Revista Española de Filosofía Medieval, 14 (2007), pp. 79-89

EL CUADRADO MEDIEVAL DE OPOSICIÓN PROPOSICIONAL Y MODAL

Juan Manuel Campos Benítez
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

RESUMEN

Presentamos un cuadrado de oposición y equivalencia para las proposiciones moleculares y modales, y una expansión del cuadrado a un hexágono, según una sugerencia de William de Sherwood. Esta expansión está avalada por dos reglas proposicionales y modales. Las relaciones lógicas del cuadrado nos permiten formular varios teoremas y mostrar algo de la riqueza de la lógica medieval.

Palabras clave: cuadrado, proposicional, teoremas, modal.

ABSTRACT

We show a sentence and modal square of opposition and equivalence to be expanded into an hexagon according to one suggestion from William of Sherwood. This expansion is permitted by two sentence and modal rules. The logical relations of the square allow us to formulate several theorems in order to show a glimpse of the Medieval Logic complexity.

Key words: sentence, square, modal, theorems.

INTRODUCCIÓN

Presentamos (1) un cuadrado de oposición para la lógica proposicional que necesitamos para expresar (2) el cuadrado modal proposicional y finalmente (3) breves comentarios finales. Entendemos por lógica proposicional la lógica de las conectivas, lo que los medievales trataban como proposiciones «hipotéticas»; las proposiciones no hipotéticas las llamaban «categóricas». Las proposiciones categóricas e hipotéticas de los medievales no coinciden exactamente con nuestras proposiciones atómicas y moleculares. En efecto, las categóricas, aunque admiten cuantificación, no se rigen por las reglas de las conectivas; el cuadrado tradicional trata sobre las categóricas precisamente. Sus proposiciones hipotéticas o «moleculares» rebasan a las nuestras, pues para el medieval también son conectivas expresiones temporales (*quando*), locales (*ubi*) y causales (*quia*) o sus equivalentes. Para nuestros fines nos bastan las conectivas proposicionales ordinarias[1]. Trataremos las siguientes: equivalencia, implicación,

1 Notemos de paso que en autores renacentistas como Tomás de Mercado estas expresiones se van asimilando a las condicionales y en Alonso de la Veracruz, contemporáneo de Mercado podemos reconstruir cuadrados de oposición para las locales y temporales. Véase Tomás de Mercado, *Comentarios lucidísimos al texto de Pedro Hispano* (trad. de M. Beuchot, México, UNAM, 1986, p. 298) donde dice: «pues las proposiciones temporales, locales y de ablativo se reducen fácilmente a la condicional» y Alonso de la Veracruz, *Tratado de los tópicos dialécticos* (versión de M. Beuchot, edición bilingüe, México, UNAM, 1998, p. 27) dice: *Aduerbium vbique, totum localiter significat. (...) Sumitur argumentum affirmatiue a toto ad partem. Deus est vbique: ergo est in iste loco.(...) Fit etiam negatiue.(...) A toto in tempore similiter (...).*

conjunción, disyunción y negación. Usaremos los símbolos «≡», «⊃», «∧», «∨», «~» respectivamente y las variables proposicionales «p» y «q».

Por lógica modal entendemos la lógica de los llamados «modos» de verdad o modalidad alética de las proposiciones, a saber, «posible» y «necesario», y sus relaciones lógicas. Simplificamos un poco pues no tratamos otros modos como «imposible» y «contingente», expresables en términos de los anteriores. Trataremos de encuadrar esta doctrina en el contexto del cuadrado de oposición y equivalencia para las hipotéticas y luego para las modales. Abordamos principalmente autores de los siglos XIII y XIV.

Nuestro ensayo no es de orden histórico, no exponemos el desarrollo de la doctrina modal sino que pretendemos reconstruir la lógica modal proposicional haciendo explícito lo que en ellos está implícito, como la doctrina del cuadrado precisamente. Esto exige cierta base, el conocimiento de la lógica de las conectivas. Pues bien, esta lógica cobra una mejor expresión en autores del siglo XIV, aunque puede hallarse en germen en autores anteriores. Comenzamos pues nuestra exposición con la doctrina lógica de las proposiciones hipotéticas en el cuadrado.

