermore, the butterfly theorem can only be applied when it has been established that a quadrilateral is cyclic.

Finally, he immediately states that *B*, *D*, *E* and *G* are concyclic, which would not have been correct even if step 8 had been error-free because with his idea he was only demonstrating that "If angles *AEB* and *DMB* are 90˚, then *A*, *B*, and *D* are cyclic" which is trivial and does not even need to be demonstrated.

- *An analysis of the graph construction proposed in J_6's solution.*

The most common error in solving Geometry problems in Mathematics Olympiads is to rely solely on the construction of the figure, ignoring the theoretical definitions, which should not be overemphasized. The majority of J_6's errors are due to the construction of the figure. This poses some errors, and on the basis of that similar errors are made throughout the demonstration.

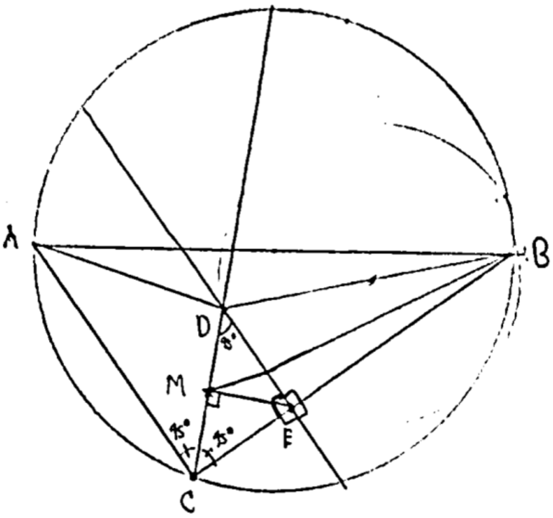


Figure 16. Representative graphic made by J_6. Source: based in the student's answers

Taking a look at the original problem and what a drawing should contain, we notice the following about the J_6 graphic:

- The line through *B* that is perpendicular to *BC* does not exist.
- In the graphic showed the point *E* is not the foot of the altitude from B to *AD*
- There is a line perpendicular to *BC*, but from what can be observed, the student believed that the line through *B* and the line perpendicular to *BC* are the same.

Based on all these observations, it is evident that J_6*'s* solution involving two – column demonstrations is incorrect. The triggering factor in this case was not the use of two – column demonstration, but rather the drawing's inadequate construction.

Prose-Style-Two-Column demonstrations

One of the most elegant solutions reported in (Cerros, E., et al, 2022) was from J_8, a student considered in the sample, her solution includes a prose demonstration but within a two – column demonstration. The style and authenticity of the solution is unique.

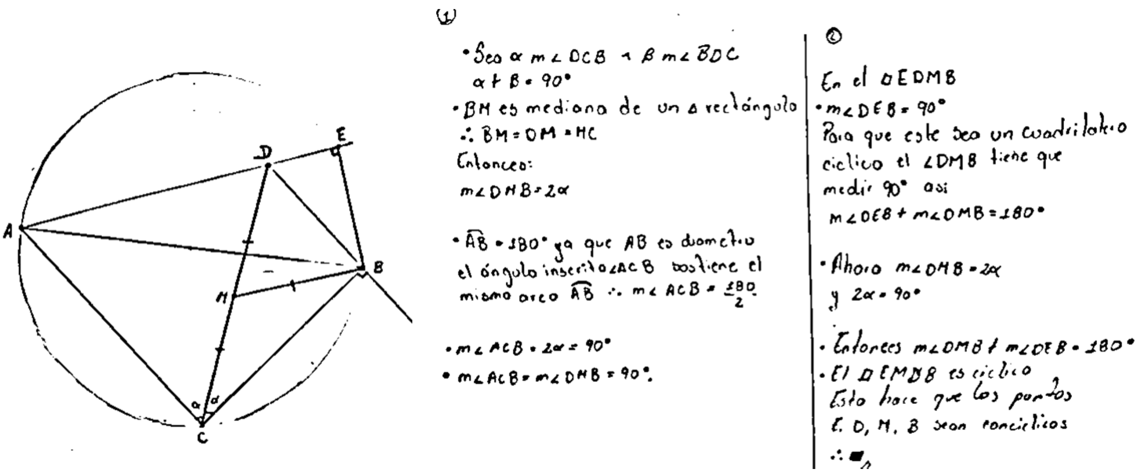


Figure 17. Prose-style-two-column demonstration solution. Source: based of the students' responses

Table 6. *Translation of the Prose – Style – Two – Column demonstrations solution presented by J_8*

Part 1	Part 2
• Let α measure of the angle *DCB* and β the measure of the angle *BDC* • $\alpha + \beta = 90°$	In the □EDMB • $m\measuredangle DEB = 90°$ For this to be a cyclic quadrilateral the $\measuredangle DMB$ has to order 90° as follows $m\measuredangle DEB + m\measuredangle DMB = 180°$
• The line *BM* is median of a right triangle ∴ *BM* = *DM* = *MC* As a consequence, $m\measuredangle DMB = 2\alpha$	• Now, $m\measuredangle DMB = 2\alpha$ As we already know, $2\alpha = 90°$
• The arc AB is equal to $180°$ because *AB* and the inscribed angle containing $\measuredangle ACB$ contains the same arc *AB* $\therefore m\measuredangle ACB = 90°$	• Thus, $m\measuredangle DMB + m\measuredangle DEB = 180°$
• $m\measuredangle ACB = 2\alpha = 90°$ • $m\measuredangle ACB = m\measuredangle DMB = 90°$	• ∴ □EDMB is cyclic. This in turn makes points E, D, M and B cyclic.

As seen in the solution shown, J_8 arranges the solution in part 1 and part 2 where part 1 represents everything that is extracted directly from the problem data and part 2 in how this extracted information assists in proving that the quadrilateral formed by the points *E*, *D*, *M* and *B* is cyclic.

The black dots represent a step in the demonstration, which precedes each previous point, this demonstration is considered two – column because the style is the same. However, it is also considered a prose style demonstration because the justifications for each step are written indirectly. J_8's solution is a very uncommon style of writing problem solutions in Math Olympiads. In fact, solutions like this may even represent a new type of writing in Mathematics Olympiads

CONCLUSIONS

In the survey, 43.7% of the students demonstrated knowledge of angles in parallel lines, classification of triangles, remarkable points and straight lines in a triangle, elements of the circumference and angles at the circumference.

In the pre-experiment, prior to the experimental treatment in pre-test G, it was observed that the control group 0_1 had a minimal understanding of Euclidean geometry, but no practical methods or techniques to solve problems, in other words, they had no notion of how to proceed with the demonstration.

Once the post-test X was applied, it was observed that the control group 0_2 ordered the information contained in the problem better and were able to draw conclusions from this; however, it is important to note that some students were unable to solve problems using techniques.

This type of demonstration serves as a tool for helping students sort the data presented in the problem. However, at the same time, it makes no sense to sort the data correctly if the students do not understand the mathematical strategy for solving a particular problem. Only students who are familiar with a straightforward strategy for solving a particular problem will be able to use two-column demonstrations effectively.

ACKNOWLEDGEMENTS

Throughout this research, I would like to thank my dear friend Yaxeny Lopez for her assistance in improving the instrument that was used. Additionally, I wish to thank Professor Victor Cardenas for his comments on an earlier draft of this manuscript.

APPENDIX A. SUPPLEMENTARY DATA

Cerros, E., Aguilera, M., Luna, F., Roy-Choudhury, M., Martinez, A., Oziel, E., Callison, L., Vasquez, L., & Romero, D. (2022), "A collection of solutions created by participants in the Virtual Mathematics Competition 2022", *Mendeley Data*, DOI: https://doi.org/10.17632/8dbrr7xpxg.1

REFERENCES

Department of Mathematics, University of Toronto. (2000). Writing Up Solutions. http://www.math.toronto.edu/barbeau/writingup.pdf

Djukić, D., Janković, V., Matić, I., & Petrović, N. (2011). The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2009 Second Edition. Springer New York.

Bellanca, J., & Stirling, T. (2011). Classrooms without borders: Using internet projects to teach communication and collaboration. *Teachers College Press.*

Chen, E. (2021). Euclidean geometry in mathematical olympiads (Vol. 27). American Mathematical Soc.

Engel, A. (2008). Problem-solving strategies. Springer Science & Business Media.

Ramos Palacios, L. A. (2006). Una estrategia metodológica para desarrollar olimpiadas matemáticas en el nivel medio del sistema educativo hondureño. [Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán].

Hang, K. H., & Wang, H. (2017). Solving problems in geometry: Insights and strategies for mathematical Olympiad and competitions (Vol. 10). World Scientific Publishing Company.

Herbst, P. G. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 283-312. https://doi.org/10.1023/A:1020264906740

Idris, R. (2017). Mengatasi kesulitan belajar dengan pendekatan psikologi kognitif. *Lentera pendidikan: jurnal ilmu tarbiyah dan keguruan*, 12(2), 152-172. https://doi.org/10.24252/lp.2009v12n2a3

Moncada, J. M. (1904). *Educación, trabajo y ciencia: (método de enseñanza integral)*. Retrieved from https://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmcpk120

Newman, A. (1983). The Newman language of mathematics kit: Strategies for diagnosis and remediation. Sydney: Harcourt Brace Jovanovich Group.