1. LA LÓGICA PROPOSICIONAL Y EL CUADRADO DE OPOSICIÓN

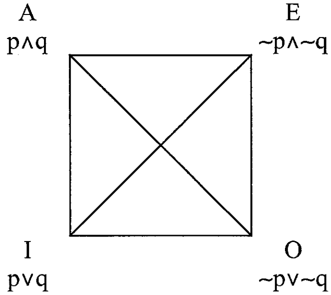
No es exagerado afirmar que buena parte de la discusión medieval respecto a la lógica, en sus varios aspectos como el proposicional, cuantificacional, modal, temporal y otros gira en torno a las relaciones de las proposiciones dentro del cuadrado aristotélico: la contradicción, la contrariedad, la subcontrariedad, la subalternación, la conversión y la equivalencia. Las *consequentiae* encuentran aquí su acomodo, si bien rebasan el ámbito del cuadrado[2].

Comencemos con proposiciones contradictorias, es decir, aquellas en los extremos diagonales del cuadrado. Una conjuntiva contradice a una disyuntiva con sus partes negadas y por la misma razón una conjuntiva con sus partes negadas contradice una disyuntiva sin partes negadas[3]; como las contradictorias son equivalentes si negamos cualquiera de ellas, podemos reconstruir el siguiente cuadrado de oposición y equivalencia. Ponemos las contradictorias en diagonal: las conjuntivas arriba y las disyuntivas abajo y ya está. También rigen aquí las relaciones de contrariedad, subalternación y subcontrariedad; quedan expresadas «automáticamente» al expresar las contradictorias en el cuadrado. Notemos que la conjunción ocupa el «lugar» de la universal afirmativa, la conjunción de negativas el lugar de la universal negativa; la disyunción el lugar de la particular afirmativa y la disyunción de negativas el lugar de la particular negativa. Se expresa todo esto en el siguiente cuadrado.

---

2 Aunque la transitividad (*Si aliquid infert aliud quod inferat aliud, primum inferens infert ultimum,* según lo expresa Abelardo en su *Dialectica*, p. 297), por ejemplo, puede expresarse en el hexágono que adelante veremos. El texto está en la dirección http://individual.utoronto.ca/pking/resources/abelard/Dialectica.txt. basada en la edición de De Rijk, Aseen, Van Gorcum, 1979, la paginación al parecer corresponde a esta edición. Agradezco aquí a quienes hacen posible el acceso a estos textos tan valiosos.

3 *Oppositum copulativae aequivalet uni disiunctivae factae ex oppositis partium. Oppositum disiunctivae aequivalet uni copulativae factae ex oppositis partium disiunctivae.* La cita es de John Sutton en un comentario al tratado *De consequentiis* de Walter Burleigh, citado por Ángel Muñoz en su *Seis preguntas a la lógica medieval* (México, UNAM, 2001, p. 133). Ockham dice: *Sciendum est etiam quod opposita contradictorie copulatiuae est una disiunctiua composita ex contradictoriis partium copulatiuae. (...)Sciendum est etiam quod opposita contradictorie distiunctiuae est una copulatiua composita ex contradictoriis partium ipsius disiunctiuae* (Summa Logicae, II.32 y 33; citamos libro y capítulo). Se puede encontrar en http://individual.utoronto.ca/p.king/resources/ockham/Summa_logica.txt Las equivalencias pues, ya eran patrimonio «común», por decirlo así, a comienzos del siglo XIV.

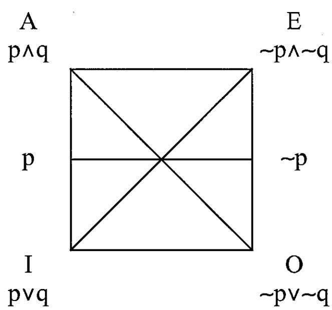


Este es el cuadrado de oposición para las hipotéticas. Pero nos falta dar un paso más. Los medievales tenían varias reglas para las hipotéticas, y para nuestros fines hay una regla de la conjunción y una de la disyunción que nos permiten ciertas inferencias y ampliar este cuadrado. Son estas:

R1: de una copulativa a cualquiera de sus partes vale la inferencia
R2: una disyuntiva se sigue de cualquiera de sus partes[4]

1.1. El hexágono proposicional

Con estas dos reglas podemos reformular el cuadrado de tal manera que se convierte en hexágono, donde tenemos, además de las cuatro proposiciones hipotéticas, dos proposiciones «intermedias», por decirlo así, entre las «universales» y las «particulares», en nuestro caso podemos llamarlas «atómicas». Estas proposiciones intermedias no tienen conectiva; están implicadas por R1 e implican, por R2, a las de abajo, las particulares; ocupan el lugar de las proposiciones singulares que veremos más adelante. Son también contradictorias, pues «p» contradice a «~p».



4 *(...)a copulativa ad quamlibet eius partem, est bona consequentia (...).* La regla de la disyunción: *Ad veritatem disiunctivae affirmativae, sufficit unam partem esse veram; patet quia a qualibet parte disiunctivae affirmativae ad disiunctivam affirmativam, est bona consequentia, cuius ipsa est pars (...),* como lo expresa Alberto de Sajonia en su *Perutilis logica,* (edición bilingüe de A. Muñoz, México, UNAM, 1988, parágrafos 529 y 735 respectivamente). «Disyunción afirmativa» contradice a la negativa, es decir, la negación de la disyunción, que no es lo mismo que una disyunción con sus partes negadas.

1.2. Una observación

Puede parecer arbitrario el colocar como proposiciones «universales» y «particulares» proposiciones que carecen de cuantificador. Pero no lo es, o no completamente. En efecto, podemos recurrir a la teoría de la suposición de los términos. La suposición es una teoría acerca de los rangos referenciales de los términos, sobre todo los que fungen como sujetos y predicados. Ahora bien, dicho términos pueden cuantificarse, y de hecho siempre lo están en los silogismos. La suposición de los términos comunes es lo que nos interesa, pues dichos términos admiten intuitivamente la cuantificación; los medievales trataban esto bajo las llamadas suposición «distributiva» y «determinada», y las operaciones denominadas «ascenso» y «descenso». El descenso consiste en la inferencia de una proposición cuantificada a cadenas de proposiciones singulares unidas por la conjunción (suposición distributiva, cuando el cuantificador es universal) o por la disyunción (suposición determinada cuando es particular); el ascenso o inducción es la operación inversa[5].

Varios operadores admiten su expresión en el cuadrado: epistémicos, temporales, deónticos, si bien el caso paradigmático era la modalidad alética, tal como en nuestros días[6]. Son tema de otro estudio, exponer estas cosas nos apartaría de nuestro objetivo, más modesto, que es exponer el cuadrado modal proposicional. Con el descenso tenemos nuestro hexágono que acabamos de exponer: de universales (copulativas) a singulares, y de ahí a particulares (disyuntivas). En lugar de proposiciones cuantificadas para los cuatro extremos del cuadrado hemos puesto sus respectivos descensos, es decir, cadenas de proposiciones singulares en su mínima expresión, a saber, dos. Y las reglas R1 y R2 nos han permitido colocar las proposiciones intermedias. Veremos adelante que William de Sherwood avala explícitamente esta jugada para las proposiciones cuantificadas.

1.3. Algunas relaciones

Podemos establecer algunas relaciones lógicas, según el cuadrado tradicional. Comencemos con las equivalencias, que aparecen cuando de un par de contradictorias negamos cualquiera de ellas. Así, la negación de una conjunción equivale a su contradictoria; la negación de una disyunción a su contradictoria, corresponden a los extremos A-O e I-E respectivamente (negando uno de ellos, cualquiera; optamos por negar la segunda parte de la equivalencia). Tenemos pues las equivalencias

$$(p \wedge q) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$$
$$(p \vee q) \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$$

También puede expresarse esto negando toda la equivalencia, esto es, colocando la negación a toda la expresión en lugar de una de sus partes. Cuando la negación rige toda la expresión tenemos una proposición «compuesta» (*composita*) y cuando rige una parte al interior de la proposición la expresión es «dividida» (*divisa*), como lo expresaban los medievales cuando hablaban de las proposiciones modales. Se trata de categorías sintácticas, del lugar que ocupa

5 Para más detalles ver Paul Vincent Spade, «The Logic of the Categorical: the Medieval Theory of Descent and Ascent», en N. Kretzmann (ed.) *Meaning and Inference in Medieval Philosophy* (Dordrecht: Kluwer Academic Pub., 1988).