Pérez, G. (1996). Historia de la educación superior de Honduras: antecedentes históricos 1733 – 1847

Pérez, G. (1997). Historia de la educación Superior de Honduras: Ciento cincuenta años de vida universitaria

Portillo, A. (2003). La Educación Superior en Honduras 1949-2000 Vol. III. Bosquejo Histórico de las Unidades Académicas (pp. 1-239).

Robert Osserman, Are proofs in high school geometry obsolete? J. Math. Behavior, to appear.

Valencia, M. R. M. (2014). Honduras: Origins, Development, and Challenges in the Teaching of Mathematics. Mathematics and Its Teaching In The Southern Americas: With An Introduction By Ubiratan D'ambrosio, 10, 265. https://doi.org/10.1142/9789814590570_0011

Weiss, M., Herbst, P., & Chen, C. (2009). Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 275-293.

Wu, H. (1996). The role of Euclidean geometry in high school. *Journal of mathematical behavior*, 15(3), 221-238.

Xiong, B., & Lee, P. Y. (Eds.). (2007). Mathematical Olympiad in China: problems and solutions. World Scientific

Manuel Aguilera
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras
ammartinezag@e.upnfm.edu.hn

APPENDIX B. APPLIED SURVEY

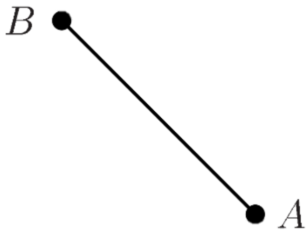
Competencia Virtual de Matemáticas
Geometry Diagnostic Olympiad Assessment
Name and Surname: ______________________
E-mail: ______________________

1. *Fundamental Concepts*

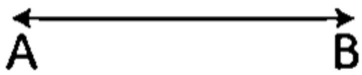
Determine the geometric notion and label it beneath the illustration

1

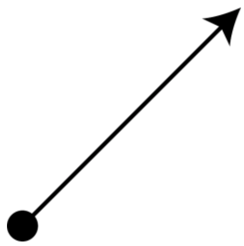
2



3

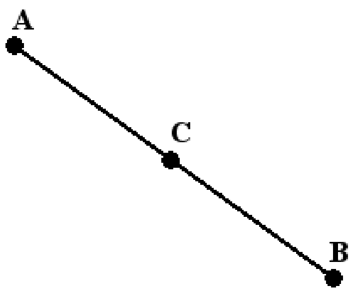


4



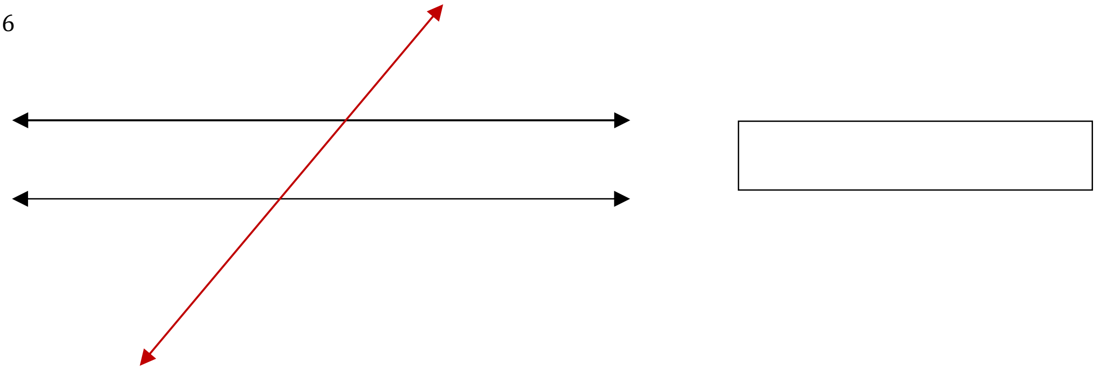
If $AC = BC$ then C is:

5



What is the name of the red line?

6



2. *Geometric Properties*

Provide the appropriate sentence completion for the geometric element mentioned in the sentence.

7. If 3 or more points are on the same line, they are: ______________________________
8. If we have 3 lines passing through the same point, they are: _____________________
9. If we extend two lines and they never intersect, they are: _________________________
10. If the intersection of two lines forms a 90-degree angle, the lines are: _____________

3. *Triangle Properties and Important Points of Triangles*

Circle the correct answer.