6 Ockham, hablando de las proposiciones epistémicas dice: *Et forte ista fuit causa quare Philosophus specialem tractatum de talibus propositionibus et proprietatibus earum et conuersionibus non fecit, quia ex illis quae scienda sunt circa propositiones de necessario, de contingenti, de possibili et impossibili et quibusdam paucis, potest faciliter sciri quid sentiendum sit de aliis modalibus et proprietatibus earum.* (2.29).

una expresión —un operador, como diríamos hoy— en la proposición. Las equivalencias expresadas arriba son divididas, pues la negación, al estar dentro de la proposición, afecta sólo una parte de la equivalencia; pero en las compuestas se afecta a toda la expresión. Notemos de paso que ambas, compuestas y divididas, son tautológicas. La versión compuesta de las equivalencias queda así:

$$\sim((p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q))$$
$$\sim((p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q))$$

Las reglas R1 y R2 nos permiten las siguientes implicaciones.

$$\text{R1 } (p \wedge q) \supset p$$
$$\text{R2 } p \supset (p \vee q)$$

Nótese que el antecedente de R1 y el consecuente de R2 expresan la subalternación (A-I) donde la variable «p» funciona, por decirlo así, como un término medio o enlace entre ellas, expresando la transitividad de la implicación, también expresable como una variante del llamado «silogismo hipotético».

Pero pasemos a las proposiciones modales.

2. LAS PROPOSICIONES MODALES

El aspecto sintáctico modal fue ampliamente tratado por autores del siglo XIII, por ejemplo William de Sherwood, Pedro Hispano y Tomás de Aquino y si bien hay diferencias menores en cuanto al tratamiento, la doctrina modal es la misma. Llamamos «sintáctico» a la doctrina lógica en el contexto del cuadrado de oposición y equivalencia aplicada ahora a las proposiciones modales, sin analizar, esto es, a proposiciones no cuantificadas.

Una proposición puede ser verdadera sin más, por ejemplo «Pedro disputa»; se trata de una oración asertórico o *de inesse*, como le llamaban. Pero incluso en el caso de que Pedro no dispute, la proposición «es posible que Pedro dispute» es verdadera. Una proposición como «Pedro es racional» es necesaria, así que podemos formar la proposición modal «es necesario que Pedro sea racional». Tenemos pues un predicado modal aplicado a una proposición. Claro que la doctrina es aplicable también a proposiciones cuantificadas y con un operador modal dentro de ellas, como se hizo en detalle por autores del siglo XIV[7]. El aspecto semántico tiene que ver con la interpretación de las proposiciones modales, y aquí entra de nuevo la doctrina de la suposición, esta vez con las llamadas suposición «material», «simple» y «personal». A grandes rasgos tiene que ver con la interpretación de las proposiciones modales como entidades lingüísticas, conceptuales y extralingüísticas respectivamente. Una proposición modal puede ser *de dicto* si el operador modal afecta la proposición (como en «es posible que Pedro dispute» o *de re* si afecta a la cosa de la cual se predica modalmente un predicado, como en «Pedro posiblemente disputa»; se trata pues de categorías semánticas, pues afectan a la verdad de la oración. Había discrepancias, incluso al interior de una misma escuela, respecto a cual de ellas, la *de dicto* o la *de re* es propiamente modal, pero todo esto pertenece al ámbito de la filosofía de la lógica, cosa que rebasa nuestra exposición, que se limita al aspecto lógico sintáctico de las proposiciones modales compuestas.

---

7 Para un tratamiento de esto véase, de J. M. Campos, «El cuadrado escolástico de oposición de la cuantificación y la modalidad», en *La lámpara de Diógenes* (Año 6, No. 10-11, Vol. 6, México, BUAP, 2005, disponible en línea) y «La conversión modal medieval y el sistema S5 de Lewis», presentado en el *V Encuentro Boliviano de Estudios Clásicos*, Santa Cruz de la Sierra, julio 2006.

2.1. El cuadrado modal de oposición

El cuadrado tradicional tiene que ver con la cuantificación, pero también con la modalidad. Los medievales del siglo XIII eran ya conscientes del paralelismo entre la cuantificación y la modalidad. Por ejemplo Tomás de Aquino dice que el operador de necesidad tiene semejanza con el cuantificador universal, el de imposibilidad con el universal negativo y la posibilidad y la contingencia se asemejan al cuantificador particular; asimismo rigen las reglas del cuadrado de oposición[8].

Debo señalar antes dos cosas. Primero: las relaciones de oposición y equivalencia del cuadrado son ya modales pues en su formulación incorporan explícitamente los operadores modales[9], especialmente la necesidad y la posibilidad e implícitamente sus equivalentes. Segundo: el condicional ha de ser necesario, pues «para la verdad de la condicional se exige que el antecedente no pueda ser verdadero sin que lo sea el consecuente (...) de donde resulta que toda condicional verdadera es necesaria, y toda condicional falsa es imposible», como dice el Hispano (I.17); esto se aplica a la subordinación, aunque también las otras relaciones son susceptibles de cualificación modal, como veremos.

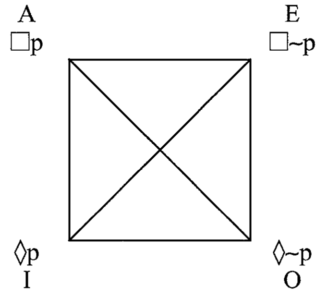
Sigamos pues con nuestro cuadrado de oposición, aplicado ahora a la modalidad. Las relaciones lógicas son las mismas; pueden establecerse a partir de las relaciones de oposición y equivalencia que brotan del cuadrado, a los que entraremos, ahora sí, con mayor detalle. El cuadrado aparece en nuestros tres autores del siglo XIII. Tanto Hispano como Sherwood establecen las relaciones del cuadrado tomando en cuenta también la materia de las proposiciones, cosa que no haremos aquí pues trabajamos con una proposición sin analizar. Procederemos colocando las contradictorias en un cuadrado de oposición modal, con la ubicación tradicional de las universales arriba y las particulares abajo.

Usaremos los símbolos «$\Box$» y «$\Diamond$» para «necesidad» y «posibilidad» respectivamente, más una variable proposicional. El modo «imposible» puede naturalmente entenderse como la negación de «posible», así que puede expresarse con la negación y el operador de la posibilidad.

El cuadrado es el siguiente

8 *Attendendum est autem quod necessarium habet similitudinem cum signo universali affirmativo (...) impossibile cum signo universal negativo (...) contingens vero et possibile similitudinem habent cum signo particulari. Y añade: Lex autem et modus argumentandi in contrariis, subalternis et contradictoriis eodem modo attenditur in his sicut in propositionibus de inesse.* En Tomás de Aquino, «De propositionibus modalibus» (*Opuscula philosophica*, edición de Raimundo Spiazzi, Turín-Roma, 1954). El opúsculo resalta por su brevedad, alrededor de 700 palabras latinas. Omitimos en nuestra exposición la contingencia o doble posibilidad) expresable como la conjunción de I y O. Autores posteriores la distinguen de la posibilidad, en este contexto.

9 Y también lo son las proposiciones mismas: si tomamos la proposición categórica, admite tres casos según sea la relación entre el sujeto y el predicado. En efecto, el predicado puede convenirle al sujeto de manera necesaria, contingente o imposible; Pedro Hispano (*Tractatus, llamados después Summule logicales*, traducción de M. Beuchot, México, UNAM, 1986, I.13, en adelante citamos tratado y parágrafo) les llama proposiciones en materia natural, contingente y remota respectivamente. Jean Buridan explica así la materia natural: *quod propositio est in materia naturali quae est per se uera, siue in primo modo dicendi «per se» siue in secundo modo. Unde primum modum dicendi «per se» intendit cum dicit «in qua praedicatum est de esse subiecti», id est de definitione ipsius; secundum uero modum intendit cum dicit «uel proprium eius».* En la dirección electrónica http://individual.utoronto.ca/p.king/resources/buridan/Summulae_de_dialectica.txt, tratado primero, cap. 4. página 36. Tenemos pues, las propiedades esenciales o que fluyen de la esencia. Notemos que las modalidades iteradas pueden tener aquí su expresión, y también la combinación de oraciones compuestas y divididas. Vale la pena estudiar a fondo estas relaciones del cuadrado atendiendo a su «materia».