11. Equilateral triangles have angled that measure:

a) 60 degrees
b) 40 degrees
c) 90 degrees
d) 120 degrees

12. Which distinctive theorem can be applied to find the hypotenuse of a right triangle?

a) Thales' Theorem
b) Pythagorean Theorem
c) Fermat's Little Theorem

Complete the statement by writing the missing word or number.

13. The sum of the interior angles of a regular polygon is 2,880. How many sides does the polygon have? _________________________

14. The sum of the interior angles of a triangle is _________________________________

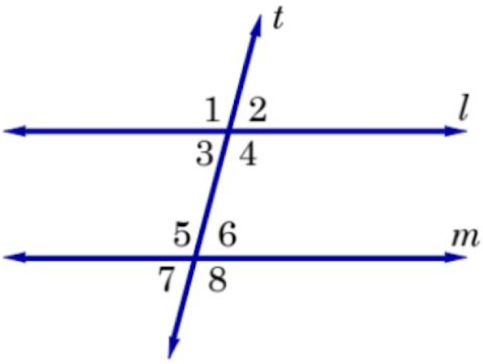
15. The ________________________ is the line or line segment where the lines intersect that divide an angle into two equal parts.

16. The __________________ is the line that extends from a vertex of a triangle to the point where it forms a 90-degree angle with the opposite side or its extension.

17. The ____________________ is the line that passes through the midpoint of a segment and forms 90-degree angles with it.
18. The _____________________ is the segment that connects a vertex of a triangle with the midpoint of the opposite side.
19. The ___________________ is the point where the angle bisectors of a triangle intersect.
20. The ___________________ is the point of intersection of the altitudes of a triangle.
21. The ___________________ is the point where the medians of a triangle intersect.
22. The ___________________ is the center of the circle circumscribed around a triangle.

4. ***Angles in Parallel Lines***

Select all the options that apply.



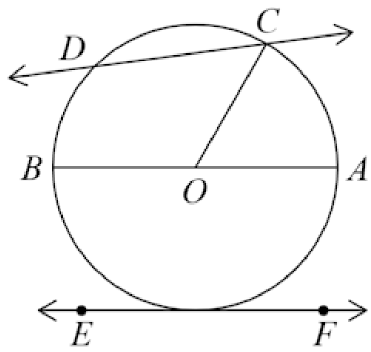
	∡ 1 = ∡ 5	∡ 2 = ∡ 6	∡ 3 = ∡ 7	∡ 4 = ∡ 8	∡ 3 = ∡ 6	∡ 4 = ∡ 5	∡1 = ∡8	∡2 = ∡7
Angulos Correspondientes	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Angulos Alternos externos	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Angulos Alternos Internos	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

5. Elements of the Circumference

Identify the terms of the image.

23

24



26 $\overline{CO}$

(a) Secant (b) Chord (c) Radius (d) Diameter (e) Tangent

27 $\overleftrightarrow{EF}$

(a) Secant (b) Chord (c) Radius (d) Diameter (e) Tangent

28 $\overline{CD}$

(a) Secant (b) Chord (c) Radius (d) Diameter (e) Tangent

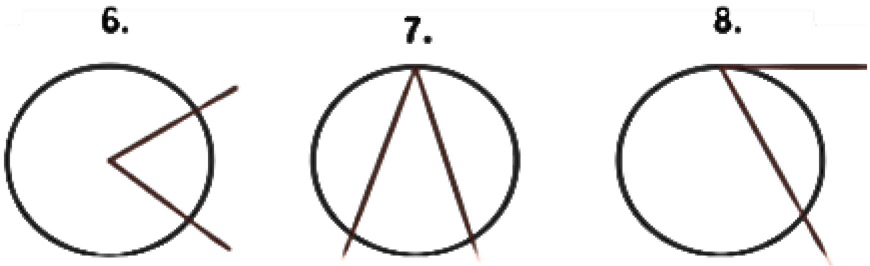
29 $\overleftrightarrow{EF}$

(a) Secant (b) Chord (c) Radius (d) Diameter (e) Tangent

30 $\overline{AB}$

(a) Secant (b) Chord (c) Radius (d) Diameter (e) Tangent

6. Angles at the Circumference



31. What is the angle represented beneath 6?

(a) Central angle (b) Inscribed angle (c) semicircular angle

32. What is the angle represented beneath 7?

(a) Central angle (b) Inscribed angle (c) semicircular angle

33. What is the angle represented beneath 8?

(a) Central angle (b) Inscribed angle (c) semicircular angle

MES