2.2. Las equivalencias entre necesidad y posibilidad

Veamos primero las equivalencias entre necesidad y posibilidad. Hemos visto que las contradictorias son equivalentes cuando se niega una de ellas; tenemos pues que la necesidad («A») es equivalente a la negación de la posibilidad seguida de una negación («O») y la posibilidad («I») es equivalente a la negación de su contradictorio («E»)[10] así

$$\Box p \leftrightarrow \sim\Diamond\sim p$$
$$\Diamond p \leftrightarrow \sim\infty\sim p$$

Expresados como negación de equivalencia tenemos

$$\sim [\Box p \leftrightarrow \Diamond\sim p]$$
$$\sim [\Diamond p \leftrightarrow \Box\sim p]$$

Que son sus formas, por decirlo así, divididas y compuestas respecto a la negación. Pasemos a otras relaciones, de acuerdo al hexágono modal.

2.3. El hexágono modal de oposición

Nos hacen falta ahora las implicaciones «intermedias», siguiendo el paralelismo con el hexágono proposicional y que pueden establecerse mediante las siguientes reglas modales:

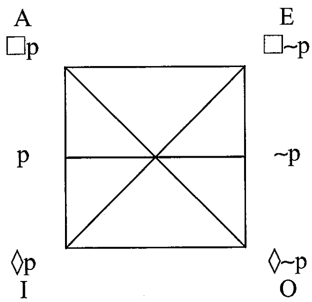
RM1: De una proposición necesaria a la asertórica vale la consecuencia
RM2: De una proposición asertórica a una posible vale la consecuencia[11]

Sherwood da indicios para reconstruir no un cuadrado sino un hexágono de oposición y equivalencias para las proposiciones cuantificadas, pues dice que una proposición universal negativa (o afirmativa) es contraria a una singular afirmativa (o negativa); una proposición sin-

10 «Todas las de posible y necesario son equipolentes por el verbo y el modo que se dan de manera desemejante», dice Pedro Hispano en I.24. «Verbo» se refiere al *dictum*, nuestra variable proposicional y «semejante» cuando ambos, *dictum* y modo están afirmados o negados; desemejante serán cuando uno está negado y el otro no. En efecto, en nuestras equivalencias las fórmulas del lado derecho están negadas —el modo y la variable— y las del lado izquierdo no; son pues «desemejantes» respecto a la negación. La flecha de doble dirección expresa la equivalencia estricta.

11 Una formulación de estas reglas la encontramos en Abelardo: *Si enim necesse est esse, uerum est esse, et si uerum est esse, possibile est esse.* (p. 204, en la citada versión electrónica).

gular verdadera hace verdadera su correspondiente particular[12]. *Mutatis mutandis*, tenemos el siguiente hexágono de oposición y equivalencia, donde en lugar de las universales tenemos el operador modal de la necesidad y en lugar de las particulares el operador de la posibilidad, en medio tenemos oraciones asertóricas o *de inesse*:



Dado este paralelismo y considerando el operador de necesidad ocupando el lugar del operador del cuantificador universal y el operador de la posibilidad el lugar del particular, y considerando una proposición cualquiera (una variable proposicional, pues ahora nos ocupan las relaciones del cuadrado sin atender el status modal de dicha variable) tenemos este hexágono donde «p» es una variable proposicional y para nuestros fines corresponde a una proposición asertórica no cuantificada ni modalizada; es asertórica y por eso no nos preguntamos por su «materia» (remota, contingente o natural). Las relaciones de oposición son las siguientes, donde el operador modal está explícito en «pueden»:

CONTRARIAS: Pueden ser simultáneamente falsas pero no simultáneamente verdaderas[13].
SUBCONTRARIAS: Pueden ser simultáneamente verdaderas pero no simultáneamente falsas[14].
SUBALTERNAS: Si la universal es verdadera, lo es la particular[15].
CONTRADICTORIAS: No pueden ser simultáneamente verdaderas ni simultáneamente falsas[16]
EQUIVALENTES: Los extremos cuantificados equivalen a sus contradictorios anteponiéndoles una negación, y a sus subalternos anteponiendo y posponiendo la negación[17].

---

12 *Notandum, quod universalis affirmativa et singularis negativa et etiam universalis negativa et singularis affirmativa contrariuntur ad minus quantum ad legem, quia possunt simul esse falsae et non simul verae (...) quia veritas cuilibet singulari facit veritatem in particulari*. W. de Sherwood, *Introductiones in logicam* (edición de Brands y Kann, Hamburgo, Meiner-Verlag, 1995, I. —citamos capítulo; todas nuestras citas de Sherwood provienen de aquí). Véase también la traducción de Kretzmann (*William of Sherwood's Introduction to Logic*, Minneapolis: University of Minnesota Press, 1966) y sus comentarios al respecto.

13 *Notandum, quod lex contrarium est, quod numquam possunt simul esse verae, possunt tamen simul esse falsae*, como dice Sherwood; las siguientes citas también son de él. La presencia explícita de operadores temporales (*numquam* y *simul*) puede sugerir cierta interpretación de la modalidad, la llamada «estadística» por S. Knuutila en su *Modalities in Medieval Philosophy* (Londres, Routledge, 1993), pero no entraremos en esos detalles.

14 *Lex autem subcontrariarum est, quod nunquam possunt simul esse falsae, sed simul verae.*

15 *Lex autem subalternorum est, quod si universalis sit vera, particularis est vera; et non e converso. Similiter si particularis est falsa, et universalis est tunc falsa; et non e converso.* Tenemos aquí ya la contraposición que, expresada como regla, corresponde al *modus tollens*.

16 *Lex contradictoriorum est, quod neque possunt simul esse verae neque simul falsae.*

17 *Sciendum ergo, quod quodlibet signum aequipollet suo contradictorio cum negatione praeposita. Similiter quodlibet signum aequipollet suo subalterno cum negatione praeposita et postposita,* como dice Aquino en el lugar citado.

Con estas reglas podemos establecer ya cierto número de teoremas modales, comencemos con las contrarias:

1. $\sim \Diamond (\Box p \;\&\; \Box{\sim}p)$
2. $\sim \Diamond (\Box p \;\&\; \sim p)$
3. $\sim \Diamond (\Box{\sim}p \;\&\; p)$

Los teoremas dicen que las proposiciones contrarias no pueden ser ambas verdaderas, esto es, no es posible su conjunción. Las proposiciones subcontrarias pueden ser simultáneamente verdaderas, es decir, su conjunción es posible, lo cual queda expresado con la disyunción inclusiva, que admite la verdad de ambos disyuntos:

4. $\Diamond (\Diamond p \vee \Diamond \sim p)$

Las proposiciones subalternas son éstas, donde la flecha expresa la implicación estricta:

5. $\Box p \rightarrow p$
6. $\Box p \rightarrow \Diamond p$
7. $p \rightarrow \Diamond p$
8. $\Box{\sim}p \rightarrow {\sim}p$
9. $\Box{\sim}p \rightarrow \Diamond {\sim}p$
10. ${\sim}p \rightarrow \Diamond {\sim}p$

Las proposiciones contradictorias quedan expresadas con la disyunción exclusiva, pero también queda expresada con la negación de equivalencia, que excluye que ambas puedan ser ambas verdaderas o ambas falsas, así:

11. $\sim \Diamond (\Box p \equiv \Diamond {\sim}p)$
12. $\sim \Diamond (\Box{\sim}p \equiv \Diamond p)$
13. $\sim \Diamond (p \equiv \sim p)$

Podemos establecer las equivalencias modales recordando las sugerencias de Sherwood: los extremos con operador modal equivalen a la negación de su contradictorio y las universales a su subalterno anteponiendo y posponiéndole la negación; con más detalle las expresa el Aquinate. En efecto, nos dice que en las contrarias negando el *dictum* de una de ellas (e.d. la variable proposicional) las hacemos equivalentes, y en las contradictorias negando una de ellas, y en las subalternas se niega tanto el modo como el dicho para establecerlas, la flecha de doble dirección expresa la equivalencia estricta[18]:

14. $\Box p \leftrightarrow \sim \Diamond {\sim}p$
15. $\Box{\sim}p \leftrightarrow \sim \Diamond p$
16. ${\sim}\Box p \leftrightarrow \Diamond {\sim}p$
17. ${\sim}\Box{\sim}p \leftrightarrow \Diamond p$

---

18 *Sciendum est autem circa modalium aequipollentias, quod idem operatur negatio posita ad modum, sicut in propositionibus de inesse. Negatio in modalibus praeposita modo facit aequipollere suo contradictorio (...); negatio vera apposita dicto facit aequipollere contrario: negatio vero apposita utrique subalterno.* Sherwood también ofrece reglas para las equivalencias modales en el lugar adecuado, pero hemos preferido citar sus reglas para la cuantificación para mostrar el paralelismo con la modalidad, reconocido explícitamente por el Aquinate. Notemos el uso implícito de la regla de la doble negación, evidente en las proposiciones sin modo, y en las contrarias.

y para las proposiciones sin modo

$$18.\ p \leftrightarrow \sim \sim p$$

que expresa la doble negación, y si expresamos su versión compuesta tenemos

$$19.\ \sim[p \leftrightarrow \sim p]$$

que conduce a una versión débil del Principio de Tercio Excluso.

Ahora bien, atendiendo a estas equivalencias y a las proposiciones contrarias, tenemos que su número se duplica, pues donde tengamos el operador de la necesidad, pongamos por caso en el primer disyunto, podemos sustituirlo por el de la posibilidad flanqueado a ambos lados por la negación, así:

$$20.\ \sim \Diamond (\sim\Diamond\sim p \ \& \ \Box\sim p)$$
$$21.\ \sim \Diamond (\sim\Diamond\sim p \ \& \sim p)$$
$$22.\ \sim \Diamond (\sim\Diamond p \ \& \ p)$$

De hecho el número de teoremas podría fácilmente triplicarse si a cada primera ocurrencia del operador de la necesidad lo sustituimos por su equivalente, a cada ocurrencia del operador de la posibilidad lo sustituimos por su equivalente, de manera que tengamos fórmulas solo con necesidad, solo con posibilidad o con ambas. El lector puede ejercitarse y establecer el número de teoremas resultantes.

No obstante, podemos proseguir y aumentar el número de teoremas si atendemos a algunos resultados por parte de autores del siglo XIV. En efecto, ya antes de Ockham encontramos las equivalencias que establecen relaciones entre la negación de una conjunción y la disyunción con partes negadas, como hemos visto, y que pueden incorporarse al cuadrado modal. Así pues los teoremas (1-4) y (19-21) pueden duplicarse si les aplicamos las equivalencias entre conjunción/disyunción. Los teoremas (5-10) se duplican si les aplicamos la contraposición, equivalencia presente ya en Sherwood, como hemos visto; y el número aumenta si aplicamos la equivalencia entre disyunción e implicación[19]. Claro que el número de teoremas aumenta si sustituimos cada operador modal por su equivalente. El lector puede otra vez aumentar el número de teoremas aplicando todas estas equivalencias.

3. COMENTARIOS FINALES

Hemos presentado el cuadrado y el hexágono proposicional y modal atendiendo a las relaciones lógicas establecidas ya desde el Estagirita. El lector podrá juzgar el avance y lo novedoso que puede haber en los lógicos medievales. Las equivalencias que hoy llamamos «De Morgan» están presentes explícitamente en ellos, y muchas otras que no hemos abordado, pues nos ceñimos al cuadrado. Lo mismo se aplica a la lógica modal, pues tenían reglas modales para cada conectiva; lo que hemos presentado no es sino un esbozo y queda mucho por averiguar. Si aceptamos que el cuadrado ordinario es ya modal, al aplicarlo a proposiciones que son modales tendremos iteración o acumulación de operadores. La materia de las proposiciones podría modificar las relaciones lógicas entre ellas. Todo esto vale la pena estudiar.

---

19 Como por ejemplo la que señala el mismo Ockham: «Sócrates no enseña a menos que sea maestro» equivale a «si Sócrates no es maestro no enseña» (*«Sortes non legit nisi sit magister», quia aequiualet isti «si Sortes non sit magister, Sortes non legit»*, (2.31)). Por contraposición tenemos: «si Sócrates enseña, es maestro». Esto ejemplifica el teorema $(\sim p \vee q) \equiv (p \supset q)$.

Con todo, quedan sin investigar una multitud de temas y problemas. Creo que lo expuesto aquí puede ser compartido por todos ellos, pues he tratado el aspecto sintáctico, las relaciones lógicas del cuadrado de oposición llevadas al terreno proposicional y modal. El aspecto semántico es el campo de batalla donde luchan realistas y nominalistas, y sus variantes, incluso en el terreno modal; para entrar en ella es preciso la base común, la sintaxis. Son muchos los detalles de la lógica modal medieval que esperan la atención del estudioso, si el lector llegara a interesarse, a preguntarse mejor por la lógica modal medieval mi escrito no habrá sido en vano.

Juan Manuel Campos Benítez
juancamposb@hotmail.com